数学発展課題

数列の極限・関数の極限

（　）年（　）組（　）番 氏名（　　　　　　　　　　）

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

1 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{n^2+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-3n^3\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\{1+(-1)^n\}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+9}-n\right)}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(n-2\sqrt{n}\right)$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(-1)^n$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^4-n^2+1}}{n+1}$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\log_3\left(9n^2-4n-2\right)-\log_3\left(n^2+3\right)\right\}$

(10) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{2n\pi}{n^2+1}$

数列の極限　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

2 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot1+2\cdot4+3\cdot7+\cdots\cdots+n(3n-2)}{n\cdot1+(n-1)\cdot2+(n-2)\cdot3+\cdots\cdots+1\cdot n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(2n)^2}{n^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+(n+2)^2+\cdots\cdots+(3n)^2}{1^2+2^2+3^2+\cdots+(2n)^2}$

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

3 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\theta + 1}{n}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{n + (-1)^n}{2n}$

数列の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{4}$ 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2}-2n\sqrt[3]{n^3-n^2}+n^2\right\}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の等式が成り立つように，定数 a の値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+an+2}-\sqrt{n^2+2n+3}\right)=3$$

数列の極限　平成______年______月______日

6 n を自然数とする。直線 $y = x$ と放物線 $y = (x - n)^2$ で囲まれた図形の面積を S_n とする。このとき，$L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n^p}$ が存在して，かつ $L \neq 0$ となるとき，p の値を求めよ。またそのときの L の値を求めよ。(立教大)

数列の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5^n}{2^n+5^n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}-2^{n+1}}{3^n+2^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{(-2)^{n-1}-3^{n+1}\right\}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-4)^n-(-2)^n}{3^n}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-3)^n-(-2)^n}$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(2^{2n-1}-3^{n+1}\right)$

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{8}$ 以下の問いに答えよ。

（1）n を 2 以上の自然数とする。このとき，$2^n \geqq n^2 - n + 2$ を示せ。

（2）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$ を求めよ。

数列の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{9}$ 一般項が次の式で表される数列の極限を調べよ。ただし，(1) から (3) は $r \neq -1$ とし，(4) は $r > 0$ とする。

(1) $\dfrac{2}{r^n + 1}$

(2) $\dfrac{r^n - 1}{r^n + 1}$

(3) $\dfrac{r^n}{2 + r^{n+1}}$

(4) $\dfrac{r^{n-1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n-1}}$

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{10}}$ 次の数列が収束するように，実数 x の値の範囲を定めよ。また，そのときの数列の極限値を求めよ。

(1) $\left\{(x^2-4x)^n\right\}$

(2) $\left\{\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^n\right\}$

(3) $\left\{\left(\dfrac{3x}{x^2+2}\right)^n\right\}$

数列の極限　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{11}}$ 次の関数 $f(x)$ に関して，$y=f(x)$ のグラフを書け。

（1）$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$

（2）$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-x}{x^{2n}+1}$

（3）$f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}-x^3+2x^2}{x^{2n+1}+x}$

数列の極限　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{12}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について，
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

(1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n - 3$

(2) $a_1 = 3,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4n^2 - 1}$

(3) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$

(4) $a_1 = \dfrac{3}{2},\ a_{n+1} = \dfrac{2}{3 - a_n}$

(5) $a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_{n+2} = \dfrac{1}{3}(2a_{n+1} + a_n)$

数列の極限

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

13 次の問いに答えよ。

（1）$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ において

i. $|a_{n+1} - 2| \leqq \dfrac{1}{2}|a_n - 2|$ を示せ。

ii. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

（2）$\sqrt{3} < a_1$ とし，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{3}{a_n}\right)\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ において，次のことを示せ。

i. すべての自然数 n について，$a_n > \sqrt{3}$

ii. $a_{n+1} - \sqrt{3} < \dfrac{1}{2}(a_n - \sqrt{3})$

iii. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{14}}$ 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するものは和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots\cdots$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+2n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n+1}$

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\textbf{15}}$ 次の無限級数の和を求めよ。((4) 首都大，(5) 高知女子大)

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log_2\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)$

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{16}}$ 次の無限級数の和を求めよ。ただし，(2) は $|x| < 1$ とする。また，$|x| < 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ であることを用いてもよい。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$

(2) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots\cdots$

数列の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

17 次の無限等比級数が収束するような x の値の範囲を求めよ。また，収束するときは和を求めよ。

(1) $1+(x^2-x+1)+(x^2-x+1)^2+(x^2-x+1)^3+\cdots\cdots$

(2) $x+\dfrac{x^2}{1+x}+\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+\dfrac{x^4}{(1+x)^3}+\cdots\cdots$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos x-\cos 2x)^n$

数列の極限　平成＿＿年＿＿月＿＿日

18 次の無限級数の収束，発散を調べよ。また，収束するならば和を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{3}{4^n}\right\}$

(2) $(1-2)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{2}{3^2}\right)+\cdots\cdots$

(3) $\dfrac{2+3}{4}+\dfrac{2^2+3^2}{4^2}+\dfrac{2^3+3^3}{4^3}+\cdots\cdots$

数列の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

19 次の問いに答えよ。

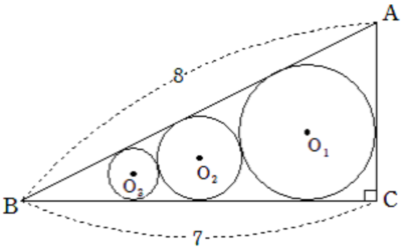
(1) 循環小数 $0.1\dot{2}\dot{3}$ を既約分数で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\log_2 x)^n < 1$ を満たす実数 x の値の範囲を求めよ。

(3) 初項，公比ともに実数の無限等比級数があり，その和は 3 で，各項の 3 乗からなる無限等比級数の和は 6 である。初めの無限等比級数の公比を求めよ。

$\boxed{\mathbf{20}}$ 初項 1 の 2 つの無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ がともに収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \frac{8}{3}$，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{4}{5}$ が成り立つ。このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)^2$ を求めよ。(長崎大)

21 $\triangle$ ABC において，AB $= 8$，BC $= 7$，$\angle$C $= 90^\circ$ とする。$\triangle$ ABC に内接する円を O_1 とし，次に O_1 と辺 AB，BC に接する円を O_2 とする。以下，図のように順に O_3，$\cdots$，O_n，$\cdots$ を作る。また，円 O_n の半径を r_n とする。(関西大)



(1) r_1 を求めよ。

(2) $\sin\dfrac{\mathrm{B}}{2}$ を求めよ。

(3) r_n を n の式で表せ。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

数列の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

22 一辺の長さが a である正三角形 T_1 の頂点を A_1，B_1，C_1 とする。辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$，$\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1$ を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とし，3 点 A_2，B_2，C_2 を結んで正三角形 T_2 を作る。同じようにして，正三角形 T_3，T_4，T_5，$\cdots$ を作る。

(1) 正三角形 T_n の周の長さを L_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} L_n$ を求めよ。

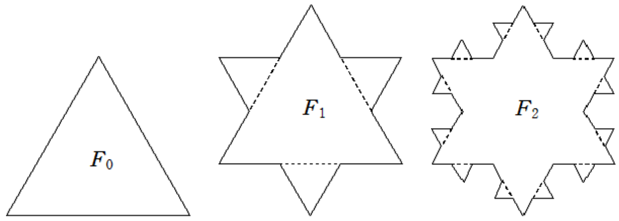
(2) 正三角形 T_n の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ。

(3) 正三角形 T_n を面とする正四面体の体積を V_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ を求めよ。

数列の極限

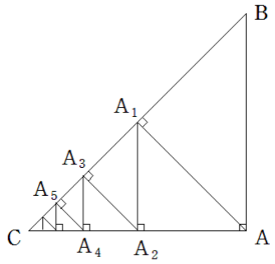
平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

23 面積 1 の正三角形 F_0 から始めて，図のように，図形 F_1，F_2，$\cdots$ を作る。ここで，図形 F_{n+1} は，F_n の各辺を 3 等分し，各辺の中央部にその線分を 1 辺とする正三角形を付け加えたものである。F_n の面積を S_n，周の長さを L_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，および，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} L_n$ を求めよ。



数列の極限　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

24 $\angle \mathrm{A} = 90^\circ$ である直角二等辺三角形 ABC において，周の長さを L_0 とする。また，頂点 A から BC に垂線 $\mathrm{AA_1}$ を下ろす。$\mathrm{A_1}$ から AB に垂線 $\mathrm{A_1A_2}$ を下ろす。



以下，図のように続けていくとき，

$$L = \mathrm{AA_1} + \mathrm{A_1A_2} + \mathrm{A_2A_3} + \cdots\cdots$$

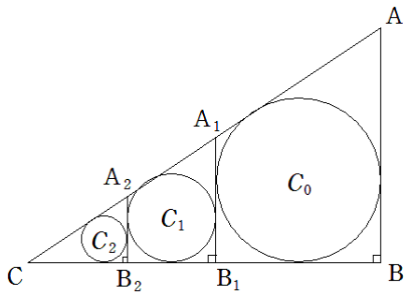
とする。L は L_0 の何倍になるか。(日本女子大)

数列の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

25 一辺の長さが a である正三角形 ABC の一辺 BC を n 等分し，それらの各点を B から C の方に順に P_1, P_2, $\cdots$, P_{n-1} とし，線分 AP_k の長さを l_k $(k=1, 2, \cdots, n-1)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(l_k)^2$ を求めよ。(神戸商船大)

26 図のように $\angle B$ を直角とする△ ABC とこの三角形の 3 辺に接する円 C_0 がある。辺 AB と平行な円 C_0 の接線が辺 AC および辺 BC と交わる点をそれぞれ A_1，B_1 とし，△ A_1B_1C の 3 辺に接する円を C_1 とする。以下同様に点 A_n，B_n を定め，△ A_nB_nC の 3 辺に接する円を C_n とする。このとき，円 C_n の半径を r_n，面積を S_n として，次の問いに答えよ。ただし，$BC = a$，$\angle C = 2\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}\right)$ とする。(山形大)



(1) r_0 を a と $\tan\theta$ で表せ。

(2) 数列 $\{r_n\}$ の公比を $\tan\theta$ で表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を求めよ。

関数の極限

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

27 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{x^3+x+2}{x^2+x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(1-\frac{2}{x+2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{x-\sqrt{2x+3}}{x-3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{3+2x}-\sqrt{3-2x}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x}$

関数の極限

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

28 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2}-2}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

関数の極限　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{29}}$ 次の等式が成り立つように，定数 a, b の値を定めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x+1}-b}{x-1} = \sqrt{2}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{a\sqrt{x^2+3x+5}+b}{x-1} = 5$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+ax}+b}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

関数の極限　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{30}}$ 次の問いに答えよ。

（1）3 次関数 $f(x)$ が次の 2 つの条件を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=3,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$

（2）$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2+ax+b}{(x-2)^2}=c$ となる定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

関数の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

31 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x-1}{x^2-3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{1}{2}+0}\sqrt{2x+1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{2x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-2-0}\frac{x+2}{|3x+6|}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to-1-0}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

関数の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{32}}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^3}$

(2) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{x-2}{x^2-x}$

(3) $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$

(4) $\displaystyle \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x}$

(5) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sin x}$

関数の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

33 次の極限を求めよ。ただし，$[x]$ はガウス記号とする。

（1） $\displaystyle\lim_{x\to 2-0}[x]$

（2） $\displaystyle\lim_{x\to -3+0}[x]$

（3） $\displaystyle\lim_{x\to 3}[x]$

（4） $\displaystyle\lim_{x\to 1}(2x-[x])$

（5） $\displaystyle\lim_{x\to 1}([3x]-[x])$

関数の極限　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

34 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{x^2-2x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-5x}{-x^3+3x^2+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+2x-3}{x^2-x+2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+6x-5}{-3x+2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+x+5}{x^2+3x-2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2x^3-9x^2)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(5+3x^2-x^3)$

関数の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

35 次の極限を求めよ。ただし，$[x]$ はガウス記号とする。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x+[2x]}{x+1}$

関数の極限　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{36}}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x+2})$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x+1-\sqrt{x^2+x})$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1})$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}+x)$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(2x+\sqrt{4x^2-3x})$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$

関数の極限

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

37 次の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ。

i. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+8}{x-3}=2$

ii. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+ax+b\right)=0$

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2+x-2}$ において，$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ となるように，a，b，c，d の値を定めよ。(広島大)

関数の極限　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

38 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} 2^x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 2^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_3 x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \log_{\frac{1}{3}} x$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x^2}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to -0} 3^{\frac{1}{x}}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to -1} 3^{\frac{1}{x+1}}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

関数の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\textbf{39}}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(2^x-3^x)$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(3^x-2^x)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-5^x}{4^x+5^x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+3)+2\log_2(x+1)-3\log_2 x\}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\log_{0.1}(1+0.5^x)$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{\log_9 x+\log_3\left(\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-1}\right)\right\}$

関数の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

40 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(-2x)}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x-\sin x}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x+\sin x}{\sin 5x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\tan x}{1-\cos x}$

関数の極限　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{41}}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^\circ}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x(1-\cos 2x)}{\tan^3 x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}\right)$

関数の極限　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{42}}$ 次の極限を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\tan x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{2x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)^2}{1+\cos x}$

関数の極限　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

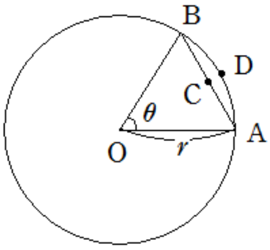
43 次の問いに答えよ。

(1) 等式 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{2}{3}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。

(2) 半径 1 の円に内接する正 n 角形の面積を S_n，周の長さを L_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L_n$ を求めよ。

関数の極限　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{44}}$ 半径 r の円 O の周上に中心角 θ ラジアンの弧 AB をとり，弦 AB，弧 AB を二等分する点を，それぞれ C，D とする。このとき次の極限を求めよ。ただし，弧 AB の長さを $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ で表す。



(1) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AB}^2}$

$\boxed{\mathbf{45}}$ 点 O 中心とし，長さ $2r$ の線分 AB を直径とする円の周上を動く点 P があり，△ APB の面積を S_1，扇形 OPB の面積を S_2 とする。P が B に限りなく近づくとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の極限値を求めよ。(日本女子大)

46 O を原点とする座標平面上に 2 点 A(2, 0)，B(0, 1) がある。自然数 n に対し，線分 AB を $1:n$ に内分する点を P_n，$\angle \mathrm{AOP}_n = \theta_n$ $\left(0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}\right)$，線分 AP_n の長さを l_n とする。(福島県立医大)

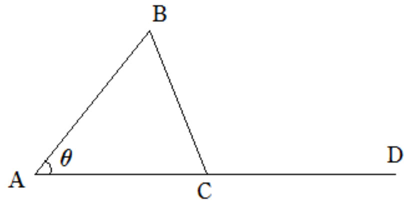
(1) l_n を θ_n で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{l_n}{\theta_n}$ を求めよ。

関数の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

47 図において，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{AD}=7$ で $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさ θ が変化するにしたがって点 C は AD 上を動く。このとき次のものを求めよ。(立教大)



（1）AC

（2）$\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^2}$

関数の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{48}$ 次の極限を求めよ。((3) 東京電機大,(6) 防衛医大)

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{5}{n}\right)^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+2h)^{\frac{3}{h}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\left\{\log_2(x+2)-\log_2 x\right\}$

関数の極限

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

49 次の関数が ( ) 内に示した x の値で連続か不連続か調べよ。ただし，$[x]$ はガウス記号とする。

(1) $f(x)=[-x] \quad (x=1)$

(2) $f(x)=[\cos x] \quad \left(x=\dfrac{\pi}{2}\right)$

(3) $f(x)=\dfrac{|x|}{x} \quad (x=-2)$

(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

関数の極限

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

50 次の関数のグラフをかき，その連続性を調べよ。

(1) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$

(2) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n+1}}$

(3) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x-1}{1+|x|^{n}}$

(4) $f(x)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sin^n x-\cos^n x)$

(5) $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+|x|)^{n-1}}$

関数の極限

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{51}}$ 関数 $f(x) = \lim_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ が，x のすべての値に対して連続となるように定数 a，b の値を定めよ。また，そのときの $y = f(x)$ のグラフをかけ。(静岡県立大)

関数の極限　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{52}}$ 次の方程式は，( ) 内に示した範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつことを示せ。

(1) $3^{-x} = 2x \quad (0 < x < 1)$

(2) $x - 3 = \sin x \quad (0 < x < \pi)$

(3) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad (x < 0)$