

(9)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \log_3 (9n^2 - 4n - 2) - \log_3 (n^2 + 3) \}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9n^2 - 4n - 2}{n^2 + 3}$$

$$\text{真分} \propto \frac{9n^2 - 4n - 2}{n^2 + 3} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$(\frac{1}{n^2}) \cdot (\frac{1}{n^2}) \propto n^2 \rightarrow \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \left(\frac{\frac{9n^2}{n^2} - \frac{4n}{n^2} - \frac{2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \log_3 \left(\frac{9 - \frac{4}{n} - \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} \right)$$

$$= \log_3 \left(\frac{9 - 0 - 0}{1 + 0} \right)$$

$$= \log_3 9 = \underline{2}$$

(10)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{2n\pi}{n^2 + 1}$$

$$= \frac{2n\pi}{n^2 + 1} \propto (\frac{1}{n^2}) \cdot (\frac{1}{n^2}) \propto n^2 \rightarrow \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$n^2 \rightarrow \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\frac{2n\pi}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{\frac{2\pi}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{0}{1 + 0} \right)$$

$$= \cos 0 = \underline{1}$$

[2]

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \dots + n(3n-2)}{n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n}$$

$$(\lim) = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + \dots + n(3n-2)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(3k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k^2 - 2k)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) - 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1) \{ (2n+1) - 2 \}$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)(2n-1) \dots \textcircled{1}$$

$$(\lim) = n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + (n-2) \cdot 3 + \dots + 1 \cdot n$$

$$\text{二番目に } k=1 \text{ から } k=n \text{ まで}$$

$$\{ n - (k-1) \} \cdot k$$

より

$$(\lim) = \sum_{k=1}^n \{ n - (k-1) \} \cdot k$$

$$= \sum_{k=1}^n (n - k + 1) k$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ (n+1)k - k^2 \}$$

$$= (n+1) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= (n+1) \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{3}{6} n(n+1)^2 - \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1) \{ 3(n+1) - (2n+1) \}$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(3n+3-2n-1)$$

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \dots \textcircled{2}$$

① ② 87

$$(\lim) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2} n(n+1)(2n-1)}{\frac{1}{6} n(n+1)(n+2)} \leftarrow \textcircled{1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{2n-1}{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{\frac{2n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{2 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3 \cdot \frac{2-0}{1+0} = \frac{6}{1}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2}{n^3} \quad \text{2n番目に } k=1 \text{ から } k=2n \text{ まで}$$

$$(\lim) = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+n)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (n+k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (n^2 + 2nk + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n n^2 + \sum_{k=1}^n 2nk + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^n 1 + 2n \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n k^2$$

$$= n^2 \cdot n + 2n \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= n^3 + n^2(n+1) + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{6}{6} n^3 + \frac{6}{6} n^2(n+1) + \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{1}{6} n \{ 6n^3 + 6n^2(n+1) + (n+1)(2n+1) \}$$

$$= \frac{1}{6} n \{ 6n^3 + (6n^3 + 6n) + (2n^2 + 3n + 1) \}$$

$$= \frac{1}{6} n (14n^3 + 9n + 1)$$

$$= \frac{1}{6} n (7n+1)(2n+1)$$

87

$$(\lim) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} n(7n+1)(2n+1)}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6} (7n+1)(2n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{7n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(\frac{7n}{n} + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(7 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (7+0)(2+0) = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2}{1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2}$$

$$(\text{Ans}) = (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (2n)^2$$

$$= (n+1)^2 + (n+2)^2 + \dots + (n+2n)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (n+k)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (n^2 + 2kn + k^2)$$

$$= n^2 \sum_{k=1}^{2n} 1 + 2n \sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} k^2$$

$$= n^2 \cdot (2n) + 2n \cdot \frac{1}{2} (2n) \{ (2n)+1 \}$$

$$+ \frac{1}{6} (2n) \{ (2n)+1 \} \{ 2(2n)+1 \}$$

$$= 2n^3 + 2n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+1) + \frac{1}{6} 2n(2n+1)(4n+1)$$

$$= 2n^3 + 2n^2(2n+1) + \frac{1}{3} n(2n+1)(4n+1)$$

$$= \frac{1}{3} n \{ 6n^2 + 6n(2n+1) + (2n+1)(4n+1) \}$$

$$= \frac{1}{3} n (6n^2 + 12n^2 + 6n + 8n^2 + 6n + 1)$$

$$= \frac{1}{3} n (26n^2 + 12n + 1) \dots \textcircled{1}$$

$$(\text{Ans}) = 1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2$$

$$\frac{1}{6} + 2n \sqrt{12} \approx 40$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} k^2$$

$$= \frac{1}{6} (2n) \{ (2n)+1 \} \{ 2(2n)+1 \}$$

$$= \frac{1}{3} n(2n+1)(4n+1) \dots \textcircled{2}$$

①② Ans

$$\left(\frac{\textcircled{1}}{\textcircled{2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} n (26n^2 + 12n + 1)}{\frac{1}{3} n(2n+1)(4n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26n^2 + 12n + 1}{(2n+1)(4n+1)}$$

$$(\text{Ans}) = \frac{\sum n^2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{26n^2}{n^2} + \frac{12n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{4n+1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{26 + \frac{12}{n} + \frac{1}{n^2}}{(2 + \frac{1}{n})(4 + \frac{1}{n})}$$

$$= \frac{26 + 0 + 0}{(2+0)(4+0)}$$

$$= \frac{26}{2 \cdot 4} = \frac{13}{4}$$

3

(1)

$$\cos n\theta = 1$$

$$-1 \leq \cos n\theta \leq 1 \text{ が成り立つ。}$$

$$2n-1 = 1 \text{ となる } n \text{ は存在しない}$$

$$-1+1 \leq \cos n\theta + 1 \leq 1+1$$

$$0 \leq \cos n\theta + 1 \leq 2$$

$$2n-1 \text{ は } n \text{ の } 2 \text{ 倍より大きい}$$

$$\frac{0}{n} \leq \frac{\cos n\theta + 1}{n} \leq \frac{2}{n}$$

$$> 0$$

$$0 \leq \frac{\cos n\theta + 1}{n} \leq \frac{2}{n}$$

$$\text{が成り立つ。}$$

$$= 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$f) \text{ は } 1 \text{ より大きい } n \text{ の } 2 \text{ 乗より大きい}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta + 1}{n} = 0$$

(2)

$$(-1)^n \text{ は } -1 \text{ と } 1 \text{ の } 2 \text{ 種類の}$$

$$\text{値 (} n \text{ が } 2 \text{ の倍数なら } 1 \text{, 奇数なら } -1 \text{) を取る。}$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$\text{が成り立つ。 } 2n-1 = n \text{ となる } n \text{ は存在しない}$$

$$n-1 \leq n+(-1)^n \leq n+1$$

$$2n-1 \text{ は } 2n \text{ の } 2 \text{ 倍より小さい}$$

$$\frac{n-1}{2n} \leq \frac{n+(-1)^n}{2n} \leq \frac{n+1}{2n}$$

$$= 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n} + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$$

$$n \text{ は } 1 \text{ より大きい } n \text{ の } 2 \text{ 乗より大きい}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{2n} = \frac{1}{2}$$

4

$$\sqrt[3]{(n^3-n^2)^2} - 2n\sqrt[3]{n^3-n^2} + n^2$$

1=7117. $n^3 - n^2 = 0 \text{ y } x_1 < 2$

$$\sqrt[3]{a^2} - 2n\sqrt[3]{a} + n^2$$

$$= (\sqrt[3]{a})^2 - 2n\sqrt[3]{a} + n^2$$

$$= (\sqrt[3]{a} - u)^2$$

2783. 4.7

$$(f, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{(n^3 - n^2)^2 - 2n^3(n^3 - n^2 + n^2)} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 - n} - n \right)^2 \dots (*)$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n = 7. \quad \sqrt[n]{n^3 - n^2} - n = 7.117.$$

再度 $h^3 - h^2 = a$ とおく。③(7).

$$\sqrt[3]{a - n}$$

$$(= 747. \text{ } \frac{1}{\lambda f} \cdot \frac{1}{\lambda f}) =$$

$$(\sqrt[3]{a})^2 + h \sqrt[3]{a} + h^2$$

८ का। १३. व३८

$$\sqrt[3]{a} - n$$

$$= (\sqrt[3]{a} - n) \cdot \frac{(\sqrt[3]{a})^2 + n\sqrt[3]{a} + n^2}{(\sqrt[3]{a})^2 + n\sqrt[3]{a} + n^2}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{a})^3 - n^3}{(\sqrt[3]{a})^2 + n^3\sqrt[3]{a} + n^2}$$

$$= \frac{a - n^3}{(\sqrt[3]{a})^2 + n\sqrt[3]{a} + n^2} \quad \{7\pm\}$$

よ、7 Q 4 6 2 1 2

$$\frac{(n^3 - n^2) - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2}$$

$$= \frac{-n^2}{(\sqrt[3]{n^3-n^2})^2 + n\sqrt[3]{n^3-n^2} + n^2}$$

$(\hat{n}_3, \hat{n}_5) \in n^2 \cdot \frac{1}{2} \mathbb{Z}^2$

$$\frac{-1}{\frac{(\sqrt[3]{n^3-n^2})^2}{n^2} + \frac{\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n} + 1}$$

$$= \frac{-1}{\left(\frac{\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n}\right)^2 + \frac{\sqrt[3]{n^3-n^2}}{n} + 1} \dots (\star)$$

$$x^2 - 30x + 31 = 3 \text{ 乗根の性質より}$$

$$\frac{\sqrt[3]{n^3 - n^2}}{n} = \sqrt[3]{\frac{n^3 - n^2}{n^3}} = \sqrt[3]{\frac{n^2}{n^3} - \frac{n^2}{n^3}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}$$

ヒトの心.

$$(A) = \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{n}}\right)^2 + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n}} + 1}$$

$$f''), \quad (\psi) = \{t, \lambda, 17\}.$$

$$(f^{-1})' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} \right)^2 + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + 1} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{-1}{\sqrt[3]{1-0} + \sqrt[3]{1-0} + 1} \right\}^2$$

$$= \left(\frac{-1}{\frac{1}{3}} \right)^2 = \left(-\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

5

332 (7.2.1) 12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + 2n + 3}) = 3$$

$$(\text{7.2.1}) \cdot (\text{7.2.1}) = \sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}$$

332 12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an + 2} - \sqrt{n^2 + 2n + 3})(\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3})}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + an + 2})^2 - (\sqrt{n^2 + 2n + 3})^2}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + an + 2 - (n^2 + 2n + 3)}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an - 2n - 1}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2)n - 1}{\sqrt{n^2 + an + 2} + \sqrt{n^2 + 2n + 3}} = 3$$

(7.2.1) \cdot (7.2.1) = 332 12

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(a-2)n}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2 + an + 2}}{n} + \frac{\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n}} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2) - \frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2 + an + 2}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2}}} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-2) - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}} = 3$$

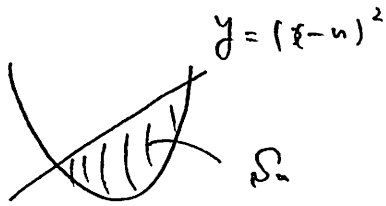
$$\begin{aligned} (7.2.1) &= \frac{(a-2) - 0}{\sqrt{1+0+0} + \sqrt{1+0+0}} \\ &= \frac{a-2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} \\ &= \frac{a-2}{2} \end{aligned}$$

332 12

$$\frac{a-2}{2} = 3$$

$$\therefore a = 8$$

6



$$y = x$$

$$y = (x-u)^2$$

直線 $y = x$ の交点 α, β を求める。

これは、次の通り。

$$(x-u)^2 = x$$

これを整理すると、

$$x^2 - (2u+1)x + u^2 = 0$$

$$\therefore x^2 - (2u+1)x + u^2 = 0 \dots \dots \textcircled{1}$$

これは、(4) の 2, 3 の項から、 α, β を求める。

($\alpha < \beta$) とする。①より、解は次の通り。

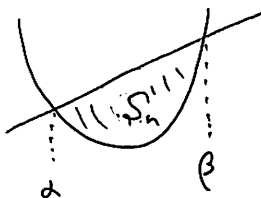
$$x = \frac{2u+1 \pm \sqrt{(2u+1)^2 - 4u^2}}{2}$$

$$= \frac{2u+1 \pm \sqrt{4u+1}}{2}$$

すなわち、

$$\alpha = \frac{2u+1 - \sqrt{4u+1}}{2}, \quad \beta = \frac{2u+1 + \sqrt{4u+1}}{2} \dots \textcircled{2}$$

したがって、



すなわち、 $S_n = \dots$

$$S_n = \int_{\alpha}^{\beta} \{x - (x-u)^2\} dx$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \{-x^2 + (2u+1)x - u^2\} dx$$

$$= - \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (2u+1)x + u^2\} dx \dots \textcircled{3}$$

これは、(4) の 1, 2 の項から、

① の 1, 2 の項から、 α, β を用いて、

次の通り。

$$\textcircled{3} = - \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx \dots \textcircled{4}$$

$$= - \left(-\frac{1}{6}\right) (\beta-\alpha)^3$$

$$= \frac{1}{6} (\beta-\alpha)^3 \dots \textcircled{5}$$

②より、 $\beta - \alpha = \sqrt{4u+1}$ より、④より、

$$S_n = \frac{1}{6} (\sqrt{4u+1})^3$$

$$= \frac{1}{6} (4u+1)^{\frac{3}{2}} \dots \textcircled{6}$$

これは、次の通り。

$$\frac{S_n}{n^p} = \frac{1}{6} \cdot \frac{(4u+1)^{\frac{3}{2}}}{n^p} \dots \textcircled{7}$$

すなわち、

$$n^p = n^{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}} \text{ と } \textcircled{6} \text{ より}$$

$$\frac{S_n}{n^p} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{4u+1}{n^{\frac{3}{2}p}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{4u}{n^{\frac{3}{2}p}} + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}p}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{6} \left(4 \cdot n^{1-\frac{3}{2}p} + n^{-\frac{3}{2}p} \right)^{\frac{3}{2}} \dots \textcircled{8}$$

したがって、

$$n^{1-\frac{2}{3}p} (=?)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\frac{2}{3}p} = \begin{cases} \infty & (1-\frac{2}{3}p > 0) \\ 1 & (1-\frac{2}{3}p = 0) \\ 0 & (1-\frac{2}{3}p < 0) \end{cases}$$

つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1-\frac{2}{3}p} = \begin{cases} \infty & (p < \frac{3}{2}) \\ 1 & (p = \frac{3}{2}) \\ 0 & (p > \frac{3}{2}) \end{cases} \quad (8)$$

が成り立つ。⑧が成り立つ。 $n^{-\frac{2}{3}p} (=?)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{2}{3}p} = \begin{cases} \infty & (-\frac{2}{3}p > 0) \\ 1 & (-\frac{2}{3}p = 0) \\ 0 & (-\frac{2}{3}p < 0) \end{cases}$$

つまり

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-\frac{2}{3}p} = \begin{cases} \infty & (p < 0) \\ 1 & (p = 0) \\ 0 & (p > 0) \end{cases} \quad (9)$$

⑧⑨が成り立つ。⑧⑨が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4n^{1-\frac{2}{3}p} + n^{-\frac{2}{3}p}) = \begin{cases} \infty & (p < \frac{3}{2}) \\ 4 & (p = \frac{3}{2}) \\ 0 & (p > \frac{3}{2}) \end{cases}$$

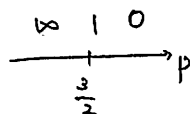
が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4n^{1-\frac{2}{3}p} + n^{-\frac{2}{3}p}) = \begin{cases} \infty + \infty & (p < 0) \\ \infty + 1 & (p = 0) \\ \infty + 0 & (0 < p < \frac{3}{2}) \\ 4 \cdot 1 + 0 & (p = \frac{3}{2}) \\ 4 \cdot 0 + 0 & (p > \frac{3}{2}) \end{cases}$$

L が ∞ である。 L が 0 である。

⑧⑨が成り立つ。

$$p = \frac{3}{2}$$



⑧⑨が成り立つ。 L が

⑧⑨

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} (4n^0 + n^{-1})^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} (4 + 0)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 4^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot (2^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

⑧⑨

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \alpha \pi}{n \alpha \pi} (=?)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \cdot (\text{分子の次数}) > (\text{分母の次数}) \\ & \Rightarrow \infty \\ & \cdot (\text{分子の次数}) = (\text{分母の次数}) \\ & \Rightarrow 0 \text{ である有限値} \\ & \cdot (\text{分子の次数}) < (\text{分母の次数}) \\ & \Rightarrow 0 \end{aligned} \right.$$

⑧⑨

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k = \begin{cases} \infty & (k > 0) \\ 1 & (k = 0) \\ 0 & (k < 0) \end{cases}$$

$$(k < 0 \text{ のときは } n^{-1} = \frac{1}{n}, n^{-2} = \frac{1}{n^2})$$

⑧⑨

7

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 5^n}{2^n + 5^n}$$

नियत नियम से 5^n का अंश

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{5^n} - \frac{5^n}{5^n}}{\frac{2^n}{5^n} + \frac{5^n}{5^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$$

नियत नियम से 3^n का अंश

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{3^n} - \frac{2^{n+1}}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n} + \frac{2^n}{3^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2 \cdot \frac{2^n}{3^n}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3} - 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\frac{1}{3} - 0}{1 + 0} = \frac{1}{3}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (-2)^{n+1} - 3^{n+1} \right\}$$

3^n का अंश 3^n का अंश 3^n का अंश 3^n का अंश

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ \frac{(-2)^{n+1}}{3^n} - \frac{3^{n+1}}{3^n} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ \frac{(-2)^{n+1}}{3^n} - 3 \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \left\{ -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n - 3 \right\} = -\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $-0-3=-3$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n - (-2)^n}{3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(-4)^n}{3^n} - \frac{(-2)^n}{3^n} \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(-\frac{4}{3}\right)^n - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right\}$$

$\downarrow$
 0

$\therefore$ नियत नियम से

(5)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-3)^n - (-2)^n}$$

नियत नियम से $(-3)^n$ का अंश

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-2)^n}{(-3)^n} + \frac{3^n}{(-3)^n}}{\frac{(-3)^n}{(-3)^n} - \frac{(-2)^n}{(-3)^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \left(-\frac{3}{3}\right)^n}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0 + (-1)^n}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

$\therefore$ नियत नियम से

(6)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{2n+1} - 3^{n+1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2^1 \cdot 2^{2n} - 3^1 \cdot 3^n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \cdot (2^2)^n - 3 \cdot 3^n \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot 4^n - 3 \cdot 3^n \right)$$

4^n का अंश 4^n का अंश 4^n का अंश

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(\frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{3^n}{4^n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left\{ \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} = \infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 ∞ $\frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

[8]

(1) 数学的帰納法で示す。

$$2^n \geq n^2 - n + 2 \quad (A)$$

示す。

(I) $n=2$ の時

$$(\text{左辺}) = 2^2 = 4$$

$$(\text{右辺}) = 2^2 - 2 + 2$$

$$= 4$$

よって (A) は成り立つ。

(II) $n=k$ の時、(A) が成り立つと仮定する。

(仮定) $(k \geq 2)$

示す。

$$2^k \geq k^2 - k + 2 \quad \dots (*)$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ $n=k+1$ の時も成り立つ。

(左辺) - (右辺)

$$= 2^{k+1} - \{ (k+1)^2 - (k+1) + 2 \}$$

$$= 2 \cdot 2^k - \{ (k+1)^2 - (k+1) + 2 \}$$

$$\geq 2(k^2 - k + 2) - \{ (k+1)^2 - (k+1) + 2 \}$$

(*)より

$$= 2k^2 - 2k + 4 - (k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 2)$$

$$= 2k^2 - 2k + 4 - k^2 - 2k - 1 + k + 1 - 2$$

$$= k^2 - 3k + 2 \quad \dots (**)$$

$$= \left(k - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq 0 \quad \left(\begin{array}{c} k \geq 2 \text{ の時} \\ \frac{3}{2} \leq k \end{array} \right)$$

よって $n=k+1$ の時も (A) は成り立つ。

以上より $n \geq 2$ のとき成り立つ。

自然数 $n=1$ の時

(A) は成り立つ。

おまけ

(*) $n=2$ の時、 $k \geq 2$ の時

$$k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) \geq (2-1)(2-2) = 0$$

よって成り立つ。

(2) (1) の結果を用いて

$$2^n \geq n^2 - n + 2$$

が成り立つ。よって、逆を示す。

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2 - n + 2}$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2^n}$ は正の数。

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n^2 - n + 2}$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ $\frac{1}{2^n}$ は正の数。

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2 - n + 2} \quad \dots (***)$$

が成り立つ。示す。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 - n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{0}{1 - 0 + 0} = 0$$

よって (***) は成り立つ。

以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0 \quad \text{が成り立つ。}$$

(14-3)

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{n^2 - n + 2}$$

$\downarrow$
0

(31) (1) が単独で出題 ± 47 = 47

$$2^n = (1+1)^n \text{ 上の 2項定理 による}$$

$$(1+1)^n = 1^n + nC_1 \cdot 1^{n-1} + nC_2 \cdot 1^{n-2} + \dots$$

よって、上式の「...」の部分には正の値がある。

「...」の部分を取り去ると、値は小さくなる。

つまり

$$(1+1)^n > 1^n + nC_1 \cdot 1^{n-1} + nC_2 \cdot 1^{n-2}$$

⇐ n の 2 番目の項
が「登場」する
= 2 がポイント!!

が成り立つ。整理して

$$2^n > 1 + n + \frac{1}{2}n(n-1)$$

$$\therefore 2^n > \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

逆算すると

$$\frac{1}{2^n} < \frac{2}{n^2 + n + 2}$$

両辺 n をかけると

$$\frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n^2 + n + 2}$$

すなわち、 $\frac{n}{2^n}$ は正の値になる。

$$0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2n}{n^2 + n + 2}$$

以下、本解と同様に「挟みうちの原理」

を用いて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ を得る。

9

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{r^n + 1}$$

• $|r| > 1$ (예) $r < -1, r > 1$

$$\frac{1}{r} \neq -1 < \frac{1}{r} < 1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{r^n}}{\frac{r^n}{r^n} + \frac{1}{r^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n} = \frac{2 \cdot 0}{1 + 0} = 0 \dots (1)$$

• $r = 1$ (예)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1^n + 1} = \frac{2}{1+1} = 1 \dots (2)$$

• $|r| < 1$ (예) $-1 < r < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{r^n + 1} = \frac{2}{0+1} = 2 \dots (3)$$

①②③ 정리

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{r^n + 1} = \begin{cases} 0 & (r < -1, r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 2 & (-1 < r < 1) \end{cases}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1}$$

• $|r| > 1$ (예) $r < -1, r > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^n}{r^n} - \frac{1}{r^n}}{\frac{r^n}{r^n} + \frac{1}{r^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n} \\ &= \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1 \dots (1) \end{aligned}$$

• $r = 1$ (예)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n - 1}{1^n + 1} \\ &= \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0 \dots (2) \end{aligned}$$

• $|r| < 1$ (예) $-1 < r < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \dots (3)$$

①②③ 정리

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 1}{r^n + 1} = \begin{cases} 1 & (r < -1, r > 1) \\ 0 & (r = 1) \\ -1 & (-1 < r < 1) \end{cases}$$

(3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2 + r^{n+1}}$$

• $|r| > 1$ (예) $r < -1, r > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2 + r^{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^n}{r^n}}{\frac{2}{r^n} + \frac{r^{n+1}}{r^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\left(\frac{1}{r}\right)^n + r} \\ &= \frac{1}{0 + r} = \frac{1}{r} \dots (1) \end{aligned}$$

• $r = 1$ (예)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2 + r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{2 + 1^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \dots (2)$$

• $|r| < 1$ の時 $(-1 < r < 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ 成り立つ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2+r^{n+1}} = \frac{0}{2+0} = 0 \dots (3)$$

①, ②, ③ 成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2+r^{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{r} & (r < -1, r > 1) \\ \frac{1}{3} & (r = 1) \\ 0 & (-1 < r < 1) \end{cases}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n+1}}$$

① 成り立つ r^n と 3^{n+1} のどちらが大きくなるか

r と 3 の大小関係で、どちらが大きくなるか

場合分けが必要

• $r > 3$ の時

①, ②, ③ 成り立つ r^n と 3^{n+1} のどちらが大きくなるか

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^{n+1}}{r^n} - \frac{3^{n+1}}{r^n}}{\frac{r^n}{r^n} + \frac{3^{n+1}}{r^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - \frac{3 \cdot 3^n}{r^n}}{1 + \frac{3 \cdot 3^n}{r^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r - 3 \left(\frac{3}{r}\right)^n}{1 + 3^{-1} \left(\frac{3}{r}\right)^n}$$

$$\Rightarrow r > 3 \text{ 成り立つ } \frac{3}{r} < 1$$

成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{r}\right)^n = 0 \text{ 成り立つ}$$

④ 成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{-1} - 3 \left(\frac{3}{r}\right)^n}{1 + 3^{-1} \left(\frac{3}{r}\right)^n} = \frac{r^{-1} - 0}{1 + 0} = r^{-1} = \frac{1}{r} \dots (1)$$

• $r = 3$ の時

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^{n+1}}$$

$$(\text{分子}) = 3^{n+1} - 3^{n+1}$$

$$= 3^{-1} \cdot 3^n - 3 \cdot 3^n$$

$$= (3^{-1} - 3) \cdot 3^n = \left(\frac{1}{3} - 3\right) \cdot 3^n = -\frac{8}{3} \cdot 3^n$$

$$(\text{分母}) = 3^n + 3^{n+1}$$

$$= 3^n + 3^{-1} \cdot 3^n$$

$$= (1 + 3^{-1}) \cdot 3^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot 3^n = \frac{4}{3} \cdot 3^n$$

⑤ 成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{8}{3} \cdot 3^n}{\frac{4}{3} \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2) = -2 \dots (2)$$

• $0 < r < 3$ の時

①, ②, ③ 成り立つ r^n と 3^{n+1} のどちらが大きくなるか

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r^{n+1}}{3^n} - \frac{3^{n+1}}{3^n}}{\frac{r^n}{3^n} + \frac{3^{n+1}}{3^n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{-1} \cdot \frac{r^n}{3^n} - 3^1}{\left(\frac{r}{3}\right)^n + 3^{-1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{-1} \left(\frac{r}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{r}{3}\right)^n + 3^{-1}}$$

$$\Rightarrow 0 < r < 3 \text{ 成り立つ } 0 < \frac{r}{3} < 1$$

⑥ 成り立つ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{3}\right)^n = 0$ 成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{-1} \left(\frac{r}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{r}{3}\right)^n + 3^{-1}} = \frac{0 - 3}{0 + 3^{-1}} = \frac{-3}{\frac{1}{3}} = -9$$

⑦ 成り立つ ①, ②, ③ 成り立つ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} - 3^{n+1}}{r^n + 3^{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{r} & (r > 3) \\ -2 & (r = 3) \\ -9 & (0 < r < 3) \end{cases}$$

10

$$(1) \{ (x^2 - 4x)^n \}$$

ここで $x^2 - 4x$ の値域を求めよう

グラフを書くと

$$-1 < x^2 - 4x \leq 1$$

より

$$\begin{cases} x^2 - 4x > -1 \cdots ① \\ x^2 - 4x \leq 1 \cdots ② \end{cases}$$

②の範囲は $x = 2 \pm \sqrt{5}$ である。

よって ①より

$$x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ より } x = 2 \pm \sqrt{3}$$

よって ①の範囲は

$$x < 2 - \sqrt{3}, x > 2 + \sqrt{3} \cdots ③$$

$$② \text{ より } x^2 - 4x - 1 \leq 0$$

$$x^2 - 4x - 1 = 0 \text{ より } x = 2 \pm \sqrt{5}$$

よって ②の範囲は

$$2 - \sqrt{5} \leq x \leq 2 + \sqrt{5} \cdots ④$$

③④の範囲を求めよう

$$2 - \sqrt{5} \leq x < 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} < x \leq 2 + \sqrt{5}$$

また

$$2 - \sqrt{5} < x < 2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{5}$$

の範囲は

$$-1 < x^2 - 4x < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 - 4x)^n = 0$$

よって

$$x = 2 \pm \sqrt{5} \text{ のときは } x^2 - 4x = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 - 4x)^n = 1$$

1/15

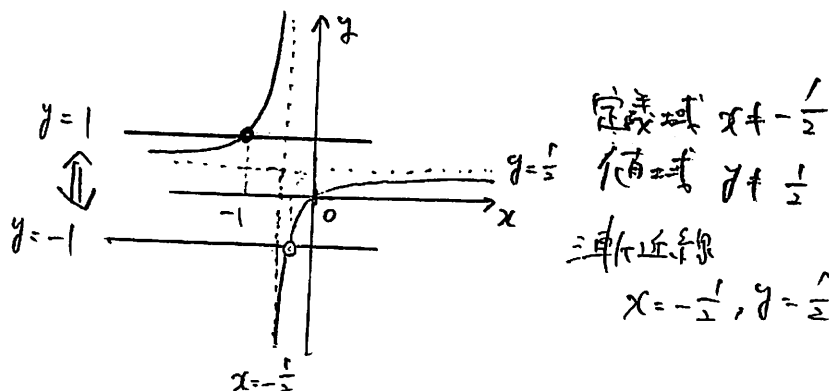
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^2 - 4x)^n = \begin{cases} 0 & (2 - \sqrt{5} < x < 2 - \sqrt{3}) \\ & (2 + \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{5}) \\ 1 & (x = 2 \pm \sqrt{5}) \end{cases}$$

(2)

$$\left\{ \left(\frac{x}{1+2x} \right)^n \right\}$$

$$y = \frac{x}{1+2x} \text{ のグラフを求めよう}$$

$$y = \frac{x}{1+2x} = \frac{\frac{1}{2}(2x+1) - \frac{1}{2}}{1+2x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x+1}$$



$$\text{また } y = 1 \text{ と交点がある。 } \frac{x}{1+2x} = 1 \therefore x = -1$$

$$y = -1 \text{ と交点がある。 } \frac{x}{1+2x} = -1 \therefore x = -\frac{1}{3}$$

(したがって、グラフを書くと)

$$-1 < \frac{x}{1+2x} \leq 1$$

より、 x の範囲を求めよう

$$x \leq -1, -\frac{1}{3} < x$$

また、 $x < -1$ のときは

$$x < -1, -\frac{1}{3} < x \text{ のときは}$$

$$-1 < \frac{x}{1+2x} < 1$$

$$\text{より } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+2x} \right)^n = 0$$

$$\text{よって } x = -1 \text{ のときは } \frac{x}{1+2x} = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+2x} \right)^n = 1$$

1. $\downarrow x \in F$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+2x} \right)^n = \begin{cases} 0 & (x < -1, -\frac{1}{2} < x) \\ 1 & (x = -1) \end{cases}$$

(3)

$$\left\{ \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^n \right\}$$

収束する条件は

$$-1 < \frac{3x}{x^2+2} \leq 1 \dots (*)$$

そこで、分母の x^2+2 は

x がどんな値でも必ず正の数

なので、(*)は x^2+2 を消して

$$-(x^2+2) < 3x \leq x^2+2$$

よって連立不等式

$$\begin{cases} -(x^2+2) < 3x \dots ① \\ 3x \leq x^2+2 \dots ② \end{cases}$$

①を解く。①より

$$-x^2-2 < 3x$$

$$x^2+3x+2 > 0$$

$$\therefore (x+1)(x+2) > 0$$

$$\text{よって } x < -2, x > -1 \dots ③$$

②より

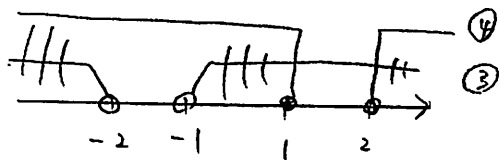
$$3x \leq x^2+2$$

$$x^2-3x+2 \geq 0$$

$$\therefore (x-1)(x-2) \geq 0$$

$$\text{よって } x \leq 1, x \geq 2 \dots ④$$

③④より、求める範囲は



$$x < -2, -1 < x < 1, 2 \leq x$$

また、③、④より

$$x < -2, -1 < x < 1, 2 < x$$

の時は

$$-1 < \frac{3x}{x^2+2} < 1$$

収束するから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^n = 0$$

また、 $x = 1, 2$ の時は

$$\frac{3x}{x^2+2} = 1 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^n = 1$$

以上より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{x^2+2} \right)^n = \begin{cases} 0 & (x < -2, -1 < x < 1, x \geq 2) \\ 1 & (x = -1, 2) \end{cases}$$

⑤ (2) は分母の $1+2x$ の

正負によらず、場合分けして

（これもいい。分母が必ず

正でなく分母が負の場合、(3) のように

絶対値を分母で消す、これもいい。

(1)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

$$f(x) \propto x^n + 1 \quad (n \geq 1)$$

$$x = -1 \text{ と } x = 1$$

$$(-1)^n + 1 \text{ と } 1 \neq 0$$

奇数 n のとき 0 となる

$$(-1)^n + 1 \text{ は } 0 \text{ と } 1 \neq 0$$

$f(x)$ は定義 ± 1 となる

ただし $f(x) \propto$ 定義 ± 1 は $x \neq -1$

$$(I) |x| > 1 \text{ とき } x < -1, x > 1 \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \text{ と } x > 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^n}{x^n} - \frac{1}{x^n}}{\frac{x^n}{x^n} + \frac{1}{x^n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \end{aligned}$$

$$(II) x = 1 \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$(III) |x| < 1 \text{ とき } -1 < x < 1 \text{ のとき}$$

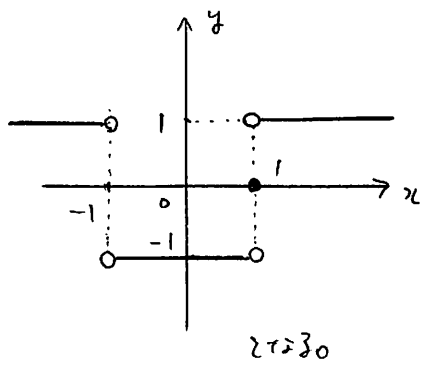
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ と } x > 1 \text{ のとき}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

以上 (I)(II)(III) より

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x < -1, x > 1) \\ 0 & (x = 1) \\ -1 & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

ただし $y = f(x)$ のグラフは



(2)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1}$$

$$f(x) = 1 \text{ と } x = 1$$

$$x^{2n} + 1 = (x^n)^2 + 1$$

$(2\frac{1}{2}) + 1$ の形になる

よって $f(x) = 1$ と $x = 1$

よって $f(x) = 1$ と $x = 1$

x は正数 (1) のとき

$f(x)$ の定義は $x = 1$ と $x = 1$ のとき

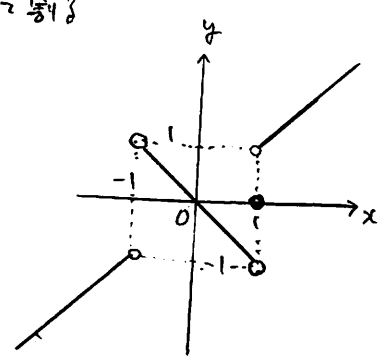
$$(I) |x| > 1 \text{ とき } x < -1, x > 1 \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \text{ と } x > 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} - \frac{x}{x^{2n}}}{\frac{x^{2n}}{x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - \left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} \\ &= \frac{x-0}{1+0} = x \end{aligned}$$

$$(II) x = 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} - 1}{1^{2n} + 1} \\ &= \frac{1-1}{1+1} = 0 \end{aligned}$$



$$(III) x = -1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} - (-1)}{(-1)^{2n} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) - (-1)}{1 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(IV) |x| < 1 \text{ とき}$$

$$-1 < x < 1 \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ と } x > 1 \text{ のとき}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} - x}{x^{2n} + 1} \\ &= \frac{0-x}{0+1} = -x \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} x & (x < -1, x > 1) \\ 0 & (x = 1) \\ -x & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

[2]

$$(1) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n - 3 \end{cases}$$

特異な方程式を
 $a = 2a - 3$

$$a = 2a - 3$$

$$\therefore a = 3$$

特異な方程式を
 $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

$$a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$$

と変換すると、数列 $\{a_n - 3\}$ は

$$初項 $a_1 - 3 = 1 - 3 = -2$$$

公比 2 の等比数列となる

$$a_n - 3 = (-2) \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n - 3 = -2^n$$

よって

$$a_n = -2^n + 3$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-2^n + 3) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left\{ -1 + 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ &\quad \infty \quad \quad -1+0=-1 \\ &= -\infty \end{aligned}$$

$$(2) \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{4n^2 - 1} \end{cases}$$

特異な方程式を、数列 $\{a_n\}$ の

$$階差数列 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$$$

と変換

$n \geq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{4k^2 - 1}$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= 3 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-3} - \frac{1}{2n-1} \right)$$

$$= 3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right) \dots (*)$$

$n=1$ のとき (*) は成立する

$$3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 1 - 1} \right) = 3 + \frac{1}{2} (1 - 1) = 3$$

$$\therefore a_1 = 3 \text{ である}$$

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right) \right\} \\ &= 3 + \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$(3) \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \end{cases}$$

特異な方程式を、 a_n と a_{n+1} の関係から $a_n > 0$

と仮定して、 $\log_2$ をとると、 $\log_2 a_{n+1} = \log_2 2\sqrt{a_n}$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{a_n}$$

$$\therefore \log_2 a_{n+1} = \log_2 2 + \log_2 \sqrt{a_n}$$

$$\therefore \log_2 a_{n+1} = 1 + \log_2 a_n^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \log_2 a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} \log_2 a_n$$

$$b_n = \log_2 a_n \text{ とおくと } b_{n+1} = \log_2 a_{n+1} \text{ となる}$$

$$\text{すなわち } b_1 = \log_2 a_1 = \log_2 1 = 0$$

よって $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + 1 \end{cases}$$

1 は、7 定義より $\{b_n\}$ は

$$d = \frac{1}{2} d + 1 \quad \therefore d = 2$$

よって

$$b_{n+1} - 2 = \frac{1}{2} (b_n - 2)$$

と変換すると、 $\{b_n - 2\}$ は

$$b_n - 2 = (b_1 - 2) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n - 2 = (0 - 2) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{ となり } b_n = 2 - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \log_2 a_n \text{ より } a_n = 2^{b_n} \text{ となる}$$

$$a_n = 2^{2 - 2(\frac{1}{2})^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{2 - 2(\frac{1}{2})^{n-1}} \\ &= 2^{-0} \\ &= 2^2 = \underline{4} \end{aligned}$$

(4)

$$a_2 = \frac{2}{3-a_1} = \frac{2}{3-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{7}{3}} = \frac{6}{7}$$

$$a_3 = \frac{2}{3-a_2} = \frac{2}{3-\frac{6}{7}} = \frac{2}{\frac{15}{7}} = \frac{14}{15}$$

$$a_4 = \frac{2}{3-a_3} = \frac{2}{3-\frac{14}{15}} = \frac{2}{\frac{31}{15}} = \frac{30}{31}$$

$$a_5 = \frac{2}{3-a_4} = \frac{2}{3-\frac{30}{31}} = \frac{2}{\frac{61}{31}} = \frac{62}{61}$$

よって

$$\{a_n\} = \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{10}{7}, \frac{18}{11}, \dots$$

初項は(6)より1, 数値が大きくなる

と予想される。また、 $\{a_n\}$ は単調

$$\underbrace{2, 3, 5, 9, 17, \dots}_{1, 2, 4, 8}$$

より、公差数列の一般項が 2^{n-1}

である。

$$2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1}$$

$$= 2 + \frac{1 \cdot (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^{n-1} + 1$$

と予想される。これは $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{2^{n-1} + 2}{2^{n-1} + 1}$$

と予想される。これは数学的帰納法

で証明する。

(I) $n=1$ のとき

$$(左辺) = a_1 = \frac{3}{2}$$

$$(右辺) = \frac{2^0 + 2}{2^0 + 1} = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

よって成立する。

(II) $n=k$ のとき成立すると仮定する

すなわち

$$a_k = \frac{2^{k-1} + 2}{2^{k-1} + 1} \dots (*)$$

と仮定。 $n=k+1$ のとき

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2}{3-a_k} \quad (*) \text{より} \\ &= \frac{2}{3 - \frac{2^{k-1} + 2}{2^{k-1} + 1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\frac{3(2^{k-1} + 1) - (2^{k-1} + 2)}{2^{k-1} + 1}}$$

$$= \frac{2(2^{k-1} + 1)}{3 \cdot 2^{k-1} + 3 - 2^{k-1} - 2}$$

$$= \frac{2^k + 2}{(3-1) \cdot 2^{k-1} + 1}$$

$$= \frac{2^k + 2}{2 \cdot 2^{k-1} + 1}$$

$$= \frac{2^k + 2}{2^k + 1}$$

$$= \frac{2^{(k+1)-1} + 2}{2^{(k+1)-1} + 1}$$

よって $n=k+1$ のとき成立する。

以上より、 a_n の一般項は

$n=1$ のとき

$$a_n = \frac{2^{n-1} + 2}{2^{n-1} + 1}$$

より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n-1} + 2}{2^{n-1} + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{2}{2^{n-1}}}{\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (\frac{1}{2})^{n-2}}{1 + (\frac{1}{2})^{n-1}}$$

$$= \frac{1+0}{1+0} = \underline{1}$$

$$(1) \begin{cases} a_1 = 2, a_2 = 5 \\ a_{n+2} = \frac{1}{3}(2a_{n+1} + a_n) \end{cases}$$

特性方程式より

$$t^2 = \frac{1}{3}(2t+1)$$

$$\therefore 3t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$(3t+1)(t-1) = 0 \quad t = -\frac{1}{3}, 1$$

よって a_n は

$$\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n) \dots (I) \\ a_{n+2} + \frac{1}{3}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n \dots (II) \end{cases}$$

と2通りある。まず (I) から

(I) から

数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は

$$\text{初項 } a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$$

公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。

$$a_{n+1} - a_n = 3 \cdot (-\frac{1}{3})^{n-1} \dots (1)$$

(II) から

数列 $\{a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n\}$ は

$$\text{初項 } a_2 + \frac{1}{3}a_1 = 5 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{17}{3}$$

公比 1 の等比数列である。

$$a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n = \frac{17}{3} \cdot 1^{n-1}$$

よって

$$a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n = \frac{17}{3} \dots (2)$$

すなわち $(1) - (2)$ より

$$a_{n+1} - a_n = 3(-\frac{1}{3})^{n-1}$$

$$\begin{aligned} -) \quad a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n &= \frac{17}{3} \\ \hline -\frac{4}{3}a_n &= 3(-\frac{1}{3})^{n-1} - \frac{17}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = -\frac{4}{9}(-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{17}{9}$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\frac{4}{9}(-\frac{1}{3})^{n-1} + \frac{17}{9} \right\}$$

$$= 0 + \frac{17}{9} = \underline{\frac{17}{9}}$$

13

$$\begin{cases} (i) & a_1 = 1 \\ (ii) & a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \end{cases}$$

漸化式より、 a_n は自然数に収束する。

$a_n \geq 0$ が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - 2| &= |\sqrt{a_n + 2} - 2| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{a_n + 2} - 2)(\sqrt{a_n + 2} + 2)}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right| \\ &= \left| \frac{(\sqrt{a_n + 2})^2 - 2^2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right| \\ &= \left| \frac{a_n + 2 - 4}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right| \\ &= \left| \frac{a_n - 2}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \right| \dots (1) \end{aligned}$$

よって、 $\sqrt{a_n + 2} + 2$ は正の数である。

よって、(1) より

$$|a_{n+1} - 2| = \frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2} |a_n - 2| \dots (2)$$

よって、

$$\sqrt{a_n + 2} \geq 0 \dots (*)$$

よって、(2) より、両辺に 2 を加えると

$$\sqrt{a_n + 2} + 2 \geq 2$$

両辺の逆数を取ると、大小関係は

逆転する。

$$\frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2} \leq \frac{1}{2}$$

よって (2) より

$$\frac{1}{\sqrt{a_n + 2} + 2} |a_n - 2| \leq \frac{1}{2} |a_n - 2| \dots (3)$$

よって成り立つ。

(2), (3) より

$$|a_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2} |a_n - 2|$$

が成り立つ。

(4) 問題の不等式を証明できればよい。

$\sqrt{a_n + 2} = 0$ と仮定すると、 $\sqrt{a_n + 2}$ は

負になる。よって、 $\sqrt{a_n + 2} \geq 0$ と仮定

する。

(ii) (数学的帰納法)

(i) の結果で、 $n=1$ のとき成り立つ。

$$|a_1 - 2| \leq \frac{1}{2} |a_1 - 2| \dots (4)$$

が成り立つ。また、(i) の結果で、 $n=2$ のとき成り立つ。

$$|a_2 - 2| \leq \frac{1}{2} |a_2 - 2| \dots (5)$$

が成り立つ。よって、(5) の両辺に $\frac{1}{2}$ をかけると

$$\frac{1}{2} |a_2 - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_2 - 2| \dots (6)$$

が成り立つ。よって (4) と (6) より

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right) |a_{n-1} - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - 2|$$

より

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - 2| \dots (7)$$

よって、(7) より、(i) の結果で $n=3$ のとき成り立つ。

$$|a_3 - 2| \leq \frac{1}{2} |a_3 - 2| \dots (8)$$

よって (8) の両辺に $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ をかけると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_3 - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |a_3 - 2| \dots (9)$$

よって (7), (9) より

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |a_{n-3} - 2|$$

より

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |a_{n-3} - 2|$$

よって、以下、同様に繰り返すと

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2|$$

よって成り立つ。よって、 $a_1 = 1$ より

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |1 - 2|$$

$$\therefore |a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \dots (10)$$

証明. $|a_n - 2| \geq 0$ より (6) とおける

$$0 \leq |a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

が成り立つ。 $\therefore$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \quad \text{より}$$

(おさまりの原理) から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 2| = 0$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2) = 0$$

ゆえに

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 2 = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

(6) 漸化式の不等式版をみる。

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right) |a_{n-1} - 2|$$

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |a_{n-2} - 2|$$

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |a_{n-3} - 2|$$

$$|a_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |a_1 - 2|$$

注目するのは、 n の 2, 3, 4, ... に対して
 $n=1$ のときは、7 個の点がある。

(不等式をみる)

(2)

(i) 以下、 n の自然数 $n=1, 2, 3, \dots$

$$a_n > \sqrt{3}$$

を示す。

$n=1$ のときは問題より明らか。

$n=k$ のとき成り立つと仮定する。

$$\text{つまり } a_k > \sqrt{3}$$

が成り立つ。 $\therefore$ 漸化式より

$$a_{k+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left(a_k + \frac{3}{a_k}\right) - \sqrt{3}$$

$$= \frac{a_k^2 + 3 - 2\sqrt{3}a_k}{2a_k}$$

$$= \frac{(a_k - \sqrt{3})^2}{2a_k} \quad \dots (*)$$

より仮定より $a_k > \sqrt{3}$

より a_k は正の数

証明. $(a_k - \sqrt{3})^2 \geq 0$

正の数 a_k とする。

(*) より

$$a_{k+1} - \sqrt{3} > 0$$

$$\therefore a_{k+1} > \sqrt{3}$$

より $n=k+1$ のとき

成り立つ。

以上より

n の自然数 $n=1, 2, 3, \dots$

$$a_n > \sqrt{3}$$

が成り立つ。

(ii)

(i) の (*) より

n の自然数 $n=1, 2, 3, \dots$

$$a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{(a_n - \sqrt{3})^2}{2a_n}$$

が成り立つ。 $\therefore$

$$a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{2a_n} (a_n - \sqrt{3}) \quad \dots (**)$$

より $\therefore$

$$a_n - \sqrt{3} < a_n$$

が成り立つ。 $\therefore a_n$ は正の数

$$\frac{a_n - \sqrt{3}}{2a_n} < \frac{a_n}{2a_n}$$

$\therefore$

$$\frac{a_n - \sqrt{3}}{2a_n} < \frac{1}{2}$$

が成り立つ。 (7) より

(**) より

$$a_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{a_n - \sqrt{3}}{2a_n} (a_n - \sqrt{3})$$

$$< \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3})$$

より

$$a_{n+1} - \sqrt{3} < \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{3})$$

が成り立つ。

(iii)

(i) より $a_n > \sqrt{3}$ が

成り立つ。

$$0 < a_n - \sqrt{3}$$

が成り立つ。

証明. (ii) より

$$a_n - \sqrt{3} < \frac{1}{2} (a_{n-1} - \sqrt{3})$$

$$< \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (a_{n-2} - \sqrt{3})$$

$< \dots$

$$< \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3})$$

より

$$a_n - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3})$$

が成り立つ。

ゆえに

$$0 < a_n - \sqrt{3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3})$$

が成り立つ。

$\therefore$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - \sqrt{3}) = 0$$

より、おさまりの原理

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{3}) = 0$$

$\therefore$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{3} \quad //$$

14

$$(1) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots$$

部分和 \$S_n\$ とする

\$S_n\$ は \$n\$ 項加第 \$n\$ 項

次のように

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

よって、部分分数展開すると

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right)$$

よって、\$S\$ は

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right) = \frac{1}{3} (1 - 0) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

部分和 \$S_n\$ は \$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + 2k}\$ とする

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)}$$

と部分分数展開する

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+2)}$$

相殺

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

相殺

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

よって、\$S\$ は

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - 0 - 0 \right) = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

部分和 \$S_n\$ は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k})^2 - (\sqrt{k+1})^2}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{k - (k+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$+ (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= -\sqrt{1} + \sqrt{n+1} = \sqrt{n+1} - 1$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow \infty$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

(\$n\$ が \$\infty\$ のとき、無限級数は

発散する。

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + \frac{7}{4} + \dots + \frac{3n-2}{n+1} + \dots$$

この級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n+1}$ は一般項 $\frac{3n-2}{n+1}$ が

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n} - \frac{2}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{3-0}{1+0} = 3. \end{aligned}$$

よって、一般項が 0 に 42 ではない。

この無限級数は発散する。

(5)

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が 42 ではない} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \right]$$

が成り立つ。この命題の対偶は

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ が 42 ではない} \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \right]$$

よって

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する} \right]$$

で済む。

(15)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)
 \end{aligned}$$

부분和を S_n とおくと

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
 \end{aligned}$$

よって $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\
 &= 1 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(n+1)}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \uparrow \\
 \textcircled{+0} \quad \frac{n+1}{(n+1)!} &= \frac{n+1}{\cancel{(n+1)} \cdot \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}_{n!}}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right\}$$

部分和を S_n とおくと

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\
 &= \frac{1}{1!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
 &= 1 - \frac{1}{(n+1)!}
 \end{aligned}$$

よって $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

$$\begin{aligned}
 S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)!} \right\} \\
 &= 1 - 0 = 1
 \end{aligned}$$

$$(3) \quad \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{(n+1)(n+2)}$$

この式を n で割ると

両辺 $n(n+1)(n+2)$ をかけると

$$2 = a(n+2) + bn$$

$$\therefore 2 = (a+b)n + 2a$$

よって n の係数と定数項を比較すると

$$a+b=0, \quad 2a=2.$$

よって $a=1, b=-1$ とおくと

$$\text{よって} \quad \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

この式を n で割ると

部分和を S_n とおくと

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots$$

$$\dots + \left\{ \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

ゆえに 403 S4 332

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad \frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}} = \frac{a}{n2^n} + \frac{b}{(n+1)2^{n+1}}$$

2 乗の分母で分子は 2 乗。両辺に $n(n+1)2^{n+1}$ をかけると

$$n+2 = \frac{a}{n2^n} \cdot n(n+1)2^{n+1} + \frac{b}{(n+1)2^{n+1}} \cdot n(n+1)2^{n+1}$$

$$\therefore n+2 = a(n+1) \cdot \frac{2^{n+1}}{2^n} + bn$$

$$\therefore n+2 = a(n+1) \cdot 2 + bn$$

よって

$$n+2 = 2an + 2a + bn$$

$$\therefore n+2 = (2a+b)n + 2a$$

この式が n の恒等式となるため

$$\begin{cases} 2a+b=1 & (\text{係数比較}) \\ 2a=2 & (\text{定数項}) \end{cases}$$

$$\therefore a=1, b=-1$$

$$\text{よって } \frac{n+2}{n(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{n2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

と変換できる。部分分数分解 S_n を求めると

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+2}{k(k+1)2^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k \cdot 2^k} - \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 2^2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} \right)$$

$$+ \left(\frac{1}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{4 \cdot 2^4} \right) + \dots + \left\{ \frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

ゆえに 403 S4 332

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad \log_2 \left(1 + \frac{1}{n^2-1} \right)$$

$$= \log_2 \frac{n^2-1+1}{n^2-1}$$

$$= \log_2 \frac{n^2}{n^2-1}$$

$$= \log_2 \frac{n^2}{(n+1)(n-1)}$$

$$= \log_2 \frac{n}{\frac{n+1}{n-1}}$$

$$= \log_2 \frac{n}{n+1} - \log_2 \frac{n-1}{n}$$

よって 部分分数分解 S_n を求めると ($n \geq 2$)

$$S_n = \sum_{k=2}^n \log_2 \left(1 + \frac{1}{k^2-1} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^n \left(\log_2 \frac{k}{k+1} - \log_2 \frac{k-1}{k} \right)$$

$$= \left(\log_2 \frac{2}{3} - \log_2 \frac{1}{2} \right) + \left(\log_2 \frac{3}{4} - \log_2 \frac{2}{3} \right)$$

$$+ \left(\log_2 \frac{4}{5} - \log_2 \frac{3}{4} \right) + \dots + \left(\log_2 \frac{n}{n+1} - \log_2 \frac{n-1}{n} \right)$$

$$= \log_2 \frac{n}{n+1} - \log_2 \frac{1}{2}$$

ゆえに 403 S4 332

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_2 \frac{n}{n+1} - \log_2 \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_2 \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{n+1}} - \log_2 \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log_2 \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \log_2 \frac{1}{2} \right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{1+0} - \log_2 \frac{1}{2}$$

$$= \log_2 1 - \log_2 \frac{1}{2}$$

$$= 0 - \log_2 \frac{1}{2}$$

$$= -\log_2 \frac{1}{2}$$

$$= -(-1) = 1$$

16

(1)

級数 $\sum_{k=1}^n S_k$ を求めよ。

まず

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{2^k}$$

$$\textcircled{1} \left(\frac{2k+1}{2^k}\right) \times \left(\frac{1}{2^k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n (2k+1) \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad \leftarrow \text{の形}$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$S_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right) + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$- \frac{1}{2} S_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + (2n-1) \left(\frac{1}{2}\right)^n + (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{2} S_n = 3 \left(\frac{1}{2}\right) + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + 2 \left(\frac{1}{2}\right)^n - (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

初項 $2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 、公比 $\frac{1}{2}$ 、項数 $n-1$

の等比数列の和

$$\therefore \frac{1}{2} S_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \frac{1}{2}} - (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{\frac{1}{2}} - (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{2}\right) \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} - (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{3}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - (2n+1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \dots \textcircled{A}$$

$$= \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2n}{2^{n+1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \dots \textcircled{B}$$

$$\therefore \frac{1}{2} S_n = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

両辺 2 を掛ける

$$S_n = 5 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2n}{2^n} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} S_k$ を求めよ

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2n}{2^n} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right\}$$

$$= 5 - 0 - 0 - 0 = 5$$

$\textcircled{1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \text{ は } \textcircled{B} \text{ より } 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

$\textcircled{2}$

S_n は $(*)$ の形 $= 5 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{2n}{2^n} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$(*)$ より

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{n}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{n}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - 4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - \frac{n}{2^n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - \left\{ 4 + (2n+1) \right\} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{5}{2} - (2n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\therefore \frac{1}{2} S_n = \frac{5}{2} - (2n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

両辺を2倍して

$$S_n = 5 - (2n+5)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

4723.

(1)

部分和を S_n とする。

すると

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

より、

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

$$-) x S_n = x + 2x^2 + \dots + (n-1)x^{n-1} + nx^n$$

$$(1-x)S_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} - nx^n$$

初項1, 公比 x , 項数 n

の等比数列の和

(2)

$\therefore x$ は $|x| < 1$ と仮定する。 $\leftarrow x=1$

$$(1-x)S_n = \frac{1 \cdot (1-x^n)}{1-x} - nx^n$$

2項

12444

25315

$S_n = na$

1244

4723.

$\therefore$

$$(1-x)S_n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n \dots (3)$$

$x \neq 1$ のとき、両辺を $1-x$ で割ると

$$S_n = \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

4211: 21443403 S_n とする

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1-x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x} \right\}$$

317. $|x| < 1$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$$

また、問題より $\lim_{n \rightarrow \infty} nx^n = 0$ である。

$$S = \frac{1-0}{(1-x)^2} - \frac{0}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

おわり

(4) 12443

$$(1-x)S_n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n$$

$$= \frac{1-x^n - nx^n(1-x)}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^n - nx^n + nx^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x}$$

両辺を $1-x$ で割ると

$$S_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

4723.

17

(1)

初項1, 公比 $x^2 - x + 1$ の

無限等比級数

が収束する条件は

公比 $|x^2 - x + 1| < 1$

$$|x^2 - x + 1| < 1$$

が成り立つ x の範囲を求めよ。

この式は

$$-1 < x^2 - x + 1 < 1$$

より、不等式

$$\begin{cases} -1 < x^2 - x + 1 \dots (1) \\ x^2 - x + 1 < 1 \dots (2) \end{cases}$$

を満足する x の範囲を求めよ。

(1) より

$$x^2 - x + 1 > -1$$

$$\therefore x^2 - x + 2 > 0$$

$$\therefore x^2 - x + 2 = 0$$

を満足する x は

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2} \quad y = x^2 - x + 2$$

より、存在しない。

より、不等式の

を満足する x は、右図のように

である。

(2) より

$$x^2 - x + 1 < 1$$

$$\therefore x^2 - x < 0$$

$$x(x-1) < 0 \quad \therefore 0 < x < 1$$

よって (1)(2) より、両方を満足する x の値の範囲は

$$0 < x < 1$$

である。また、このとき、和 S は

$$S = \frac{\text{初項}}{1 - \text{公比}} = \frac{1}{1 - (x^2 - x + 1)}$$

$$= \frac{1}{1 - x^2 + x - 1}$$

$$= \frac{1}{x^2 - x}$$

(2)

$$x + \frac{x^2}{1+x} + \frac{x^3}{(1+x)^2} + \frac{x^4}{(1+x)^3} + \dots$$

$$= x + x \left(\frac{x}{1+x} \right) + x \left(\frac{x}{1+x} \right)^2 + x \left(\frac{x}{1+x} \right)^3 + \dots$$

初項 x , 公比 $\frac{x}{1+x}$ の無限等比級数

が収束する条件は

$$(I) \text{ 初項} = 0$$

$$(II) | \text{公比} | < 1$$

である。

(I) より

$$\text{初項} = x \text{ より、} x = 0$$

このとき、和 S は $0 + 0 + 0 + \dots$

$$\therefore S = 0$$

(II) より

$$\left| \frac{x}{1+x} \right| < 1$$

より

$$-1 < \frac{x}{1+x} < 1 \dots (1)$$

$$\therefore y = \frac{x}{1+x}$$

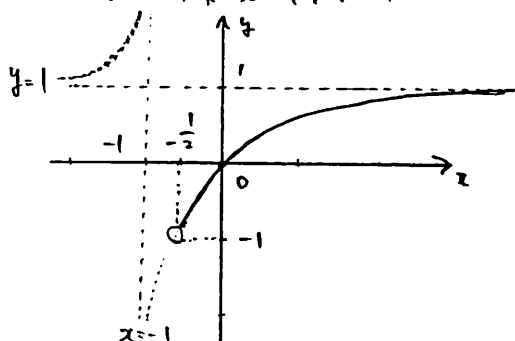
のグラフをかくと

$$y = \frac{x}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$$

定義域 $x \neq -1$

値域 $y \neq 1$

漸近線 $x = -1, y = 1$



$$\text{また、} y = 1 \text{ と } x = 1 \text{ は}$$

$$\text{存在する。} y = -1$$

$$\text{と } x = 1 \text{ は}$$

$$\frac{x}{1+x} = -1$$

$$\therefore x = -1 - x \quad \therefore x = -\frac{1}{2}$$

以上より、(1)より

(1)より、 $x = 0$ の範囲は

の範囲は

$$x > -\frac{1}{2}$$

である。よって、この範囲内

(1)の範囲を求めよ。

$x = 0$ を含む。

よって、(1)より範囲は

$$x > -\frac{1}{2}$$

また、和 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{\text{初項}}{1 - \text{公比}} = \frac{x}{1 - \frac{x}{1+x}} \\ &= \frac{x}{\frac{1+x-x}{1+x}} \\ &= \frac{x}{\frac{1}{1+x}} \\ &= x(1+x) = x + x^2 \end{aligned}$$

この結果より、

$x = 0$ を代入すると

$$S = 0 + 0^2 = 0 \text{ となる。}$$

(1)の範囲を求めよ。

和 S は

$$S = x + x^2$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos x - \cos 2x)$$

(1) 初項 $1 - \cos x - \cos 2x$

公比 $1 - \cos x - \cos 2x$

の無限等比級数

与えられた条件は

(I) 初項 $1 - \cos x - \cos 2x = 0$

(II) 公差 $|1 - \cos x - \cos 2x| < 1$

の2条件が成り立つ必要がある。

(I) (II) の両方を満たす必要がある。

結局 (II) の条件より x の値の範囲を

求める。まず $0 \leq x < 2\pi$ の範囲を

$$|1 - \cos x - \cos 2x| < 1$$

より、2倍角の公式を用いて

$$|1 - \cos x - (2\cos^2 x - 1)| < 1$$

$$\therefore |2 - \cos x - 2\cos^2 x| < 1$$

より

$$-1 < 2 - \cos x - 2\cos^2 x < 1$$

より、不等式を

$$\begin{cases} -1 < 2 - \cos x - 2\cos^2 x \dots (1) \\ 2 - \cos x - 2\cos^2 x < 1 \dots (2) \end{cases}$$

をそれぞれ解く。まず (1) より

① より

$$2 - \cos x - 2\cos^2 x > -1$$

$$3 - \cos x - 2\cos^2 x > 0$$

$$\therefore 2\cos^2 x + \cos x - 3 < 0 \quad \text{(-1)倍}$$

$$(2\cos x + 3)(\cos x - 1) < 0 \dots (3)$$

ここで、 $-1 \leq \cos x \leq 1$ より

$2\cos x + 3$ は必ず正の数である。

② より

$$(2\cos x + 3)(\cos x - 1) < 0$$

正

$$\therefore \cos x - 1 < 0$$

つまり

$$\cos x < 1$$

$$\text{よって } 0 \leq x < 2\pi \text{ において}$$

$$\cos x < 1 \text{ となるのは}$$

$$x = 0 \text{ 以外である。}$$

より

$$0 < x < 2\pi \dots (4)$$

$$\text{② 1より}$$

$$2 - \cos x - 2\cos^2 x < 1$$

$$\therefore -1 - \cos x - 2\cos^2 x < 0$$

より

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 > 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) > 0$$

より

$$\cos x < -1, \cos x > \frac{1}{2}$$

$$\text{(I) } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ より}$$

$$\cos x < -1 \text{ となる } x \text{ は}$$

存在しない。

$$\text{よって } \cos x > \frac{1}{2}$$

となる。

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi \dots (5)$$

よって (4), (5) の共通範囲は

$$0 < x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$

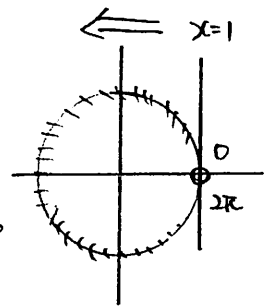
となる。この範囲は $0 \leq x < 2\pi$

で与えられる。一般角で表すと

求める x の範囲は、 m を整数として

$$2m\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2m\pi$$

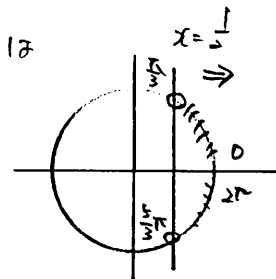
$$\frac{5}{3}\pi + 2m\pi < x < 2\pi + 2m\pi$$



また、 $S_{1,2}$

$$S = \frac{1 - \cos x - \cos 2x}{1 - (1 - \cos x - \cos 2x)}$$

$$= \frac{1 - \cos x - \cos 2x}{\cos x + \cos 2x}$$



18

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{4^n} \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ は}$$

初項 2, 公比 $-\frac{2}{3}$ の
無限等比級数で収束する。

$$\text{公比 } r \text{ について } \left| -\frac{2}{3} \right| < 1$$

であるから収束する。

$$\text{また } \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ は}$$

初項 $\frac{3}{4}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の
無限等比級数で収束する。

$$\text{公比 } r \text{ について } \left| \frac{1}{4} \right| < 1$$

であるから収束する。

よって,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{2}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{3}} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{6}{1} + 1 = \frac{11}{1} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (1-2) + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} + (-1)^n \cdot \frac{2}{3^{n-1}} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^{n-1}} - (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{3^{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

$\therefore$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ は}$$

初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比

級数で収束する。公比 r について

$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1 \text{ であるから収束する。}$$

また

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ は}$$

初項 2, 公比 $-\frac{1}{3}$ の

無限等比級数で収束する。

$$\text{公比 } r \text{ について } \left| -\frac{1}{3} \right| < 1$$

であるから収束する。

よって

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} 2\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{2}{\frac{2}{3}} \\ &= 2 - \frac{6}{4} \\ &= 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) & \frac{1+3}{4} + \frac{2+3^2}{4^2} + \frac{2^2+3^3}{4^3} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{4^n} + \frac{3^n}{4^n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\}$$

$\therefore$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ は初項 } \frac{1}{2}$$

公比 $\frac{1}{2}$ の無限等比

級数で収束する。公比 r について

$$\left| \frac{1}{2} \right| < 1 \text{ であるから収束する。}$$

また

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ は初項 } \frac{3}{4}$$

公比 $\frac{3}{4}$ の無限等比

級数で収束する。

$$\text{初項 } \frac{3}{4}, \text{ 公比 } \frac{3}{4} \text{ の}$$

無限等比級数である。

$$\text{公比 } r \text{ について } \left| \frac{3}{4} \right| < 1$$

であるから収束する。

よって

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \sum_{n=1}^{\infty} b_n \in$$

収束する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

が成り立つ。よって

収束する。

よって収束する。

19

(1)

$$0.1\dot{2}3$$

$$= 0.1232323\ldots$$

$$= 0.1 + (0.02 + 0.003) + (0.0002 + 0.00003) + \ldots$$

$$= \frac{1}{10} + \left(\frac{2}{100} + \frac{3}{1000}\right) + \left(\frac{2}{10000} + \frac{3}{100000}\right) + \ldots$$

$$= \frac{1}{10} + (20+3) \cdot \frac{1}{1000} + (20+3) \cdot \frac{1}{100000} + \ldots$$

$$= \frac{1}{10} + \underline{23 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 + 23 \left(\frac{1}{10}\right)^5 + \ldots}$$

下線部分は、初項 $23\left(\frac{1}{10}\right)^3$ 、

公比 $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ の無限等比級数

で、公比 $1 < \left|\left(\frac{1}{10}\right)^2\right| < 1$

より収束する。

$$\begin{aligned} \therefore 0.1\dot{2}3 &= \frac{1}{10} + \frac{23\left(\frac{1}{10}\right)^3}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^2} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{23\left(\frac{1}{10}\right)^3}{\frac{99}{100}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{約分} \\ 1 = 100 \text{ 倍} \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{10} + \frac{23\left(\frac{1}{10}\right)}{99} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{23}{990} \\ &= \frac{99+23}{990} \\ &= \frac{122}{990} = \frac{61}{495} \end{aligned}$$

(おまけ) 電卓で $61 \div 495$ を試す

$0.1232323\ldots$ と出る。

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x)^n < 1$$

この式は、

無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x)^n$ は収束し、

かつ、その和は1未満である。

ことを示す。

まず、真数は正なる $x > 0 \cdots \textcircled{1}$

さらに、この無限級数は

初項 $\log_2 x$ 、公比 $\log_2 x$ であり

収束する $\Rightarrow$ 公比 1 は

(I) 初項 $\log_2 x = 0$ 、

(II) 公比 $1 < |\log_2 x| < 1$

(I), (II) は (IV) に含まれる。

$$|\log_2 x| < 1$$

より

$$-1 < \log_2 x < 1 \cdots \textcircled{4}$$

これは x の値の範囲を示している。

$$-1 = \log_2 \frac{1}{2}, \quad 1 = \log_2 2$$

である。④より

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 2$$

④より $\frac{1}{2} < x < 2$ である。

$$\frac{1}{2} < x < 2 \cdots \textcircled{2}$$

よって、②に属する x は、①を満たす。

さらに、②の時、無限等比級数は収束

するので、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\log_2 x)^n &= \frac{\text{初項}}{1 - \text{公比}} \\ &= \frac{\log_2 x}{1 - \log_2 x} \end{aligned}$$

これは、問題より

$$\frac{\log_2 x}{1 - \log_2 x} < 1$$

を満たす x を示さなければならない。

④より、左辺の分母の $1 - \log_2 x$ は正である。

$$\log_2 x = -\log_2 \frac{1}{x}$$

より

$$\log_2 x < -\log_2 x$$

∴

$$2\log_2 x < 1$$

∴

$$\log_2 x < \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \frac{1}{2} = \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2}$$

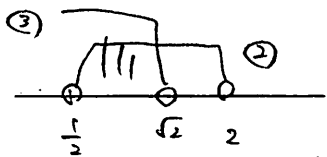
よって

$$\log_2 x < \log_2 \sqrt{2}$$

∴ $x < \sqrt{2}$... ②

$$x < \sqrt{2} \dots ②$$

②と③の共通部分を図示



$$\therefore \frac{1}{2} < x < \sqrt{2}$$

(3) 条件より

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \dots ①$$

は等比数列。その和は3である。

＝43の各項で3乗した

$$a^3 + (ar)^3 + (ar^2)^3 + (ar^3)^3 + \dots ②$$

も等比数列。その和は6である。

∴ $a = 0$ だと条件を

満たすことができないので

$a \neq 0$ である。また ①より

収束するので $|r| < 1$... ③

$$|r| < 1 \dots ③$$

が成り立つ。

∴ ③が成り立つ

$$|r|^3 < 1$$

$$\therefore |r^3| < 1$$

②と③より ④が成り立つ。

∴ ④が成り立つ。

①の和が3である

$$\frac{a}{1-r} = 3 \dots ④$$

が成り立つ。④より ⑤の

和が6である

$$\frac{a^3}{1-r^3} = 6 \dots ⑤$$

が成り立つ。④より ⑥の

和が27である

$$\left(\frac{a}{1-r}\right)^3 = 27$$

$$\therefore \frac{a^3}{(1-r)^3} = 27 \dots ⑥$$

④より ⑤より ⑥より

⑦が成り立つ

$$\frac{\frac{a^3}{(1-r)^3}}{\frac{a^3}{1-r^3}} = \frac{27}{6}$$

$$\therefore \frac{1-r^3}{(1-r)^3} = \frac{9}{2}$$

⑦より ⑧が成り立つ

$$\frac{(1-r)(1+r+r^2)}{(1-r)^3} = \frac{9}{2}$$

③より $r \neq 1$ である。⑧より

⑨が成り立つ

$$\frac{1+r+r^2}{(1-r)^2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{⑦より } 2(1-r)^2$$

⑩が成り立つ

$$2(1+r+r^2) = 9(1-r)^2$$

$$2+2r+2r^2 = 9-18r+9r^2$$

$$\therefore 7r^2 - 20r + 7 = 0$$

$$\therefore r = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 7 \cdot 7}}{7}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{51}}{7}$$

∴

$$\frac{10 + \sqrt{51}}{7} \approx \frac{10}{7} \approx 1.4$$

③を満たす。

③を満たす。

$$\text{また } \frac{10 - \sqrt{51}}{7} \approx \frac{10}{7} \approx 1.4$$

また、①の条件より

$$\frac{10 - \sqrt{51}}{7} - 1 = \frac{3 - \sqrt{51}}{7}$$

$$= \frac{\sqrt{51} - 3}{7} < 0$$

$$\therefore \frac{10 - \sqrt{51}}{7} < 1$$

③を満たす。

$$0 < \frac{10 - \sqrt{51}}{7} < 1$$

③を満たす。③より

④が成り立つ。

④より

$$r = \frac{10 - \sqrt{51}}{7}$$

④が成り立つ。

20

2つの等比数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$
は問題より、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は
1で終わる。

$\{a_n\}$ の公比を α

$\{b_n\}$ の公比を β

とすると、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1$

と $\alpha + \beta = 1$ である。

$$|\alpha| < 1 \text{ かつ } |\beta| < 1 \quad \dots (1)$$

が成り立つ。また、

$$a_n = 1 \cdot \alpha^{n-1} = \alpha^{n-1}$$

$$b_n = 1 \cdot \beta^{n-1} = \beta^{n-1}$$

である。

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \alpha^{n-1} \beta^{n-1} \\ &= (\alpha\beta)^{n-1} \end{aligned}$$

よって、 $\{a_n b_n\}$ は

公比 $\alpha\beta$ の等比数列で、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ は

(7)より、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = 1$ である。

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| < 1 \cdot 1$$

$$\therefore |\alpha\beta| < 1$$

が成り立つ。無限等比級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{1 - \alpha\beta}$$

より、 $\frac{1}{1 - \alpha\beta} = 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{1 - \alpha\beta}$$

より、問題より $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{4}{5}$

である。

$$\frac{1}{1 - \alpha\beta} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 5 = 4(1 - \alpha\beta)$$

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{4} \quad \dots (2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ は } 1 \text{ である}$$

である。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

より、 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1 - \beta}$$

より、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta}$$

よって、 $\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} = 2$

$$\frac{1}{1 - \alpha} + \frac{1}{1 - \beta} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore (1 - \alpha)(1 - \beta) = \frac{8}{3}$$

$$(1 - \beta) + (1 - \alpha) = \frac{8}{3}(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$3(2 - \alpha - \beta) = 8(1 - \alpha)(1 - \beta)$$

$$6 - 3(\alpha + \beta) = 8 - 8(\alpha + \beta) + 8\alpha\beta$$

(2)より、 $\alpha + \beta = -\frac{1}{4}$

$$6 - 3(\alpha + \beta) = 8 - 8(\alpha + \beta) + 8\alpha\beta$$

より、

$$5(\alpha + \beta) = 0$$

$$\therefore \alpha + \beta = 0 \quad \dots (3)$$

(2), (3)より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、 α, β は

2次方程式

$$t^2 - 0 \cdot t + (-\frac{1}{4}) = 0$$

の解である。

$$t^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad \therefore t = \pm \frac{1}{2}$$

(12) 7

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{2}$$

とす。 $\left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2} \text{ とする} \right)$
 JXF 17 (2) の結果を使う

よ

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (a_n)^2 + 2a_nb_n + (b_n)^2 \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}^2 + 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}^2 \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{n-1} + 2 \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \right\}^{n-1} + \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{n-1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} \right\} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

よ

$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ は初項 2, 公比 $\frac{1}{4}$ の無限等比数列なので、

公比 $1 > \left|\frac{1}{4}\right| < 1$ より収束する。

$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ は初項 2, 公比 $-\frac{1}{4}$ の無限等比数列なので、

公比 $1 > \left|-\frac{1}{4}\right| < 1$ より収束する。

よ

$$(*) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{4}} + \frac{2}{\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{8}{5} = 8 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) = 8 \cdot \frac{5+3}{15} = \frac{64}{15}$$

21

(1) 三平方の定理より

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$\therefore 8^2 = AC^2 + 7^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } AC^2 &= 64 - 49 \\ &= 15 \end{aligned}$$

$$AC > 0 \text{ より } AC = \sqrt{15}$$

ゆえに $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot \text{底辺} \cdot \text{高さ} \\ &= \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AC \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{15} = \frac{7}{2}\sqrt{15} \dots ① \end{aligned}$$

また、 $\triangle ABC$ の内接円の中心を O_1 とし、

円 O_1 の半径を r_1 とする。

公式より

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} r_1 (AB + BC + CA) \\ &= \frac{1}{2} r_1 (8 + 7 + \sqrt{15}) \\ &= \frac{1}{2} r_1 (15 + \sqrt{15}) \dots ② \end{aligned}$$

よって ①、② より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} r_1 (15 + \sqrt{15}) &= \frac{7}{2} \sqrt{15} \\ r_1 &= \frac{7\sqrt{15}}{15 + \sqrt{15}} \\ &= \frac{7\sqrt{15}}{\sqrt{15}(\sqrt{15} + 1)} \\ &= \frac{7}{\sqrt{15} + 1} \\ &= \frac{7(\sqrt{15} - 1)}{(\sqrt{15} + 1)(\sqrt{15} - 1)} \\ &= \frac{7(\sqrt{15} - 1)}{14} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{15} - 1) \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ において

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} \\ &= \frac{BC}{AB} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

また、公式より

$$\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos B)$$

よって代入して

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{B}{2} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{7}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16} \\ \therefore \sin^2 \frac{B}{2} &= \frac{1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \sin \frac{B}{2} &= \pm \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ここで $0^\circ < B < 90^\circ$ より

$$2^\circ \text{ 等しいと、} 0^\circ < \frac{B}{2} < 45^\circ$$

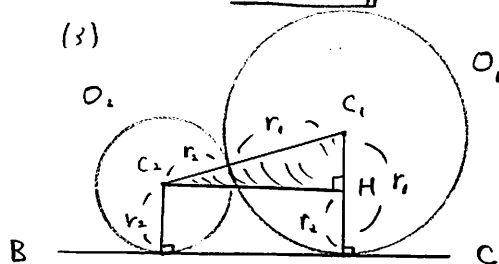
よって $\sin \frac{B}{2}$ は正の数である

$\sin \frac{B}{2}$ は正の数である

$\sin \frac{B}{2} = -\frac{1}{4}$ は不適

$$\therefore \sin \frac{B}{2} = \frac{1}{4}$$

(3)



円 O_1 の中心を C_1 、円 O_2 の中心を C_2 とする。また、図のように直角三角形 C_1C_2H を作る。このとき、線分 C_1C_2 は 2 円の中心間距離であり、2 円の円周は外接しているから、線分 C_1C_2 は 2 円の半径の和に等しい。

$$\therefore C_1C_2 = r_1 + r_2 \dots ③$$

また、図より

$$C_1H = r_1 - r_2 \dots ④$$

ここで、 $\angle C_1C_2H$ は $\angle B$ の 2 等分線

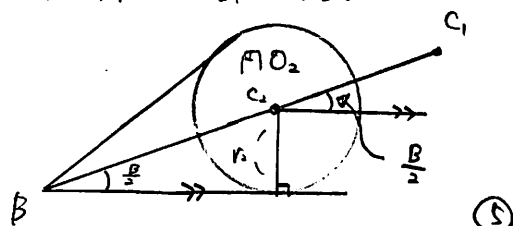
である。また、 $\angle C_1C_2H$ は $\angle B$ の 2 等分線

である。また、 $\angle C_1C_2H$ は $\angle B$ の 2 等分線

である。また、 $\angle C_1C_2H$ は $\angle B$ の 2 等分線

である。また、 $\angle C_1C_2H$ は $\angle B$ の 2 等分線

である。また、 $\angle C_1C_2H$ は $\angle B$ の 2 等分線



ここで、 $\angle C_1C_2H$ は $\frac{B}{2}$ に等しい。

$$\begin{aligned} \text{ゆえに } \frac{C_1H}{C_1C_2} &= \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \sin \angle C_1C_2H \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{C_1H}{C_1C_2} = \sin \angle C_1C_2H$$

③、④、⑤ を代入して

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \sin \frac{B}{2}$$

ここで、 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{4}$ の結果から

$$\frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{4}$$

両辺に $4(r_1 + r_2)$ をかけると

$$4(r_1 - r_2) = r_1 + r_2$$

$$4r_1 - 4r_2 = r_1 + r_2$$

$$\therefore 5r_2 = 3r_1$$

$$r_2 = \frac{3}{5} r_1 \dots ⑥$$

よって、自然数 $n=1$ として

r_n と r_{n+1} の関係は

r_2 と r_1 の関係は

等しい。

⑥より

$$r_{n+1} = \frac{3}{5}r_n \dots (7)$$

が成り立つ。(7)より

数列 $\{r_n\}$ は

$$\text{初項 } r_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{15}-1)$$

(公比 $\frac{3}{5}$ の等比数列) より

$$r_n = \frac{1}{2}(\sqrt{15}-1) \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

(4)

$$S_n = \pi (r_n)^2$$

(3) の結果より

$$\begin{aligned} S_n &= \pi \left\{ \frac{1}{2}(\sqrt{15}-1) \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \right\}^2 \\ &= \pi \cdot \frac{1}{4}(\sqrt{15}-1)^2 \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \right\}^2 \\ &= \pi \cdot \frac{1}{4}(15-2\sqrt{15}+1) \cdot \left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right\}^{n-1} \\ &= \pi \cdot \frac{1}{4}(16-2\sqrt{15}) \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\pi}{2}(8-\sqrt{15}) \left(\frac{9}{25}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

よって、数列 $\{S_n\}$ は、初項 $\frac{\pi}{2}(8-\sqrt{15})$

(公比 $\frac{9}{25}$ の等比数列) となる。

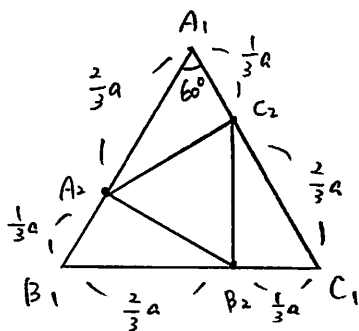
(公比 $1 < \frac{9}{25} < 1$ より

無限等比数列 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束する。

よって求める

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\frac{\pi}{2}(8-\sqrt{15})}{1 - \frac{9}{25}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}(8-\sqrt{15})}{\frac{16}{25}} \\ &= \frac{\pi}{2}(8-\sqrt{15}) \times \frac{25}{16} \\ &= \frac{25}{32}\pi(8-\sqrt{15}) \end{aligned}$$

(1)



$\triangle A_1 A_2 C_2$ において

$$A_1 A_2 = \frac{2}{3} a$$

$$A_1 C_2 = \frac{1}{3} a$$

よって、余弦定理から

$$A_2 C_2^2 = A_1 A_2^2 + A_1 C_2^2 - 2 \cdot A_1 A_2 \cdot A_1 C_2 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= \left(\frac{2}{3}a\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4}{9}a^2 + \frac{1}{9}a^2 - \frac{2}{9}a^2$$

$$= \frac{3}{9}a^2$$

$$= \frac{1}{3}a^2$$

$$\therefore A_2 C_2 > 0 \text{ より } A_2 C_2 = \frac{1}{3}a$$

よって、正三角形 T_1 の 1辺の長さは a

に等しい。正三角形 T_2 の 1辺の

長さは $\frac{1}{3}a$ である。つまり

$$T_1 \text{ と } T_2 \text{ の 相似比は } 1 : \frac{1}{3}$$

である。よって、正三角形は相似なので

T_1 と T_2 の関係は T_n と T_{n+1} の

関係に等しい。ゆえに

$$\underline{T_n \text{ と } T_{n+1} \text{ の相似比は } 1 : \frac{1}{3} \text{ である}} \quad (*)$$

が成り立つ。

今、正三角形 T_n の 1辺の長さを L_n とする。

すると L_1 は、1辺の長さが a の正三角形の 1辺の長さなので、 $L_1 = a$ である。

また (*) より

$$L_{n+1} = \frac{1}{3} L_n$$

が成り立つ。つまり

$\{L_n\}$ は初項 a

公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列

ゆえに

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n$$

は初項 a 、公比 $\frac{1}{3}$

の無限等比級数

であり、公比 1 より

$$\left|\frac{1}{3}\right| < 1 \text{ が成り立つ}$$

から収束する。

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} L_n = \frac{\text{初項}}{1 - \text{公比}}$$

したがって、
1 = 3
となる。

$$= \frac{3a}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}a}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}a(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$$

$$= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{3 - 1} a$$

$$= \frac{9 + 3\sqrt{3}}{2} a$$

つまり

(2) 正三角形 T_n

の面積を S_n

とすると

S_1 は 1辺の長さが a

の正三角形の

面積なので

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

また (*) より

T_n と T_{n+1} の

相似比は $1 : \frac{1}{3}$

である。面積比は

$$1^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

より $1 : \frac{1}{9}$ である。

したがって

$$S_{n+1} = \frac{1}{9} S_n$$

が成り立つ。

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n \text{ は}$$

初項 $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ 、公比 $\frac{1}{9}$

の無限等比級数

である。公比 1 より

$$\left|\frac{1}{9}\right| < 1 \text{ が成り立つ}$$

から収束する。

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{1 - \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a^2}{\frac{8}{9}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8} a^2$$

(3)

すべての正四面体

は相似である。

よて (*) より

$$\text{相似比が } 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって体積比は

$$1^3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

つまり

$$1 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

よって

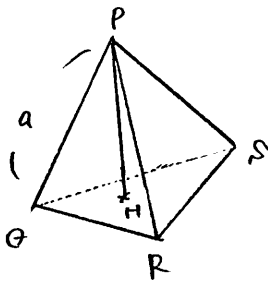
$$V_{n+1} = \frac{1}{3\sqrt{3}} V_n$$

が成り立つ。すなわち V_1

1より、1辺の長さが

a の正四面体の体積

である。



正四面体の頂点の各前に

1辺の長さを付ける。すなわち、頂点

Pから底面QRSに垂線PH

を下す。すると $PQ = PR = PS$

である。Hは△QRSの

外接円の中心 1 = 3である。

$$(\triangle PHQ \equiv \triangle PHR \equiv \triangle PHS)$$

よって

(したがって、直角三角形PHQに於いて

QHの長さは△QRSの外接円

の半径である。正三角形の

$$2QH = \frac{a}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore QH = \frac{a}{2 \sin 60^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

よって、直角三角形PHQに

よって、三平方の定理から

$$PQ^2 = PH^2 + QH^2$$

よって

$$a^2 = PH^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$a^2 = PH^2 + \frac{1}{3}a^2$$

$$\begin{aligned} \therefore PH^2 &= a^2 - \frac{1}{3}a^2 \\ &= \frac{2}{3}a^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PH > 0 \text{ より } PH &= \sqrt{\frac{2}{3}}a \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{aligned}$$

よって、正四面体の高さが求まる。すなわち

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \triangle QRS \cdot PH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ \right) \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{36}a^3 = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} V_n$$

は、初項 $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ 、公比 $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

の無限等比級数である。

$$\text{よって } 1 > \left| \frac{1}{3\sqrt{3}} \right| < 1$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} V_n &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3}{1 - \frac{1}{3\sqrt{3}}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3 \cdot 3\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a^3}{3\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{6}a^3(3\sqrt{3}+1)}{4(3\sqrt{3}-1)(3\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{a^3(3 \cdot 3\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4\{(3\sqrt{3})^2 - 1^2\}} \\ &= \frac{a^3(9\sqrt{2} + \sqrt{6})}{4(27 - 1)} \\ &= \frac{9\sqrt{2} + \sqrt{6}}{104}a^3 \end{aligned}$$

23

F_n の辺の長さを a_n , 高さ F_n の

1 辺の長さを x_n とする。

$n=0$ の時, F_0 は 正三角形である。

$$a_0 = 3 \dots (1)$$

高さ F_0 の面積が 1 である。

$$\frac{1}{2} x_0 \cdot x_0 \cdot \sin 60^\circ = 1$$

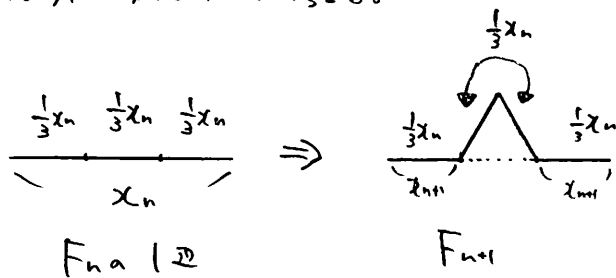
$$\therefore x_0^2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \text{より } x_0 > 0 \text{ より}$$

$$x_0 = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \dots (2) \quad \leftarrow \text{4 乗根}$$

とある。さて, この高さ (1) の図形を作ると

高さ 1 = 7117. 辺の長さ x の長さを

このように変化するが考える。



すると, F_n の 1 辺の長さを F_{n+1} の 4 倍の長さとする。

つまり, F_{n+1} の辺の長さ a_{n+1} は F_n の辺の長さ a_n の 4 倍と仮定する。

$$a_{n+1} = 4a_n \dots (3) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

仮定より, 高さ 1 = 7117 は F_{n+1} の 1 辺の長さ

1 = x_{n+1} は F_n の 1 辺の長さ x_n の $\frac{1}{3}$ である。

$$\text{より } x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n \dots (4) \quad (n=0,1,2,\dots)$$

仮定より, 高さ 1 = 7117 は F_n の 1 辺の長さ x_n の $\frac{1}{3}$ である。

$$a_1 = 4a_0 = 4 \cdot 3 = 12 \dots (5)$$

同様に, (2) と (4) より $n=0$ と仮定

$$x_1 = \frac{1}{3} x_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt[4]{3}} = \frac{2}{3\sqrt[4]{3}} \dots (6)$$

とある。

よって, (3), (5) より

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_{n+1} = 4a_n \end{cases}$$

より, 数列 $\{a_n\}$ は初項 12, 公比 4

の等比数列より

$$\begin{aligned} a_n &= 12 \cdot 4^{n-1} \\ &= 3 \cdot 4 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 4^n \dots (7) \end{aligned}$$

同様に, (4), (6) より

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3\sqrt[4]{3}} \\ x_{n+1} = \frac{1}{3} x_n \end{cases}$$

より, 数列 $\{x_n\}$ は初項 $\frac{2}{3\sqrt[4]{3}}$, 公比 $\frac{1}{3}$

の等比数列より

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{2}{3\sqrt[4]{3}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3\sqrt[4]{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \dots (8) \end{aligned}$$

(7) から, F_n の (8) の長さを L_n とする。

F_n は 高さ x_n の長さを a_n とする。

$$\begin{aligned} L_n &= x_n \cdot a_n \\ &= \frac{2}{3\sqrt[4]{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 3 \cdot 4^n \\ &= \frac{6}{3\sqrt[4]{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^n \end{aligned}$$

よって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{3\sqrt[4]{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

つまり S_n は 7117 と仮定する。

S_n と S_{n+1} とは 7117 と仮定する。

S_n と S_{n+1} の 7117 と仮定する。

F_n に付け加える正三角形の面積の総和と仮定する。

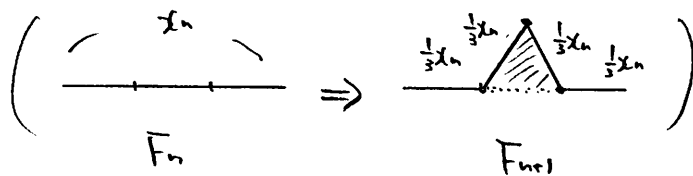
つまり, 付け加える正三角形の面積は, F_n の 1 辺の長さ

等しい。 A_n 個である。

よって、合計の面積は $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ である。

1つの面積を求めよう。

これは F_n の1辺を3等分した



F_n の1辺を3等分したところから、 F_{n+1} である。

1辺の長さは $\frac{1}{3}x_n$ である。

(したがって、 F_{n+1} は1辺の長さの面積は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}x_n\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x_n\right) \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x_n)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} (x_n)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{8} \text{を} \\ \text{代入} \end{array} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^n \right\}^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n = \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

よって、 $n=1$ のとき、 S_{n+1} は

面積 $\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$ の正三角形 A_{n+1} が A_n 個

合計の面積は S_{n+1} である。

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \cdot A_n \quad \left. \begin{array}{l} \textcircled{9} \text{を} \\ \text{代入} \end{array} \right\} \\ &= S_n + \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1} \cdot 3 \cdot 4^n \\ &= S_n + \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n \cdot 4^n \\ &= S_n + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^n \dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

よって、 $S_1 = S_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^0$

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^0 \\ &= 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

(したがって、 $S_1, S_2, \dots$)

$$\begin{cases} S_1 = \frac{4}{3} \\ S_{n+1} = S_n + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^n \end{cases}$$

よって、 S_n は $n=1$ のとき、 $S_1 = \frac{4}{3}$ である。

$n \geq 2$ のとき

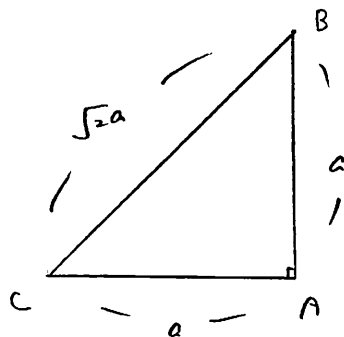
$$\begin{aligned} S_n &= S_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9}\right)^k \\ &= \frac{4}{3} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \{1 - (\frac{4}{9})^{n-1}\}}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \{1 - (\frac{4}{9})^{n-1}\}}{\frac{5}{9}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{15} \{1 - (\frac{4}{9})^{n-1}\} \end{aligned}$$

$n=1$ のとき、 $S_1 = \frac{4}{3}$ である。

よって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{4}{3} + \frac{4}{15} \{1 - (\frac{4}{9})^{n-1}\} \right] \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{15} (1-0) \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{15} = \frac{20+4}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

24



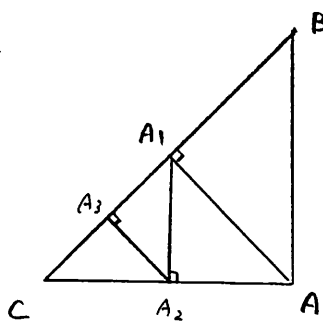
$AB = AC = a$ とおく

よって $BC = \sqrt{2}a$ となる。

$\triangle ABC$ の周の長さを L_0 とする。

$$\begin{aligned} L_0 &= AB + BC + CA \\ &= a + \sqrt{2}a + a \\ &= 2a + \sqrt{2}a \\ &= (2 + \sqrt{2})a \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、



$\triangle ABA_1, \triangle AA_1A_2, \triangle AA_2A_3, \dots$

はすべて直角二等辺三角形となる。

$$\begin{aligned} AA_1 &= AB \cos 45^\circ \\ &= a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}a \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Diagram of } \triangle ABA_1 \text{ with } \angle A = 45^\circ, \text{ right angle at } A_1, \text{ and } AB = a. \\ \frac{AA_1}{AB} = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \cos 45^\circ \\ \therefore \frac{AA_1}{a} = \cos 45^\circ \\ \therefore AA_1 = a \cos 45^\circ \end{array} \right)$$

同様に $\triangle AA_1A_2$ において

$$\begin{aligned} A_1A_2 &= AA_1 \cos 45^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \end{aligned}$$

同様に $\triangle A_1A_2A_3$ において

$$\begin{aligned} A_2A_3 &= A_1A_2 \cos 45^\circ \\ &= a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 \end{aligned}$$

よって以下同様にして

$$L = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots$$

は

$$L = a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + a \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3 + \dots$$

となる。これは初項 $\frac{1}{\sqrt{2}}a$ 、公比 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の無限等比級数である。

公比 $\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right| < 1$ よりこの級数は

収束する。ゆえに

$$\begin{aligned} L &= \frac{a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{a(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{a(\sqrt{2}+1)}{2-1} = a(\sqrt{2}+1) \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

(ただし、①、②より)

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_0} &= \frac{a(\sqrt{2}+1)}{(2+\sqrt{2})a} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \frac{L}{L_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

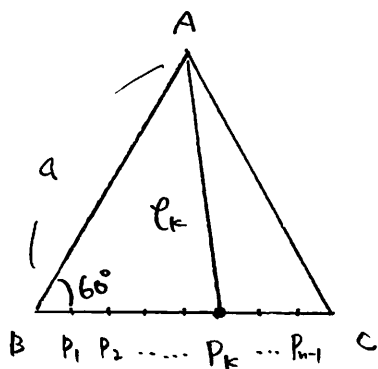
よって

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} L_0$$

ゆえに L は L_0 の

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ 倍}$$

(25)



$BC = a$ とし、 BC を n 等分 ($n \geq 2$) とす。

$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とする。このとき

線分 BP_k の長さは $\frac{k}{n}a$ である。

$$\therefore BP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{n-1}C = \frac{a}{n}$$

よって、 $k = 1, 2, \dots, n-1$ に対して、線分

BP_k の長さは $\frac{k}{n}a$ である。このとき

$$BP_k = \frac{ka}{n}$$

が成り立つ。よって、 $\triangle ABP_k$ において

余弦定理より、

$$AP_k^2 = AB^2 + BP_k^2 - 2 \cdot AB \cdot BP_k \cdot \cos 60^\circ$$

よって、

$$(l_k)^2 = a^2 + \left(\frac{ka}{n}\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{ka}{n} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= a^2 + \frac{k^2 a^2}{n^2} - \frac{ka^2}{n}$$

$$= \frac{a^2}{n^2} \cdot k^2 - \frac{a^2}{n} \cdot k + a^2$$

ゆえに、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (l_k)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{a^2}{n^2} k^2 - \frac{a^2}{n} k + a^2 \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{a^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 - \frac{a^2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k + a^2 \sum_{k=1}^{n-1} 1 \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) - \frac{a^2}{n} \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + a^2 (n-1) \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) - \frac{a^2}{n} \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + a^2 (n-1) \right\} \\ &= \frac{a^2}{n^3} \cdot \frac{1}{6} (n-1)n(2n-1) - \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} (n-1)n + \frac{a^2}{n} (n-1) \\ &= \frac{a^2}{6} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{2n-1}{n} - \frac{a^2}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n} + a^2 \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \frac{a^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) - \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (l_k)^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a^2}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(2 - \frac{1}{n}\right) - \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + a^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= \frac{a^2}{6} (1-0)(2-0) - \frac{a^2}{2} (1-0) + a^2 (1-0)$$

$$= \frac{a^2}{6} \cdot 1 \cdot 2 - \frac{a^2}{2} + a^2$$

$$= \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2} + a^2$$

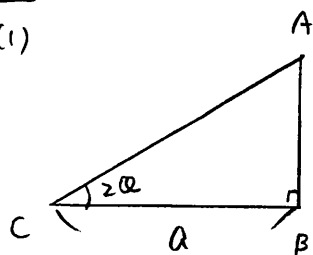
$$= \frac{2-3+6}{6} a^2 = \frac{5}{6} a^2$$

$$\left(\frac{1}{6}\right) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \text{ あり}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 &= \frac{1}{6} (n-1) \{ (n-1)+1 \} \{ 2(n-1)+1 \} \\ &= \frac{1}{6} (n-1)n \{ 2(n-1)+1 \} \end{aligned}$$

26

(1)



直角三角形 ABC にあて

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x}{a} = \tan 2\theta$$

$$\therefore AB = BC \tan 2\theta = a \tan 2\theta \quad \dots (1)$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{a}{y} = \cos 2\theta$$

$$\therefore \frac{a}{AC} = \cos 2\theta$$

$$\therefore AC = \frac{a}{\cos 2\theta} \quad \dots (2)$$

よて $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと、 $\triangle ABC$ の面積は

$$S = \frac{1}{2} r_0 (AB + BC + CA)$$

$\therefore$ ①、②より

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \tan 2\theta = \frac{1}{2} r_0 (a \tan 2\theta + a + \frac{a}{\cos 2\theta})$$

よて

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot a \tan 2\theta = \frac{1}{2} r_0 a (\tan 2\theta + 1 + \frac{1}{\cos 2\theta})$$

両辺を $\frac{1}{2} a$ で割ると

$$a \tan 2\theta = r_0 (\tan 2\theta + 1 + \frac{1}{\cos 2\theta}) \quad \dots (3)$$

③より、 r_0 を $\tan \theta$ と a で表すことができる。

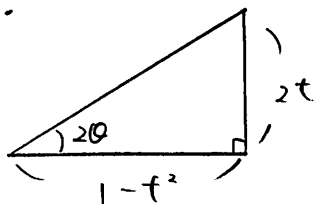
== 二角の法則より

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

よて $\tan \theta = t$ とおくと

$$\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2} \quad \dots (4)$$

が成り立つ。よて、 $\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$ である。下図の直角三角形を考えると、



この直角三角形より

$$\tan 2\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

が成り立つ。よて、三平方の定理より

$$(\text{斜辺})^2 = (1-t^2)^2 + (2t)^2$$

が成り立つので

$$(\text{斜辺})^2 = (1-2t^2+t^4) + 4t^2$$

$$= 1 + 2t^2 + t^4$$

$$= (1+t^2)^2$$

$$\text{斜辺} > 0 \text{ より } \text{斜辺} = 1+t^2$$

よて、

$$\begin{cases} \sin 2\theta = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos 2\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad \dots (5)$$

が成り立つので、④、⑤より

③より代入すると

$$a \cdot \frac{2t}{1-t^2}$$

$$= r_0 \left(\frac{2t}{1-t^2} + 1 + \frac{1+t^2}{1-t^2} \right)$$

$\therefore$

$$a \cdot \frac{2t}{1-t^2}$$

$$= r_0 \cdot \frac{2t + 1 - t^2 + 1 + t^2}{1-t^2}$$

両辺を $(1-t^2)$ で割ると

$$2at = r_0 (2t + 2)$$

$$2at = r_0 \cdot 2(1+t)$$

$$\therefore r_0 = \frac{at}{1+t}$$

$t = \tan \theta$ とおくと

$$r_0 = \frac{a \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

④、⑤より

通常は $\theta < \frac{\pi}{2}$ である。

よて、

$$t = \tan \theta < 1$$

$$\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

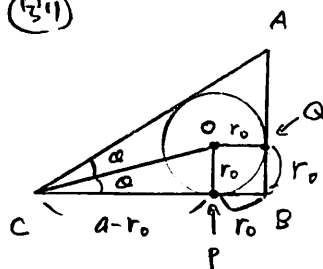
$$\tan \theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

よて、 $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

1) $\triangle ABC$ の面積は $S = \frac{1}{2} r_0 (AB + BC + CA)$ である。

②より



$\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて $\triangle ABC$ の面積は

$\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

よて、 $\triangle ABC$ の内接円の半径を r_0 とおくと

※. 中心Oから

BCに下ろした垂線はOP

ABに下ろした垂線はOQ

とすると、四角形OPBQは

正方形になる。

(P, Qはそれぞれ接点になる)

(r=r_0)

$$PB = OQ = r_0$$

よって

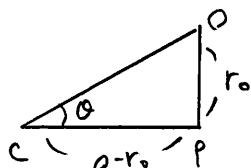
$$CP = BC - BP$$

$$= a - r_0 \quad \text{--- (7)}$$

※

$$OP = r_0 \quad \text{--- (8)}$$

よって



ここで、直角三角形OPCに

よって (6), (7), (8) より

$$\frac{OP}{CP} = \frac{r_0}{a - r_0} = \tan \theta$$

$$\therefore \frac{r_0}{a - r_0} = \tan \theta$$

よって

$$r_0 = (a - r_0) \tan \theta$$

$$r_0 = a \tan \theta - r_0 \tan \theta$$

$$\therefore r_0 + r_0 \tan \theta = a \tan \theta$$

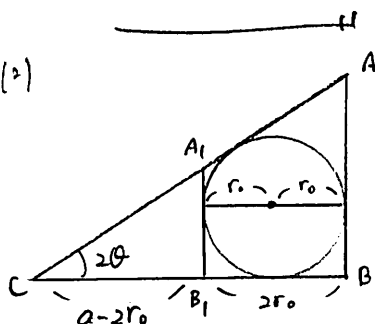
$$r_0 (1 + \tan \theta) = a \tan \theta$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ より } 1 + \tan \theta \neq 0$$

よって

$$r_0 = \frac{a \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

(2)



(2) より、 B_1, B の長さは

(1) C_0 の直径は $2r_0$ (1) より

$$B_1 B_0 = 2r_0$$

よって

$$CB_1 = a - 2r_0$$

$$= a - 2 \cdot \frac{a \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$= a \left(1 - \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)$$

$$= a \cdot \frac{1 + \tan \theta - 2 \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$= a \cdot \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \quad \text{--- (9)}$$

よって、 $\triangle ABC$ と $\triangle A_1 B_1 C$

は相似である。また

その相似比は

$$BC : B_1 C$$

(1) より、よって

$\triangle ABC$ と $\triangle A_1 B_1 C$ が

相似なため、 $\triangle ABC$

の内接円 C_0 と $\triangle A_1 B_1 C$

の内接円 C_1 も相似

であり、その相似比は

$$BC : B_1 C = \text{--- (10)}$$

(1) より、 C_0 の半径 r_0 と

C_1 の半径 r_1 は

$$r_0 : r_1 = BC : B_1 C \quad \text{--- (11)}$$

$$= a : a \cdot \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$= 1 : \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

よって

$$r_1 = r_0 \cdot \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

よって、 r_0 と r_1 の関係は

また、 $\triangle A_n B_n C$ も相似

であり、同じ関係が

成り立つ。

$$r_{n+1} = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} r_n$$

が成り立つ。よって、数列 $\{r_n\}$

$$\text{に成り立つ } \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$$

(1) $\triangle ABC$ と $\triangle A_1 B_1 C$ は相似

である。よって、 r_0 と r_1 の相似比

は $BC : B_1 C$ である。

また、 BC と $B_1 C$ の相似比は

$$(3) \quad S_n = \pi r_n^2 \text{ である}$$

$$S_{n+1} = \pi r_{n+1}^2$$

$$= \pi \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} r_n \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2 \pi r_n^2$$

$$= \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2 S_n$$

よって、数列 $\{S_n\}$ は等比数列

に成り立つ。よって、

$$\text{よって } 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \text{ より } 0 < \tan \theta < 1$$

$$\therefore 0 < \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2 < 1$$

が成り立つ。

無限等比級数の和 $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ は

収束する。よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n = \frac{S_0}{1 - \text{公比}} \leftarrow S_0 = \pi r_0^2$$

$$= \frac{\pi \left(\frac{a \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2}{1 - \left(\frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \right)^2}$$

$$= \frac{\pi a^2 \tan^2 \theta}{(1 + \tan \theta)^2 - (1 - \tan \theta)^2}$$

$$= \frac{\pi a^2 \tan^2 \theta}{(1 + 2 \tan \theta + \tan^2 \theta) - (1 - 2 \tan \theta + \tan^2 \theta)}$$

$$= \frac{\pi a^2 \tan^2 \theta}{4 \tan \theta} = \frac{\pi}{4} a^2 \tan \theta$$

27

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) \\
 &= (-1)^2 - (-1) + 1 \\
 &= 1 + 1 + 1 = \underline{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2}{x+2} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x+2-2}{x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+2} \\
 &= \frac{1}{0+2} = \underline{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{(\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x})(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{(\sqrt{3+2x})^2 - (\sqrt{3-2x})^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{3+2x - (3-2x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x})}{4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{3+0} + \sqrt{3-0}}{2} = \underline{\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + x} \\
 & x^3 + x + 2 = 0 \\
 & x = -1 \text{ is a root} \\
 & (-1)^3 + (-1) + 2 = -1 - 1 + 2 = 0 \\
 & \therefore x^3 + x + 2 = (x+1)(x^2 - x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x-3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - \sqrt{2x+3})(x + \sqrt{2x+3})}{(x-3)(x + \sqrt{2x+3})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2 \sin x \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 \sin x} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \underline{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 - x + 2 \\
 x+1 \overline{) } \\
 \underline{x^2 + x} \\
 -x^2 - x \\
 \underline{-x^2 - x} \\
 2x + 2 \\
 \underline{2x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - (\sqrt{2x+3})^2}{(x-3)(x + \sqrt{2x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - (2x+3)}{(x-3)(x + \sqrt{2x+3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x + \sqrt{2x+3})}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\cos x)(1 + \cos x)}{\sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1^2 - \cos^2 x}{\sin x (1 + \cos x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{x(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{x} \\
 &= \frac{(-1)^2 - (-1) + 2}{-1} = \frac{4}{-1} = \underline{-4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x + \sqrt{2x+3}} \\
 &= \frac{3+1}{3 + \sqrt{2 \cdot 3 + 3}} \\
 &= \frac{4}{3 + \sqrt{9}} = \frac{4}{3+3} = \underline{\frac{1}{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 + \cos x}
 \end{aligned}$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x}}$$

$$= \frac{\sin 0}{1 + \cos 0} = \frac{0}{1+1} = \underline{0}$$

28

$$(1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3} + 2x}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+3} + 2x)(\sqrt{x^2+3} - 2x)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+3})^2 - (2x)^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+3 - 4x^2}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2+3}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3(x-1)}{\sqrt{x^2+3} - 2x}$$

$$= \frac{-3(-1-1)}{\sqrt{(-1)^2+3} - 2(-1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{4}+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{x+2} - 2} \leftarrow \begin{matrix} \text{Rationalize} \\ \text{Numerator} \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - \sqrt{3x-2})(x + \sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(x + \sqrt{3x-2})(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{x^2 - (\sqrt{3x-2})^2\}(\sqrt{x+2} + 2)}{\{(x+2) - 2^2\}(x + \sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2-4)(x + \sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x-2)(x + \sqrt{3x-2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + \sqrt{3x-2}}$$

$$= \frac{(2-1)(\sqrt{2+2} + 2)}{2 + \sqrt{3 \cdot 2 - 2}}$$

$$= \frac{1 \cdot (\sqrt{4} + 2)}{2 + \sqrt{4}} = \frac{2+2}{2+2} = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x}} \leftarrow \begin{matrix} \text{Rationalize} \\ \text{Numerator} \end{matrix}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{(1+x) - (1-x^2)\}(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x})}{\{(1-x^2) - (1-x)\}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x-1-x^2)(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x})}{(-x^2-1+x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-x^2)(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x})}{(-x^2+x)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-0} + \sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$\text{Rationalize} \text{ denominator}$$

$$\sqrt[3]{1+x} = A, \sqrt[3]{1-x} = B \text{ where } x < 1$$

$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$$

$$= (\sqrt[3]{1+x})^3 - (\sqrt[3]{1-x})^3$$

$$= (1+x) - (1-x) = 2x$$

57.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$\text{on } \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{3} \text{ et } 1 = A^2 + AB + B^2$$

4 et 1 et 3 et

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x \left\{ (\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x \left\{ (\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2 \right\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(\sqrt[3]{1+x})^2 + \sqrt[3]{1+x} \sqrt[3]{1-x} + (\sqrt[3]{1-x})^2}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt[3]{1+0})^2 + \sqrt[3]{1+0} \sqrt[3]{1-0} + (\sqrt[3]{1-0})^2}$$

$$= \frac{2}{1^2 + 1 \cdot 1 + 1^2} = \frac{2}{3}$$

29

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1} - b}{x-1} = \sqrt{2}$$

$x \rightarrow 1$ の時、 $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ かつ、 $\frac{1}{x-1}$ は無限大に発散する。
 $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ かつ $\frac{1}{x-1}$ は無限大に発散する。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x+1} - b) = 0$$

$$\therefore a\sqrt{1+1} - b = 0$$

$$b = \sqrt{2}a$$

問題 1 = 15 点

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x+1} - \sqrt{2}a}{x-1} = \sqrt{2}$$

==>

$$(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{1+1} + \sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

よって

$$\frac{a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore b = \sqrt{2}a \quad b = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore a = 4, b = 4\sqrt{2}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x^2+3x+5} + b}{x-1} = 5$$

$x \rightarrow 1$ の時、 $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ かつ、 $\frac{1}{x-1}$ は無限大に発散する。
 $\frac{1}{x-1} \rightarrow 0$ かつ $\frac{1}{x-1}$ は無限大に発散する。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x^2+3x+5} + b) = 0$$

$$a\sqrt{1^2+3 \cdot 1+5} + b = 0$$

$$a\sqrt{9} + b = 0 \quad \therefore b = -3a$$

問題 2 = 15 点

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x^2+3x+5} - 3a}{x-1} = 5$$

==>

$$(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x+5} - 3}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{(\sqrt{x^2+3x+5} - 3)(\sqrt{x^2+3x+5} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{x^2+3x+5-9}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} a \cdot \frac{x^2+3x-4}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)(x+4)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x+4)}{\sqrt{x^2+3x+5} + 3}$$

$$= \frac{a(1+4)}{\sqrt{1+3+5} + 3} = \frac{5a}{\sqrt{9} + 3} = \frac{5a}{6}$$

$$\therefore \frac{5a}{6} = 5 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore b = -3a \quad b = -18$$

$$\therefore a = 6, b = -18$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax+b}}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

$x \rightarrow -1$ かつ $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax+b}}{x^2-1} \rightarrow 0$ ではない

極限が有限値である。

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax+b}}{x^2-1} \rightarrow 0$ ではない。

$$\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{x^2+ax+b}) = 0$$

よって

$$\sqrt{(-1)^2+a(-1)+b} = 0$$

$$\sqrt{1-a+b} = 0$$

$$\therefore b = -\sqrt{1-a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-a} \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

また $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax+b}}{x^2-1} = \frac{1}{2}$ より、 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax+b}}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

よって $a \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{1-a}}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} (T.E.) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{1-a}}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{1-a})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a})}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a})} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+ax})^2 - (\sqrt{1-a})^2}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+ax-1+a}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)\{x+(a-1)\}}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+(a-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{1-a})}$$

$$= \frac{-1+a-1}{(-1-1)(\sqrt{(-1)^2+a(-1)}+\sqrt{1-a})}$$

$$= \frac{a-2}{(-2)(\sqrt{1-a}+\sqrt{1-a})}$$

$$= -\frac{a-2}{2 \cdot 2\sqrt{1-a}}$$

$$= -\frac{a-2}{4\sqrt{1-a}}$$

よって

$$-\frac{a-2}{4\sqrt{1-a}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sqrt{1-a} = 4\sqrt{1-a} \text{ ではない}$$

$$-(a-2) = 2\sqrt{1-a} \dots (*)$$

$$\Rightarrow (*) \text{ の両辺に } 0 \leq \sqrt{1-a} \text{ であるから}$$

$$-(a-2) \geq 0 \therefore a \leq 2$$

また $(*)$ の両辺に 2 を乗じると

$$(a-2)^2 = 4(1-a)$$

$$\therefore a^2 - 4a + 4 = 4 - 4a$$

$$\therefore a^2 = 0 \text{ かつ } a = 0$$

$$\left(\text{よって } a \leq 1, a \leq 2 \right)$$

よって $a = 0$

また

$$b = -\sqrt{1-a} = -\sqrt{1-0} = -1$$

$$\therefore \underline{a=0, b=-1}$$

30

(1)

3: 2階の $f(x)$ は x^2 の係数は 0 である。

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

とある。今、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。①は $x \rightarrow 0$ のとき

分母 $\rightarrow 0$ であり、分子は有限である。

有限で $x \rightarrow 0$ のとき $\rightarrow 0$

と $x \rightarrow 0$ のとき $\rightarrow 0$ である。

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$$

$$\therefore a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0$$

よって

$$d = 0$$

$f(x)$ は x^2 の係数は

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

と $x \rightarrow 0$ のとき $\rightarrow 0$ である。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} (ax^2 + bx + c) = 3$$

$$\therefore a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$$

よって

$$c = 3$$

$f(x)$ は x^3 の係数は

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 3x \quad \dots \textcircled{2}$$

また、 $x \rightarrow 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。また $x \rightarrow 1$ のとき

$x \rightarrow 1$ のとき、分母 $\rightarrow 0$ であり

分子は有限である。

分母 $\rightarrow 0$ と $x \rightarrow 1$ のとき $\rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

②より $x \rightarrow 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax^3 + bx^2 + 3x) = 0$$

$$\therefore a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 3 = 0$$

$$a + b + 3 = 0$$

$$\therefore b = -a - 3$$

③より $x \rightarrow 1$ のとき

$$f(x) = ax^3 + (-a-3)x^2 + 3x$$

$$= x \{ ax^2 - (a+3)x + 3 \}$$

$$= x(ax-3)(x-1)$$

と $x \rightarrow 1$ のとき $\rightarrow 0$ である。③より $x \rightarrow 1$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(ax-3)(x-1)}{x-1} = -1$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 1} x(ax-3) = -1$$

よって

$$1 \cdot (a-3) = -1$$

$$a - 3 = -1$$

$$\therefore a = 2$$

よって

$$b = -a - 3$$

$$= -2 - 3 = -5$$

よって $f(x)$ は

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$$

④

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

よって

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0$$

と $x \rightarrow 1$ のとき $f(x)$ は $x(x-1)$ の

⑤より $x \rightarrow 1$ のとき $\rightarrow 0$ である。

$$f(x) = x(x-1)(ax+b)$$

と $x \rightarrow 1$ のとき $\rightarrow 0$ である。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(ax+b)$$

$$= (0-1)(a \cdot 0 + b)$$

$$= -b = 3$$

$$\therefore b = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(ax+b)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} x(ax+b)$$

$$= 1 \cdot (a+1+b) = -1$$

$$\therefore a+b = -1$$

$$\therefore a = 2, b = -3$$

よって

$$f(x) = x(x-1)(2x-3)$$

$$= x(2x^2 - 5x + 3)$$

$$= 2x^3 - 5x^2 + 3x$$

⑥

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x^2 + ax + b}{(x-2)^2} = c$$

$x \rightarrow 2$ のとき、分母 $\rightarrow 0$ であり

分子は有限である。

分母 $\rightarrow 0$ と $x \rightarrow 2$ のとき $\rightarrow 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x^2 + ax + b) = 0$$

$$2^3 - 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$$

$$b = -2a - 4$$

代入して

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + ax + (-2a - 4)}{(x-2)^2} = C$$

∴ 分子は $(x-2)^2$ で割り切れる。 $x=2$ を代入すると 0 になる。

分子は $x-2$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r} x^2 + x + (a+2) \\ x-2 \overline{) x^3 - x^2 + ax + (-2a-4)} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 + ax \\ \underline{x^2 - 2x} \\ (a+2)x + (-2a-4) \\ \underline{(a+2)x - 2(a+2)} \\ 0 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \{ x^2 + x + (a+2) \}}{(x-2)^2} = C$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x + (a+2)}{x-2} = C \quad (*)$$

左辺は $x=2$ で不定形になる。

分子は 0 になる。分母は 0 になる。

分子は 0 になる。

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + a + 2) = 0$$

$$2^2 + 2 + a + 2 = 0$$

$$a = -8$$

よって

$$b = -2a - 4$$

$$= -2(-8) - 4 = 12$$

したがって $(*)$ は $a = -8$ と代入して

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x-2} = C$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = C$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = C$$

$$2+3 = C$$

$$\therefore C = 5$$

よって

$$a = -8, b = 12, C = 5$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 + ax + b}{(x-2)^2} = C$$

分子は $(x-2)^2$ で割り切れる。

(*) 分子は $(x-2)^2$ で割り切れる。

分子は $(x-2)^2$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2 - 4x + 4 \overline{) x^3 - x^2 + ax + b} \\ \underline{x^3 - 4x^2 + 4x} \\ 3x^2 + (a-4)x + b \\ \underline{3x^2 - 12x + 12} \\ (a+8)x + (b-12) \end{array}$$

分子は $(x-2)^2$ で割り切れる。

$$(a+8)x + (b-12) = 0$$

よって $a+8=0, b-12=0$

$$a+8=0, b-12=0$$

$$\therefore a = -8, b = 12$$

<以下同様>

[31]

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\left(\frac{1}{1-0-1} = \frac{1}{-0} = -\infty \right)$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^2-3x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x(x-3)} = -\infty$$

$$\left(\frac{-0-1}{-0(-0-3)} = \frac{-1}{-0(-3)} = -\frac{1}{0} = -\infty \right)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}+0} \sqrt{2x+1}$$

$$= \sqrt{2(-\frac{1}{2})+1} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x}$$

$x \rightarrow 0$ 左側極限

なので、 $x < 0$ と仮定。

$$\left(\frac{0}{\rightarrow} \right)$$

よって $|x| = -x$ と仮定。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+2}{3x+6}$$

$x \rightarrow -2-0$ 左側極限なので、

$x < -2$ と仮定。

と仮定

$$x < -2 \Leftrightarrow x+2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 3x+6 < 0$$

と仮定。

$$|3x+6| = -(3x+6)$$

と仮定。ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x+2}{3x+6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2-0} \left\{ \frac{x+2}{-(3x+6)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2-0} \left(-\frac{1}{3} \right) \frac{x+2}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2-0} \left(-\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$x \rightarrow -1-0$ 左側極限なので

$$\left(\begin{array}{c} y=x^2-1 \\ x \end{array} \right)$$

$x < -1$ と仮定。

x^2-1 は正の数。

$$\text{よって } |x^2-1| = x^2-1$$

よ、そのまま絶対値は、はきかず。

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty$$

$$\left(-\frac{1}{-1-0+1} = -\frac{1}{0} = -\infty \right)$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$x \rightarrow -1+0$ 右側極限

$$\left(\begin{array}{c} \text{graph} \\ x \rightarrow -1+0 \end{array} \right)$$

ゆえに $-1 < x < 1$ と仮定。

x^2-1 は負の数。

$$\text{よって } |x^2-1| = -(x^2-1)$$

ゆえに (-1) はきかず。

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+0} \left\{ \frac{x-1}{-(x^2-1)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+0} \left\{ -\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = -\infty$$

$$\left(-\frac{1}{-1+0+1} = -\frac{1}{0} = -\infty \right)$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$x \rightarrow 1-0$ 左側極限

$$\left(\begin{array}{c} \text{graph} \\ x \rightarrow 1-0 \end{array} \right)$$

ゆえに $-1 < x < 1$ と仮定。

x^2-1 は負の数。

$$\text{よって } |x^2-1| = -(x^2-1)$$

ゆえに (-1) はきかず。

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{|x^2-1|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \left\{ \frac{x-1}{-(x^2-1)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \left\{ \frac{x-1}{-(x-1)(x+1)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(-\frac{1}{x+1} \right)$$

$$= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(9)

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{|x^2-1|}$$

$x \rightarrow (1+0)$ より右側極限

$$\left(\text{graph of } y=x^2-1 \text{ for } x>1 \right)$$

よて $x>1$ なのて.

x^2-1 は正の数になる。

ゆえに

$$|x^2-1| = x^2-1$$

とそのまま中身がでてくる。

ゆえに

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{|x^2-1|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

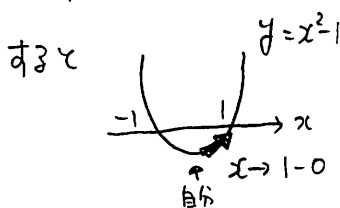
$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

おまけ

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{|x^2-1|} \text{ と } |x-1|=0 \text{ かつ } x \neq 1 \text{ と}$$

$x \rightarrow 1-0$ とは $x=1$ の左側から自分へ
($x=1$ より少しだけ小さい)

$x=1$ は (0) かつ $x \neq 1$ と考えて



グラフより $y=x^2-1$ のグラフ上で

x 軸より下の部分には自分へいる。

($-1 < x < 1$ の部分)

ゆえに $x \rightarrow 1-0$ と考えているときは

x^2-1 の計算結果は負の数

と考えているので、問題文の

$|x^2-1|$ は絶対値の中身が

負である場合はそれを直す。

自分の考えている場所では

問題文で与えられている

どのように変換させたのか

考えながら、極限の処理をする。

おまけ

解答に書いてあるように

$$\frac{1}{0} = \infty \text{ と } \frac{-1}{0} = -\infty \text{ と計算できる。}$$

つまり、符号の差だけ異なる

目で見てわかる。

$$(-0)^3 = -0^3 = -0$$

$$\frac{+2}{+0 \cdot (-1)} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

など。

32

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3}$$

右側極限 $x \rightarrow 1^+$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{(x-1)^3} = +\infty$$

$$\left(\frac{1}{(1+0-1)^3} = \frac{1}{(+0)^3} = \frac{1}{+0} = +\infty \right)$$

左側極限 $x \rightarrow 1^-$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(x-1)^3} = -\infty$$

$$\left(\frac{1}{(1-0-1)^3} = \frac{1}{(-0)^3} = -\frac{1}{0} = -\infty \right)$$

よって片側極限が一致しない
(不一致)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^3} \text{ は存在しない}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2-x}$$

右側極限 $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x-2}{x(x-1)} = +\infty$$

$$\left(\frac{+0-2}{+0(+0-1)} = \frac{(-2)}{+0(-1)} = +\frac{2}{0} = +\infty \right)$$

左側極限 $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x-2}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{x-2}{x(x-1)} = -\infty$$

$$\left(\frac{-0-2}{-0(-0-1)} = \frac{-2}{-0(-1)} = -\frac{2}{0} = -\infty \right)$$

よって片側極限が一致しない

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x^2-x} \text{ は存在しない}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$$

右側極限 $x \rightarrow 2^+$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$$

$x \rightarrow 2+0$ 时 $x > 2$ であるから
 $x-2$ は正の数である。

$$\therefore |x-2| = x-2$$

よって分子が3桁まで出てくる。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{|x-2|}{(x-2)^2} &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x-2}{(x-2)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{x-2} = \infty \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2+0-2} = \frac{1}{+0} = +\infty \right)$$

左側極限 $x \rightarrow 2^-$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$$

$x \rightarrow 2-0$ 时 $x < 2$ であるから
 $x-2$ は負の数である。

$$\therefore |x-2| = -(x-2)$$

よって分子が3桁まで出てくる
絶対値が1桁まで出てくる

よって

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{-(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2-0} \left(\frac{-1}{x-2} \right) = \infty$$

$$\left(\frac{-1}{2-0-2} = \frac{-1}{-0} = \frac{1}{+0} = +\infty \right)$$

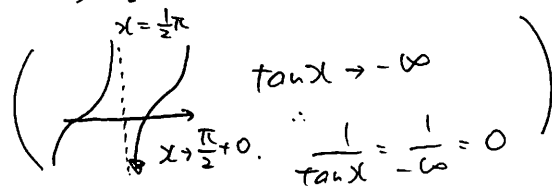
よって片側極限が一致しない

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{(x-2)^2} \text{ は存在しない}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x}$$

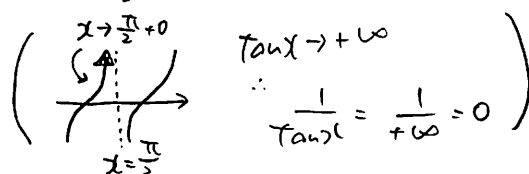
右側極限 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{\tan x} = 0$$



左側極限 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\tan x} = 0$$



よって片側極限が一致しない

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan x} = 0$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$$

右側極限 $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sin x} = \infty$$

$$\left(\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \text{Graph of } y = \sin x \text{ near } x=0 \\
 \text{Arrow pointing to the right from } 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x \rightarrow +0 \quad x \rightarrow +0 \text{ 附近} \\
 \sin x \text{ は} \\
 0.1, 0.01, 0.001, \dots \\
 \text{と } 0 \text{ へ近づいていく} \\
 \therefore \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{+0} = +\infty
 \end{array}
 \end{array} \right)$$

左側極限 $x \rightarrow -0$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

$$\left(\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \text{Graph of } y = \sin x \text{ near } x=0 \\
 \text{Arrow pointing to the left from } 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x \rightarrow -0 \text{ 附近} \\
 \sin x \text{ は} \\
 -0.1, -0.01, -0.001, \dots \\
 \text{と } 0 \text{ へ近づいていく} \\
 \therefore \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-0} = -\infty
 \end{array}
 \end{array} \right)$$

以上より、片側極限が一致しない。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} \text{ は存在しない。}$$

33

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} [x] = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 2-0 \text{ 時} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \leftarrow \end{array} \\ x = 1.9 \dots [1.9] = 1 \\ x = 1.99 \dots [1.99] = 1 \\ x = 1.999 \dots [1.999] = 1 \\ \vdots \\ \downarrow \\ \text{極限値} 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 3-0 \text{ 時} \\ \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \hline \leftarrow \end{array} \\ x = 2.9 \dots [2.9] = 2 \\ x = 2.99 \dots [2.99] = 2 \\ x = 2.999 \dots [2.999] = 2 \\ \downarrow \\ \text{極限値} 2 \end{array} \right)$$

ゆえに、片側極限が一致しないから、
(存在しない)。

$$\lim_{x \rightarrow 3} [x] \text{ は存在しない。}$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 1+0 \text{ 時} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{cc} [3x] & [x] \\ x = 1.1 \Rightarrow [3.3] & [1.1] \\ \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 3 & \quad \quad \quad 1 \\ x = 1.01 \Rightarrow [3.03] & [1.01] \\ \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 3 & \quad \quad \quad 1 \\ x = 1.001 \Rightarrow [3.003] & [1.001] \\ \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 3 & \quad \quad \quad 1 \end{array} \\ \text{極限値} 3 & \quad \quad \quad 1 \end{array} \right)$$

左側極限

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} ([3x] - [x])$$

$$\begin{aligned} & \text{は} \\ & \lim_{x \rightarrow 1-0} ([3x] - [x]) \\ & = 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -3+0} [x] = -3$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow -3+0 \text{ 時} \\ \begin{array}{c} -3 \quad -2 \\ \hline \leftarrow \end{array} \\ x = -2.9 \dots [-2.9] = -3 \\ x = -2.99 \dots [-2.99] = -3 \\ x = -2.999 \dots [-2.999] = -3 \\ \downarrow \\ \text{極限値} -3 \end{array} \right)$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - [x])$$

$$\begin{aligned} & \text{右側極限 } \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x - [x]) \\ & \text{は } \lim_{x \rightarrow 1+0} [x] = 1 \text{ ではないから。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1+0} (2x - [x]) \\ & = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{左側極限 } \lim_{x \rightarrow 1-0} (2x - [x])$$

$$\text{は } \lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = 0 \text{ ではないから。}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1-0} (2x - [x]) \\ & = 2 \cdot 1 - 0 = 2 \end{aligned}$$

よって、片側極限が一致しないから、
(存在しない)。

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x - [x]) \text{ は}$$

$$\text{存在しない。}$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 1-0 \text{ 時} \\ \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \hline \leftarrow \end{array} \\ \begin{array}{cc} [3x] & [x] \\ x = 0.9 \Rightarrow [2.7] & [0.9] \\ \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 2 & \quad \quad \quad 0 \\ x = 0.99 \Rightarrow [2.97] & [0.99] \\ \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 2 & \quad \quad \quad 0 \\ x = 0.999 \Rightarrow [2.997] & [0.999] \\ \quad \quad \quad \downarrow & \quad \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad 2 & \quad \quad \quad 0 \end{array} \\ \text{極限値} 2 & \quad \quad \quad 0 \end{array} \right)$$

よって

片側極限が一致しないから、

$$\lim_{x \rightarrow 1} ([3x] - [x]) = 2$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 1} ([3x] - [x])$$

$$\text{右側極限 } \lim_{x \rightarrow 1+0} ([3x] - [x])$$

は

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} ([3x] - [x]) = 3 - 1 = 2$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 3} [x] \text{ は}$$

$$\text{右側極限 } \lim_{x \rightarrow 3+0} [x] \text{ は}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} [x] = 3$$

$$\left(\begin{array}{l} x \rightarrow 3+0 \text{ 時} \\ \begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \hline \leftarrow \end{array} \\ x = 3.1 \dots [3.1] = 3 \\ x = 3.01 \dots [3.01] = 3 \\ x = 3.001 \dots [3.001] = 3 \\ \downarrow \\ \text{極限値} 3 \end{array} \right)$$

$$\text{左側極限 } \lim_{x \rightarrow 3-0} [x] \text{ は}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} [x] = 2$$

34

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - 5}{x^2 - 2x - 1}$$

1/2. 1/2 7. x^2 1.7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{0 - 0}{1 - 0 - 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5x}{-x^3 + 3x^2 + 1}$$

1/2. 1/2 7. x^3 1.7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^3} - \frac{5x}{x^3}}{-1 + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}}{-1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{0 - 0}{-1 + 0 + 0} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 3}{x^2 - x + 2}$$

1/2. 1/2 7. x^2 1.7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{4 + 0 - 0}{1 - 0 + 0} = 4$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{-3x + 2}$$

1/2. 1/2 7. x^2 1.7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^2}{x} + \frac{6x}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{-3x}{x} + \frac{2}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 6 - \frac{5}{x}}{-3 + \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\infty}{-3}$$

$$\left(\frac{\infty + 6 - 0}{-3 + 0} \right)$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + x + 5}{x^2 + 3x - 2}$$

1/2. 1/2 7. x^3 1.7.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{-2x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}}$$

$$= \frac{\infty}{1}$$

$$\left(\frac{-(-\infty) + 0 + 0}{1 + 0 - 0} \right) \rightarrow +\infty$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - 9x^2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 - \frac{9x^2}{x^3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 - \frac{9}{x} \right)$$

$$= \frac{\infty}{1}$$

$$\left(\begin{array}{cc} x^3 (2 - \frac{9}{x}) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \infty \quad 2 \end{array} \right)$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 + 3x - x^3)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{3x}{x^3} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 1 \right)$$

$$= \frac{\infty}{1}$$

$$\left(\begin{array}{cc} x^3 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{3}{x^2} - 1 \right) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ (-\infty)^3 \quad -1 \\ -\infty \quad \swarrow \quad +\infty \end{array} \right)$$

35

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \text{ について}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

が成り立つので

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

よって、 $|x| \leq |x|$ が成り立つ

から

$$0 \leq |x| \leq |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

よって

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

よって、はさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| x \sin \frac{1}{x} \right| = 0$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

が成り立つ。

(2)

$x \rightarrow +0$ の時と $x \rightarrow -0$

の時を場合分けして

証明するが、(証明)なので

系に対して

はさみうちの原理を用いた。

(1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} \text{ について}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

が成り立つので、 $x \rightarrow 0$ で割ると

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

が成り立つ。よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = 0$$

よって、はさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x} = 0$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} \text{ について}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{ が成り立つので}$$

よって x^2 で割ると

よって、 x^2 は正の数なので、

不等式の両辺を x^2 で割ると

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = 0$$

よって、はさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + [2x]}{x+1} \text{ について}$$

$$[2x] \leq 2x < [2x] + 1$$

が成り立つので

$$2x - 1 < [2x] \leq 2x$$

が成り立つ。よって x を

足して

$$x + (2x - 1) < x + [2x] \leq x + 2x$$

よって

$$3x - 1 < x + [2x] \leq 3x$$

よって $x+1$ で割ると ($x+1 \neq 0$)

$$\frac{3x-1}{x+1} < \frac{x+[2x]}{x+1} \leq \frac{3x}{x+1}$$

が成り立つ。

よって

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3-0}{1+0} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{3}{1+0} = 3$$

よって、はさみうちの原理から

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + [2x]}{x+1} = 3$$

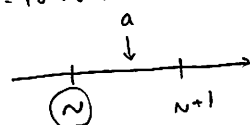
(5) (a) について

かゝる n が存在する

[a] の値は n である

a が、数直線上で、どの整数とどの整数の

間にはさまれているか



その時、 n は a の整数部分が [a] の値

である。よって、 n は N である

[a] の値である。

$$[a] = n$$

である。よって、 a は N と $N+1$ の

間にはさまる。

$$N \leq a < N+1$$

が成り立つので、この不等式に $N = [a]$

を代入すると

$$[a] \leq a < [a] + 1$$

が成り立つ。よって

$$[a] \leq a$$

また

$$a < [a] + 1 \Rightarrow a - 1 < [a]$$

よって

$$a - 1 < [a] \leq a$$

が成り立つ。

36

(1)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+4} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{x+2})^2}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4 - (x+2)}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x+4} + \sqrt{x+2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{分子} \cdot \text{分母} \\ \text{分子} \cdot \text{分母} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}} + \sqrt{1+\frac{2}{x}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = 0$$

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (x+1 - \sqrt{x^2+x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1 - \sqrt{x^2+x})(x+1 + \sqrt{x^2+x})}{x+1 + \sqrt{x^2+x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 - (x^2+x)}{x+1 + \sqrt{x^2+x}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2+2x+1) - (x^2+x)}{x+1 + \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{x+1 + \sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2-3x+1) - x^2}{\sqrt{x^2-3x+1} - x}$$

$$= \frac{1+0}{1+0+\sqrt{1+0}}$$

$$= \frac{1}{1+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x+1}{\sqrt{x^2-3x+1} - x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{3x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{x} - \frac{x}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{-\sqrt{x^2}} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1}$$

$$= \frac{-3+0}{-\sqrt{1-0+0}-1}$$

$$= \frac{-3}{-1-1} = \frac{3}{2}$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x})^2 - (\sqrt{x^2+1})^2}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x - (x^2+1)}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+1}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{分子} \cdot \text{分母} \\ \text{分子} \cdot \text{分母} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{2-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{2}{1+1} = 1$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x+1} + x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2-3x+1} + x)(\sqrt{x^2-3x+1} - x)}{\sqrt{x^2-3x+1} - x}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-3x+1} + x)$$

令 $x = -t$ 且 $t \rightarrow \infty$

$$\sqrt{x^2-3x+1} + x$$

$$= \sqrt{(-t)^2-3(-t)+1} + (-t)$$

$$= \sqrt{t^2+3t+1} - t$$

于是

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+3t+1} - t)$$

于是 $\lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+3t+1} - t) = 0$

(5)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x + \sqrt{4x^2 - 3x})(2x - \sqrt{4x^2 - 3x})}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x)^2 - (\sqrt{4x^2 - 3x})^2}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - (4x^2 - 3x)}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{分子・分母} \\ \text{に } x \text{ を} \\ \text{割る} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{\sqrt{4x^2 - 3x}}{x}} \quad \text{①}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2 - \frac{\sqrt{4x^2 - 3x}}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2 + \sqrt{4 - \frac{3}{x}}}$$

$$= \frac{3}{2 + \sqrt{4 - 0}} = \frac{3}{2 + 2} = \frac{3}{4}$$

① $x \rightarrow -\infty$ のとき、 x は負の数になる。

$$x = \sqrt{x^2}$$

1 は成り立たない。

$$(x = -2 \text{ のとき } -2 = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2)$$

$\sqrt{x^2} = |x|$ であり、 x が負の数になると

0317 $|x| = -x$ となる。

$$\sqrt{x^2} = -x$$

7 4 3 8 3. x は負の数になる。

(6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + 1})(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{(\sqrt{x^2 + x + 1})^2 - (\sqrt{x^2 + 1})^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + x + 1 - (x^2 + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right)$$

$$= \sqrt{1 + 0 + 0} + \sqrt{1 + 0} = 2$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{x^2 - (\sqrt{x^2 - a^2})^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2 x}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a^2 x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2}{1 + \sqrt{\frac{x^2 - a^2}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}}$$

$$= \frac{a^2}{1 + \sqrt{1 - 0}}$$

$$= \frac{1}{2} a^2$$

[37]

(1)
i. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 8}{x - 3} = 2$

分子・分母を x^2 で割る

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{bx}{x^2} + \frac{8}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b + \frac{8}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2 \dots \textcircled{1}$$

ここで $\textcircled{1}$ の (左辺) は ∞ になる

$a > 0$ ならば (左辺) $\rightarrow \infty$

$a < 0$ ならば (左辺) $\rightarrow -\infty$

したがって (右辺) の値は有限であるから $a = 0$

よって $a = 0$ とする。このとき $\textcircled{1}$ は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{8}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = 2$$

$$\therefore \frac{b + 0}{1 - 0} = 2$$

$$\text{よって } b = 2$$

以上より

$$\underline{a = 0, b = 2}$$

ii.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} + ax + b) = 0 \dots \textcircled{2}$$

$a \geq 0$ だと $\textcircled{2}$ の (左辺) は ∞

となるから (右辺) の値は有限であるから $a < 0$ とする。

$$\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{\infty} + \underbrace{ax + b}_{\infty} \right) \right)$$

$$(\text{分子} \cdot \text{分母}) = \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b)$$

で割る

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + ax + b) \cdot \sqrt{x^2 - 1} - (ax + b) \cdot \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1} - (ax + b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^2 - (ax + b)^2}{\sqrt{x^2 - 1} - (ax + b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1 - (a^2x^2 + 2abx + b^2)}{\sqrt{x^2 - 1} - (ax + b)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2)x^2 - 2abx - (1 + b^2)}{\sqrt{x^2 - 1} - (ax + b)}$$

分子・分母を x^2 で割る

(分母) の値は有限であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1 - a^2)x^2}{x^2} - \frac{2abx}{x^2} - \frac{1 + b^2}{x^2}}{\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} - \left(\frac{ax}{x} + \frac{b}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 - a^2) - \frac{2ab}{x} - \frac{1 + b^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \left(a + \frac{b}{x}\right)} \dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ の (左辺) は ∞ であるから

$\textcircled{3}$ の (左辺) は ∞ であるから

$1 - a^2 = 0$ とする。

$(1 - a^2)x^2$ の値は有限であるから

$x \rightarrow \infty$ のとき $\textcircled{3}$ の (左辺) は ∞ であるから

$\textcircled{3}$ の (左辺) は ∞ であるから

$$1 - a^2 = 0$$

$\therefore$

$$a = \pm 1$$

ここで $a < 0$ とするから

$$a = -1$$

$\textcircled{3}$ の (左辺) は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(-1)b - \frac{1 + b^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \left(-1 + \frac{b}{x}\right)} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2b - \frac{1 + b^2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} - \left(-1 + \frac{b}{x}\right)} = 0$$

$\therefore$

$$\frac{2b - 0}{\sqrt{1 - 0} - (-1 + 0)} = 0$$

よって

$$b = 0$$

以上より

$$\underline{a = -1, b = 0}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

(分子・分母) の値は有限であるから

$f(x)$ の値は有限であるから

$- \infty$ であるから

(2)

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x - 2}$$

ここで

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \dots \textcircled{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \dots \textcircled{5}$$

よって $\textcircled{4}$ の (左辺) は 0 であるから

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 + x - 2} = 1$$

分子・分母を x^2 で割る

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1 \dots \textcircled{6}$$

よって $a = 0$ とする。

(左辺) は ∞ であるから

よって $a = 0$ とする。

$\textcircled{6}$ の (左辺) は

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$\therefore$

$$\frac{b + 0 + 0}{1 + 0 - 0} = 1$$

$$\text{よって } b = 1$$

$a = 0, b = 1$ とするから

$$f(x) = x^2 + cx + d$$

$$\textcircled{4} \text{ 1} = \pi \text{ 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + cx + d}{x^2 + x - 2} = 0 \dots \textcircled{7}$$

$\therefore$ ⑦ の左辺は $x \rightarrow 1$ の時

$(\frac{0}{0}) \rightarrow 0$ となり、右辺が有限

の値で収束する。

$(\frac{0}{0}) \rightarrow 0$ になるしかない。

$\therefore$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + cx + d) = 0$$

$$\therefore 1 + c + d = 0$$

$$\text{より } d = -c - 1 \dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7} \text{ 1} = \pi \text{ 12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + cx + (-c-1)}{x^2 + x - 2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+c+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+c+1}{x+2} = 0$$

$$\text{より } \frac{1+c+1}{1+2} = 0$$

$$\text{したがって } c = -2$$

$$\textcircled{8} \text{ より}$$

$$d = -(-2) - 1$$

$$= 2 - 1$$

$$= 1$$

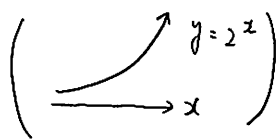
したがって

$$a=0, b=1, c=-2, d=1$$

38

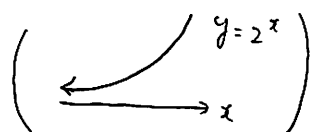
(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$$



(2)

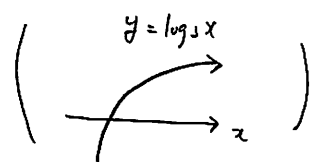
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

(B11) の 1x- ∞

$$(2^{-\infty} = (\frac{1}{2})^{\infty} = 0)$$

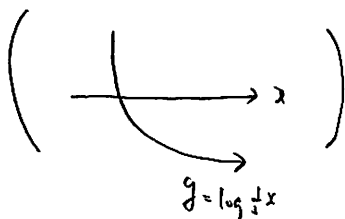
(3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 x = \infty$$



(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{3}} x = -\infty$$

(B11) の 1x- ∞

B の 変換

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{3}} \infty &= \frac{\log_3 \infty}{\log_3 \frac{1}{3}} \\ &= \frac{\log_3 \infty}{-1} = -\infty \end{aligned}$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x^2}} = \infty$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 \text{ の } \frac{1}{x^2} & \\ \frac{1}{x^2} &\rightarrow \infty \\ \text{よって } 2^{\frac{1}{x^2}} &= 2^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 \text{ の } \frac{1}{x^2} & \\ \frac{1}{x^2} &\rightarrow \infty \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = 0 \end{aligned}$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow 0 \text{ の } \frac{1}{x} & \\ \frac{1}{x} &\rightarrow -\infty \\ \text{よって } 3^{\frac{1}{x}} &\rightarrow 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0 \end{aligned}$$

(8)

$$\lim_{x \rightarrow -1} 3^{\frac{1}{x+1}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} 3^{\frac{1}{x+1}} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} 3^{\frac{1}{x+1}} = 0$$

よって片側極限は

一致しない。

$$\lim_{x \rightarrow -1} 3^{\frac{1}{x+1}} \text{ は存在しない。}$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow -1+0 \text{ の } \frac{1}{x+1} & \\ \frac{1}{x+1} &\rightarrow +\infty \\ \therefore 3^{\frac{1}{x+1}} &= 3^{\infty} = \infty \end{aligned}$$

 $x \rightarrow -1-0 \text{ の } \frac{1}{x+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} &\rightarrow -\infty \\ \therefore 3^{\frac{1}{x+1}} &= 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = 0 \end{aligned}$$

(9)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

よって片側極限は一致しない。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \text{ は存在しない。}$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow +0 \text{ の } \frac{1}{x} & \\ \frac{1}{x} &\rightarrow +\infty \\ \therefore \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1+\infty} = 0 \end{aligned}$$

 $x \rightarrow -0 \text{ の } \frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$$

よって

$$1+2^{\frac{1}{x}} = 1+2^{-\infty}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{\infty}} = 1+0 = 1$$

39

(1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2^x - 3^x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left(\frac{2^x}{3^x} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^x - 1 \right\}$$

$$= -\infty$$

$$\left(\begin{array}{c} 3^x \\ \downarrow \\ \infty \end{array} \left\{ \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^x - 1}{0 - 1 = -1} \right\} \right)$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (3^x - 2^x)$$

$$= \infty - \infty = \infty$$

$$\left(\begin{array}{c} \lim_{x \rightarrow \infty} 3^x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty \end{array} \right)$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 5^x}{4^x + 5^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x}{5^x} = \frac{4}{5} < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4^x}{5^x} - 1}{\frac{4^x}{5^x} + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4}{5} \right)^x - 1}{\left(\frac{4}{5} \right)^x + 1}$$

$$= \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 (4x+3) + 2 \log_2 (x+1) - 3 \log_2 x \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 (4x+3) + \log_2 (x+1)^2 - \log_2 x^3 \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{(4x+3)(x+1)^2}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{4x+3}{x} \right) \left(\frac{x+1}{x} \right)^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(4 + \frac{3}{x} \right) \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2$$

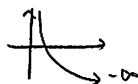
$$= \log_2 (4+0)(1+0)^2$$

$$= \log_2 4 = 2$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_{0.1} (1 + 0.5^x) = -\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} 1 + 0.5^{-\infty} = 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{-\infty} \\ = 1 + 2^{\infty} = \infty \\ \therefore \log_{0.1} \infty = -\infty \end{array} \right)$$



(6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x - \left(\frac{1}{2} \right)^{-x}}{\left(\frac{1}{2} \right)^x + \left(\frac{1}{2} \right)^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x - (2^{-1})^{-x}}{\left(\frac{1}{2} \right)^x + (2^{-1})^{-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^x - 2^x}{\left(\frac{1}{2} \right)^x + 2^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^x} \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1}{\frac{1}{2^x} \left(\frac{1}{2} \right)^x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^x} \left(\frac{1}{2} \right)^x - 1}{\frac{1}{2^x} \left(\frac{1}{2} \right)^x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4} \right)^x - 1}{\left(\frac{1}{4} \right)^x + 1}$$

$$= \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1$$

(7)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_9 x + \log_3 (\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-1}) \}$$

$$\frac{1}{\log_3 9} = \frac{1}{2}$$

$$\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{\log_3 x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \log_3 x$$

$$= \log_3 x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_3 \sqrt{x}$$

5.7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_3 \sqrt{x} + \log_3 (\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-1}) \}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \sqrt{x} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \sqrt{x} \cdot \frac{(\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x-1})(\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1})}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \sqrt{x} \cdot \frac{(3x+1) - (3x-1)}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1}} \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3x+1} + \sqrt{3x-1}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{2}{\sqrt{\frac{3x+1}{x}} + \sqrt{\frac{3x-1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{2}{\sqrt{3 + \frac{1}{x}} + \sqrt{3 - \frac{1}{x}}}$$

$$= \log_3 \frac{2}{\sqrt{3+0} + \sqrt{3-0}}$$

$$= \log_3 \frac{2}{2\sqrt{3}} = \log_3 \frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

40

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-2x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-2x)}{-2x} \cdot (-2) \\
 &= 1 \cdot (-2) = -2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\tan x}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}} \\
 &= \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot \frac{1}{\cos 0}} = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 3
 \end{aligned}$$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

tan x の x に近づくと 1 に近づく。

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x - \sin x}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{x} - \frac{\sin x}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \cdot 2 - \frac{\sin x}{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{\cos 2x} - \frac{\sin x}{x} \right) \\
 &= 1 \cdot \frac{2}{\cos 0} - 1 \\
 &= 1 \cdot \frac{2}{1} - 1 = 2 - 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)(1 + \cos 3x)}{x^2(1 + \cos 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2(1 + \cos 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 3x} \\
 &= (1 \cdot 3)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 0} \\
 &= 9 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(3x)^2} \cdot 3^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 9 = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \\
 & \text{tan x の x に近づくと 1 に近づく。}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin x}{\sin 5x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{\sin 5x} + \frac{\sin x}{\sin 5x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} + \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5} + \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5} + \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 5} \\
 &= \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} (1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{1}{\cos x} (1 + \cos x)}{\sin x} \quad \left(\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \end{array} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} (1 + \cos x)}{\frac{\sin x}{x}} \\
 &= \frac{\frac{1}{\cos 0} (1 + \cos 0)}{1} \\
 &= \frac{1}{1} (1 + 1) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{1 - \cos x} \quad \left(\begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \frac{1}{\cos x} \rightarrow 1 \end{array} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan x}{x}}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2
 \end{aligned}$$

(4)

(1)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{x^3 \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2 \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2 (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos 0} \\
 &= 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \\
 & x^0 = \frac{\pi}{180} x
 \end{aligned}$$

78の2.

$$\begin{aligned}
 & 360^\circ : 2\pi = x^0 : ? \\
 & 2\pi \cdot x^0 = ? \cdot 360^\circ \\
 & ? = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot x^0 \\
 & = \frac{\pi}{180} x
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{180}x\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)}{x} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)}{\frac{\pi}{180}x} \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)}$$

$$= 1 \cdot \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{\cos 0}$$

$$= \frac{\pi}{180}$$

おまけ

x^0 は度数法とラジアン法の関係。

30度法とラジアン法は等しい。

$$30^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{6}$$

78の2。

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi$$

78の2。78の2を参考。

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x (1 - \cos 2x)}{\tan^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x (1 - \cos 2x)}{x^3} \cdot \frac{\tan^3 x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{x} \cdot \frac{1 - \cos 2x}{x^2}}{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{x^2}}{\left(\frac{\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{x}\right)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{1 - \cos^2 2x}{x^2}}{\left(\frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \frac{\sin^2 2x}{x^2}}{\left(\frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^2}{\left(\frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2\right)^2}{\left(\frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right)^3}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2)^2}{\left(1 \cdot \frac{1}{\cos 0}\right)^3}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot (1 \cdot 2)^2}{\left(1 \cdot \frac{1}{1}\right)^3}$$

$$= 3 \cdot 2^2 = 12$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} \sin(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3})$$

$$t = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3} \quad t \rightarrow 0$$

$x \rightarrow \infty$ のとき

$$t = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+3})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{(x+2) - (x+3)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}}$$

$$= \frac{x+2 - (x+3)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}}$$

(42)

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

$$x - \pi = t \text{ 且 } t < 0$$

$$x \rightarrow \pi \text{ のとき, } t \rightarrow 0 \text{ より } t < 0$$

$$\text{また, } x = t + \pi \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(t + \pi) \\ &= -\sin t \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{(公式)} \\ &\sin(0 + \pi) \\ &= -\sin 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} \\ &= -1 \end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$$

$$x - \frac{\pi}{2} = t \text{ 且 } t < 0$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ のとき, } t \rightarrow 0 \text{ より } t < 0$$

$$\text{また, } x = t + \frac{\pi}{2} \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} \tan x &= \tan(t + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{\tan t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{(公式)} \\ &\tan(0 + \frac{\pi}{2}) \\ &= -\frac{1}{\tan 0} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot (-\frac{1}{\tan t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{\tan t}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{\frac{\sin t}{\cos t}}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{t}{\sin t} \cdot \cos t\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\frac{\sin t}{t}} \cdot \cos t\right) \end{aligned}$$

$$= \left(-\frac{1}{1} \cdot \cos 0\right)$$

$$= -1$$

(3)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1}$$

$$x - 1 = t \text{ 且 } t < 0$$

$$x \rightarrow 1 \text{ のとき, } t \rightarrow 0 \text{ より } t < 0$$

$$\text{また, } x = 1 + t \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \sin \pi(1 + t) \\ &= \sin(\pi + \pi t) \\ &= -\sin \pi t \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \pi t}{\pi t} \cdot \pi \\ &= -1 \cdot \pi = -\pi \end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{2x}$$

$$t = \frac{1}{2x} \text{ 且 } t < 0$$

$$x \rightarrow \infty \text{ のとき, } t \rightarrow +0$$

$$\text{また, } x = \frac{1}{2t} \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{2x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2t} \sin t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(5)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x}$$

$$x - \pi = t \text{ 且 } t < 0$$

$$x \rightarrow \pi \text{ のとき, } t \rightarrow 0 \text{ より } t < 0$$

$$\text{また, } x = t + \pi \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos(t + \pi) \\ &= -\cos t \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{(公式)} \\ &\cos(0 + \pi) \\ &= -\cos 0 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)^2}{1 + \cos x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1 - \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{(1 - \cos t)(1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{1 - \cos^2 t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1 + \cos t)}{\sin^2 t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos t}{\frac{\sin^2 t}{t^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos t}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} \\ &= \frac{1 + \cos 0}{1^2} = 2 \end{aligned}$$

43

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax+b}{\cos x} = \frac{2}{3} \dots (1)$$

①より、 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ のとき、極限値が有限で存在する。

有限で存在する。

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (ax+b) = 0$$

$$\therefore \frac{\pi}{2}a + b = 0$$

$$\therefore b = -\frac{\pi}{2}a \dots (2)$$

②より①に代入して

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax - \frac{\pi}{2}a}{\cos x} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{a(x - \frac{\pi}{2})}{\cos x} = \frac{2}{3} \dots (3)$$

ここで、 $x - \frac{\pi}{2} = t$ とおくと

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ のとき $t \rightarrow 0$ 。

また、 $x = t + \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\cos x = \cos(t + \frac{\pi}{2}) = -\sin t$$

よって③は

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{-\sin t} = \frac{2}{3}$$

したがって、 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{-\sin t} = \frac{2}{3}$

より、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-a}{\frac{\sin t}{t}} = \frac{2}{3}$$

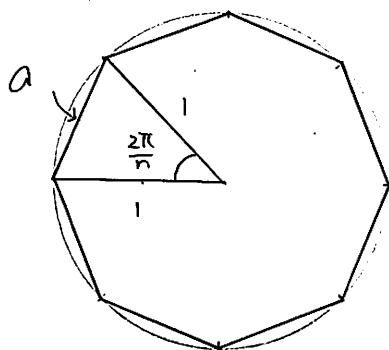
$$\therefore \frac{-a}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

$$(2) \text{より } b = -\frac{\pi}{2}(-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}\pi$$

$$a = -\frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}\pi$$

(2)



正n角の面積は

(2)より

2つの直角三角形は

それぞれが直角三角形で、

その2つの直角三角形は

合同であるから、

その2つの直角三角形は

(2)より

$$\begin{aligned} \text{面積} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

よって、正n角の面積は

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \times n \text{ (個)} \\ &= \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n} \dots (1)$$

(1)より

$$\frac{2\pi}{n} = x \text{ とおくと}$$

$n \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow 0$ である。

また、 $n = \frac{2\pi}{x}$ より①は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\pi}{x}}{2} \cdot \sin x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{x} \cdot \sin x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \pi \cdot \frac{\sin x}{x}$$

$$= \pi \times 1 = \pi$$

また、正n角の面積は (2)より

Qとすると、(2)より

$$L_n = Q \times n \text{ (個)}$$

また、余弦定理より

$$\begin{aligned} Q^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \\ &= 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \end{aligned}$$

$$= 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$= 2(1 - \cos \frac{2\pi}{n})$$

$$= 2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

$$= 4 \sin^2 \frac{\pi}{n}$$

$\therefore Q > 0$ より

$$Q = 2 \sin \frac{\pi}{n}$$

よって

$$L_n = (2 \sin \frac{\pi}{n}) \cdot n$$

$$= 2n \sin \frac{\pi}{n}$$

したがって、

$$\frac{\pi}{n} = t \text{ とおくと}$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } t \rightarrow 0$$

$$\text{また } n = \frac{\pi}{t} \text{ とおくと}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{t \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\pi}{t} \sin t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} 2\pi \cdot \frac{\sin t}{t}$$

$$= 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

おまけ 正六角形 1 = おまけ

$n \rightarrow \infty$ とすると 正六角形は

円の内接多角形に近づく。

つまり

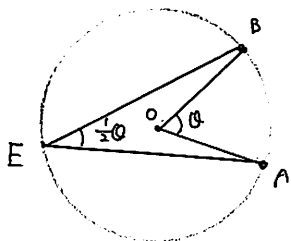
$$S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{円の内接多角形の面積}$$

$$L_n \longrightarrow \text{円の外接多角形の面積}$$

よって π が π の範囲内にある。

正確には π である。

44



(1)

半径 r , 中心角 θ の
弦 AB の長さ
の求め方は, 以下通り

$$\widehat{AB} = r\theta$$

また, 図のように, 点 E をとり
中心角と円周角の関係を利用する。

$$\angle BEA = \frac{1}{2} \angle BOA = \frac{1}{2} \theta$$

よって $\triangle BEA$ に正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin \angle BEA} = 2r$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= 2r \sin \angle BEA \\ &= 2r \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

(2) 求める。

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\widehat{AB}}{AB} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r\theta}{2r \sin \frac{1}{2}\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{2 \sin \frac{1}{2}\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{1}{2}\theta} = 1 \end{aligned}$$

方針

$\triangle OAB$ に余弦定理を用いてよい。

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \theta \\ &= r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos \theta \\ &= 2r^2 - 2r^2 \cos \theta \\ &= 2r^2 (1 - \cos \theta) \\ &= 2r^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$$AB > 0 \text{ より}$$

$$AB = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

したがって, 半径 r の円の中心角 θ の弧の長さ

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

より

$$2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

つまり, θ を $\frac{1}{2}\theta$ とし

おくと

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$$

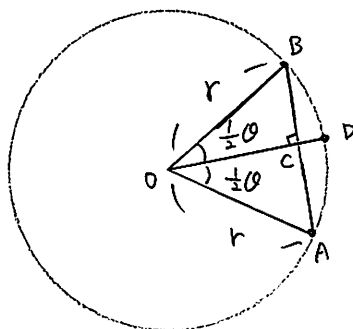
したがって, 求める

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

の証明は, 以下通り。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2} \cdot 2} \right)^2 \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2)



OD = 半径 = r である。

また $\triangle OAC$ において

$$\frac{OC}{OA} = \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{1} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \frac{OC}{r} = \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\text{よって } OC = r \cos \frac{\theta}{2}$$

したがって,

$$CD = OD - OC$$

$$= r - r \cos \frac{\theta}{2}$$

$$= r \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

よって

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{CD}{AB}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{\left(2r \sin \frac{\theta}{2} \right)^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{r \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right)}{4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{4r} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{4r} \cdot \frac{(1 - \cos \frac{\theta}{2})(1 + \cos \frac{\theta}{2})}{\sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{4r} \cdot \frac{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2} (1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

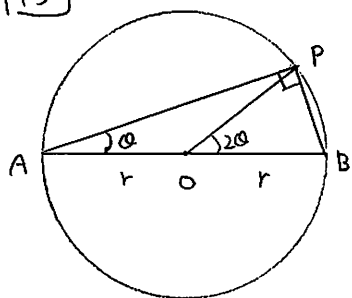
$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{4r} \cdot \frac{\cancel{\sin^2 \frac{\theta}{2}}}{\cancel{\sin^2 \frac{\theta}{2}} (1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{4r (1 + \cos \frac{\theta}{2})}$$

$$= \frac{1}{4r (1 + \cos 0)}$$

$$= \frac{1}{4r \cdot 2} = \frac{1}{8r}$$

45



$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot 2 \cos \theta$$

$$= 1 \cdot 2 \cos 0 = \underline{\underline{2}}$$

$\angle PAB = \theta$ とおく.

P が B に 限る $\theta < \frac{\pi}{2}$ とする

$\theta \rightarrow +0$ とおくと $\theta = \frac{\pi}{2}$ となる。

$\triangle APB$ の面積は 2112.

$$\frac{AP}{AB} = \frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \cos \theta$$

$$\therefore \frac{AP}{2r} = \cos \theta$$

よって

$$AP = 2r \cos \theta$$

421: $\triangle APB$ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$= 2r^2 \sin \theta \cos \theta \dots \textcircled{1}$$

また、おうぎ形 OBP の面積は 2112.

中心角 $\angle POB$ は、中心角と円周角

の関係より $\angle POB = 2\theta$.

よって 2112 より

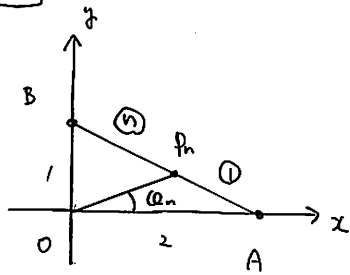
$$S_2 = \frac{1}{2} r^2 \cdot 2\theta \quad \left(\text{図} \triangle \text{より } S = \frac{1}{2} r^2 \theta \right)$$

$$= r^2 \theta \dots \textcircled{2}$$

①、②より $\frac{S_1}{S_2} \sim$ 極限値は

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{S_1}{S_2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2 \theta}$$

46



(1)

$\triangle OAB$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$$

また、 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$

である。

$$\triangle OAB = \triangle OAP_n + \triangle OBP_n$$

$$\therefore 1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OP_n \cdot \sin \theta_n + \frac{1}{2} \cdot OP_n \cdot OB \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta_n \right)$$

$\therefore$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot OP_n \cdot \sin \theta_n + \frac{1}{2} \cdot OP_n \cdot 1 \cdot \cos \theta_n$$

$\therefore$

$$1 = OP_n \sin \theta_n + \frac{1}{2} OP_n \cos \theta_n$$

両辺を2で割る

$$2 = 2 OP_n \sin \theta_n + OP_n \cos \theta_n$$

右辺に OP_n をくくると

$$2 = (2 \sin \theta_n + \cos \theta_n) OP_n$$

より

$$OP_n = \frac{2}{2 \sin \theta_n + \cos \theta_n} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また、} \frac{1}{AB} \cdot \sin \angle OAB = \frac{\frac{1}{AB}}{\frac{AB}{AB}} = \frac{OB}{AB}$$

$$\text{より、} AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ である。}$$

$$\sin \angle OAB = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \dots \textcircled{2}$$

また、(1)より、 $\triangle OAP_n$ において

正弦定理より



$$\frac{OP_n}{\sin \theta_n} = \frac{OA}{\sin \angle OAB}$$

$$\text{より、} 1 = \sin \theta_n \text{ となる。}$$

$$OP_n = \frac{OA}{\sin \angle OAB} \cdot \sin \theta_n$$

また、(1)、(2)より

$$OP_n = \frac{2}{2 \sin \theta_n + \cos \theta_n} \cdot \sin \theta_n$$

$$= \frac{2 \sin \theta_n}{2 \sin \theta_n + \cos \theta_n}$$

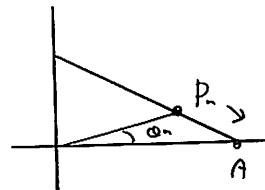
(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OP_n}{\theta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\theta_n} \cdot \frac{2 \sin \theta_n}{2 \sin \theta_n + \cos \theta_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} \cdot \frac{2 \sin \theta_n}{2 \sin \theta_n + \cos \theta_n} \quad \dots \textcircled{3}$$

$\therefore n \rightarrow \infty$ のとき、 $P_n \rightarrow A$ である。

また、 $\theta_n \rightarrow 0$ である。

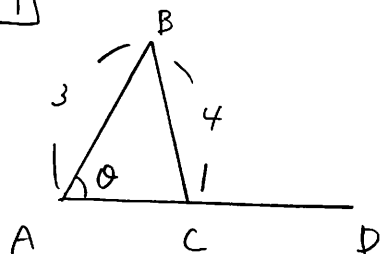


$$\text{よって、} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} \rightarrow 1 \text{ である。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{OP_n}{\theta_n} = 1 \cdot \frac{2 \sin 0}{2 \sin 0 + \cos 0}$$

$$= 1 \cdot \frac{2 \cdot 0}{0 + 1} = 0$$

47



(1)

$\triangle ABC$ に余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$$

$$\therefore 4^2 = 3^2 + AC^2 - 2 \cdot 3 \cdot AC \cdot \cos \theta$$

よって整理して

$$AC^2 - 6 \cos \theta \cdot AC - 7 = 0$$

解の公式より

$$AC = 3 \cos \theta \pm \sqrt{(3 \cos \theta)^2 + 7}$$

$$= 3 \cos \theta \pm \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}$$

ここで、 $AC > 0$ より

$$AC = 3 \cos \theta - \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}$$

は不適

($3 \cos \theta$ より $\sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}$ の方が大きいから)

よって

$$AC = 3 \cos \theta + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}$$

(2)

$$CD = AD - AC$$

$$= 7 - (3 \cos \theta + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})$$

$$= 4 - \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}$$

よって

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{CD}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{4 - \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(4 - \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})(4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})}{\theta^2 (4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{4^2 - (\sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})^2}{\theta^2 (4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{16 - (9 \cos^2 \theta + 7)}{\theta^2 (4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{9 - 9 \cos^2 \theta}{\theta^2 (4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7})}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{9}{4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}} \cdot \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{9}{4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{9}{4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2$$

$$= \frac{9}{4 + \sqrt{9 \cos^2 \theta + 7}} \cdot 1^2$$

$$= \frac{9}{4 + \sqrt{9 + 7}} \cdot 1^2$$

$$= \frac{9}{4 + \sqrt{16}} \cdot 1^2 = \frac{9}{4 + 4} = \frac{9}{8}$$

48

① 証明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \text{ となる} \right)$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5} \cdot 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}} \right\}^5 \\ &= e^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-2n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-2n}\right)^{(-2n) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{-2n}\right)^{-2n} \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \end{aligned}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{3n}$$

1. 1/n の n 倍は 1 となる

1/n の n 倍は 3n となる

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{3n-1}{3n}}\right)^{3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\frac{3n}{3n} - \frac{1}{3n}}\right)^{3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{3n}}{\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{3n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-3n}\right)^{3n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-3n}\right)^{-3n \cdot (-1)}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left\{ \left(1 + \frac{1}{-3n}\right)^{-3n} \right\}^{-1}}$$

$$= \frac{1}{e^{-1}} = e$$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$1 = \frac{1}{n} \text{ となる } \frac{1}{n} = x \text{ と } x < 1$$

$$n \rightarrow \infty \text{ のとき } x \rightarrow 0 \text{ となる}$$

$$\frac{1}{n} = x \text{ となる } n = \frac{1}{x} \text{ となる}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{--- ①}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$1 = \frac{1}{n} \text{ となる } \frac{1}{n} = x \text{ と } x < 1$$

$$n \rightarrow -\infty \text{ のとき } x \rightarrow -0 \text{ となる}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{--- ②}$$

1. 1/n の n 倍は 1 となる

1/n の n 倍は 3n となる

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

(5)

$$\lim_{h \rightarrow 0} (1+2h)^{\frac{3}{h}}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (1+2h)^{\frac{1}{2h} \cdot 6}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ (1+2h)^{\frac{1}{2h}} \right\}^6$$

$$= e^6$$

(6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ \log_2(x+2) - \log_2 x \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_2 \frac{x+2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(\frac{x+2}{x} \right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}} \right)^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}} \right)^{\frac{x}{2} \cdot 2}$$

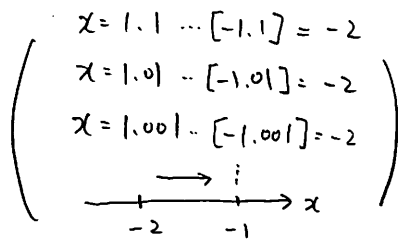
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}} \right)^{\frac{x}{2}} \right\}^2$$

$$= \log_2 e^2$$

$$= 2 \log_2 e$$

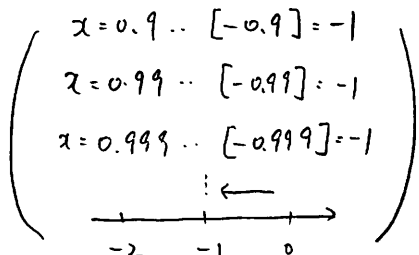
(1) $f(x) = [-x] \quad (x=1)$

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} [-x] = -2 \dots ①$



また、

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} [-x] = -1 \dots ②$



よって ①, ② より

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$

よって、片側極限が

一致しない。

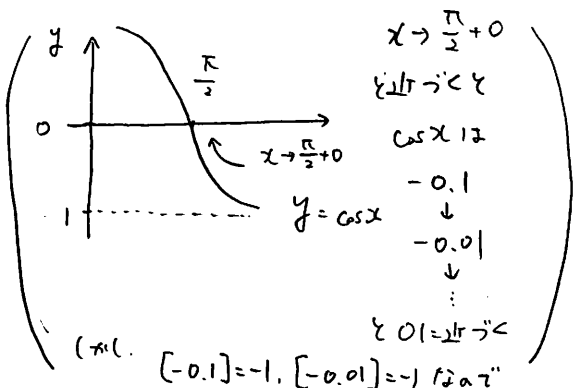
$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ は存在しない。

よって $f(x)$ は $x=1$ で不連続。

(2)

$f(x) = [\cos x] \quad (x = \frac{\pi}{2})$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} [\cos x] = -1 \dots ①$



$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} [\cos x] = 0 \dots ②$

また、片側極限が一致しない。

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ は存在しない。

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1 \dots ③$

よって、また、

$f(2) = \frac{|-2|}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$

(注)

$[0.1] = 0, [0.01] = 0, \dots$

よって ①, ② より

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x)$

よって、片側極限が一致しない。

よって $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で不連続。

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ は存在しない。

よって $f(x)$ は $x = \frac{\pi}{2}$ で不連続。

よって ③ より

$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

よって $f(x)$ は

$x=2$ で連続。

$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$

④ = ① の証明は、

x が 0 に近づくとき、

$\frac{\sin x}{x}$ の値は 1 に近づく。

$x=0$ のとき、 $f(0)=1$

よって、④

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots ①$

$\left(x \rightarrow 0 \text{ のとき、} x \text{ は } 0 \text{ に近づく} \right)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \dots ②$

よって ①, ② より

片側極限が一致しない。

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \dots ③$

また、 $f(0) = 1$ より

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

また、

$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{|x|}{x} = -1$

x は負の数で近づく。

$\lim_{x \rightarrow -2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow -2-0} (-1) = -1 \dots ②$

よって ①, ② より $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-0} f(x)$

$f(x)$ は $x=0$ で不連続。

50

$$(1) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$$

$$\text{分母は } 1+x^{2n} = 1+(x^n)^2$$

よって $(+(-2^n))$ の平方である。

よって正の数になる。よって。

よって $x=1$ のとき $f(x)$ は定義される。

$$\bullet |x| < 1 \quad (-1 < x < 1) \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ である}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

$$\bullet x = 1 \text{ のとき}$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1}}{1+1^{2n}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet x = -1 \text{ のとき}$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{1+(-1)^{2n}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet |x| > 1 \quad (x < -1, x > 1) \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \text{ である} \quad f(x) \text{ の分母・分母}$$

x^{2n} は 0 になる

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}}{\frac{1}{x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{x^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2n} + 1} = \frac{x}{0+1} = x$$

よって

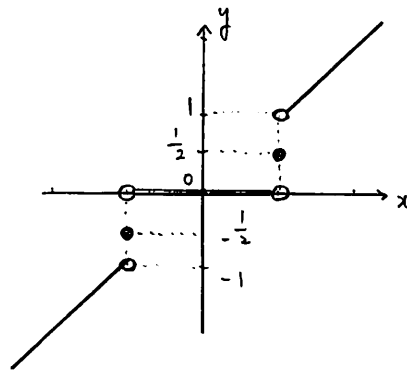
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (|x| < 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 1) \\ -\frac{1}{2} & (x = -1) \\ x & (|x| > 1) \end{cases}$$

よってグラフは (2) の通り。

グラフより $f(x)$ は

$x = \pm 1$ で不連続

$x \neq \pm 1$ で連続である



(2)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n+1}}$$

分母は 1+x^{2n+1}

$$x = -1 \text{ のとき}$$

$$1+(-1)^{2n+1} = 1+(-1) = 0$$

よって $x = -1$ のとき $f(x)$ は定義されない。

よって $x \neq -1$ で定義される。

$$\bullet |x| < 1 \text{ のとき}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n+1}} = \frac{1+x}{1+0} = 1+x$$

$$\bullet x = 1 \text{ のとき}$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+1}{1+1^{2n+1}} = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

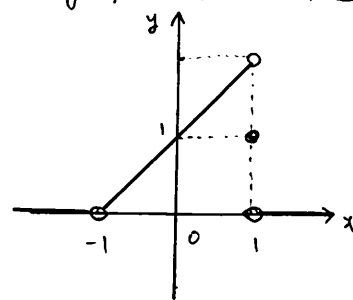
$$\bullet |x| > 1 \text{ のとき}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{x}{x^{2n+1}}}{\frac{1}{x^{2n+1}} + \frac{x}{x^{2n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1} + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0$$

よって

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & (|x| < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

よって $y = f(x)$ のグラフは (2) の通り。



また $f(x)$ は $x = \pm 1$ で不連続

$x = \pm 1$ で不連続

$x \neq \pm 1$ で連続

(3)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{1+|x|^n}$$

分母は $1+|x|^n = 1+(0 < |x| < 1)$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0$ である。よって $f(x)$ は定義される。

よって $x=1$ のとき $f(x)$ は定義される。

$$\bullet |x| < 1 \text{ のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = 0 \text{ である}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{1+|x|^n} = \frac{x-1}{1+0} = x-1$$

$$\bullet |x| = 1 \quad (x = 1, x = -1) \text{ のとき}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-1}{1+1^n} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\bullet |x| > 1 \text{ のとき}$$

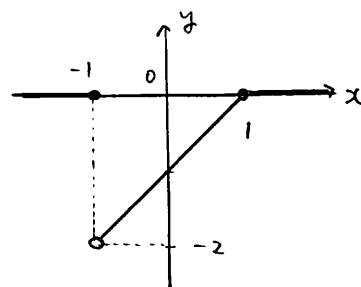
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^n} = 0 \text{ である}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x-1}{1+|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{|x|^n} - \frac{1}{|x|^n}}{\frac{1}{|x|^n} + 1} = \frac{0-0}{0+1} = 0$$

よって

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| = 1) \\ 0 & (|x| > 1) \end{cases}$$

よってグラフは (2) の通り。



答. 7.5.5.1

$x=1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^n - 0^n) = 1 - 0 = 1$ ので.

$x=-1$ のとき 不連続

$x \neq -1$ で連続

(4)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^n x - \cos^n x)$$

まず, $0 \leq x < 2\pi$ に限定して考える.

$$x \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

(= 0, π) 以外.

$$|\sin x| < 1, |\cos x| < 1$$

で $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n x = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x = 0$.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^n x - \cos^n x)$$

$$= 0 - 0 = 0.$$

• $x=0$ のとき

$$f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^n 0 - \cos^n 0)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (0 - 1^n)$$

$$= -1$$

• $x=\frac{\pi}{2}$ のとき

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{\pi}{2} - \cos^n \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (1^n - 0^n)$$

$$= 1$$

• $x=\pi$ のとき

$$f(\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^n \pi - \cos^n \pi)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{0 - (-1)^n\}$$

不連続である.

• $x=\frac{3\pi}{2}$ のとき

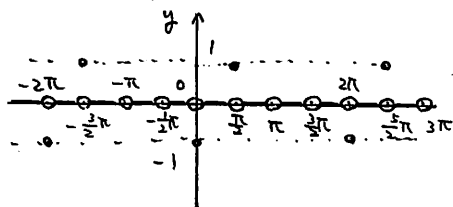
$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin^n \frac{3\pi}{2} - \cos^n \frac{3\pi}{2})$$

$$= \frac{x}{1+|x|-1}$$

$$= \frac{x(1+|x|)}{|x|}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(-1)^n - 0^n\}$$

不連続である.



よって, $\frac{\pi}{2}$ を除いて不連続点が存在する. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n x = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n x = 0$ である.

$x = \frac{1}{2}m\pi$ で不連続

$x \neq \frac{1}{2}m\pi$ で連続

(5)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+|x|)^{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} x \left(\frac{1}{1+|x|}\right)^{n+1}$$

初項 x , 公比 $\frac{1}{1+|x|}$

の無限等比級数収束する.

• $x=0$ のとき

初項 $x=0$ である.

無限等比級数の和は 0

$$\therefore f(0) = 0$$

• $x \neq 0$ のとき

$|x| > 0$ である.

$$(1+|x|) > 1 \text{ である.}$$

収束する.

$$0 < \frac{1}{1+|x|} < 1$$

である. したがって, $0 < \frac{1}{1+|x|} < 1$

を満たすので, 無限等比級数

は収束する. よって

$$f(x) = \frac{\text{初項}}{1 - \text{公比}}$$

$$= \frac{x}{1 - \frac{1}{1+|x|}}$$

ただし,

$x > 0$ のとき, $|x| = x$ である.

$$f(x) = \frac{x(1+x)}{x} = 1+x$$

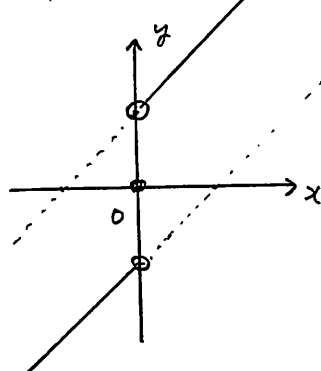
$x < 0$ のとき, $|x| = -x$ である.

$$f(x) = \frac{x(1-x)}{-x} = x-1$$

よって,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x=0) \\ 1+x & (x>0) \\ x-1 & (x<0) \end{cases}$$

グラフは次の通り.



よって,

$x=0$ で不連続

$x \neq 0$ で連続

(51)

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{2n} + 1) = (x^2)^n + 1$$

1. $x > 1$ のとき $x^{2n} \rightarrow \infty$ (2) $x = 1$

2. $x < 1$ のとき $x^{2n} \rightarrow 0$

3. $x = -1$ のとき $x^{2n} = 1$

$f(x)$ は定義される。

$$(I) |x| < 1 \text{ のとき } (-1 < x < 1 \text{ かつ } x \neq \pm 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0 \text{ である。}$$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \frac{0 + ax^2 + bx}{0 + 1} = ax^2 + bx$$

$$(II) x = 1 \text{ のとき}$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} + a \cdot 1^2 + b \cdot 1}{1^{2n} + 1} = \frac{1 + a + b}{1 + 1} = \frac{1}{2}(1 + a + b)$$

$$(III) x = -1 \text{ のとき}$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} + a(-1)^2 + b(-1)}{(-1)^{2n} + 1} = \frac{-1 + a - b}{1 + 1} = \frac{1}{2}(-1 + a - b)$$

$$(IV) |x| > 1 \text{ のとき } (x < -1, x > 1 \text{ かつ } x \neq \pm 1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n = 0 \text{ である。}$$

$f(x)$ の分母・分子を x^{2n} で割る。

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}} + \frac{ax^2}{x^{2n}} + \frac{bx}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{-1} + a\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+2} + b\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}} = \frac{x^{-1} + 0 + 0}{1 + 0} = x^{-1} = \frac{1}{x}$$

今、 $f(x)$ は $\frac{1}{x}$ である。

$x \neq \pm 1$ のときは $\frac{1}{x}$ である。

$x = \pm 1$ のときは $\frac{1}{x}$ である。

• $x = 1$ のとき

$\frac{1}{x} = 1$ である。

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = f(1) = 1 \quad \text{①}$$

が成り立つ。

$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x)$ は $x > 1$ の場合である。
 ①の結果を用いて

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

また、

$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ は $-1 < x < 1$ の場合である。
 (I)の結果を用いて

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (ax^2 + bx) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b$$

②の結果を用いて

$$f(1) = \frac{1}{2}(1 + a + b)$$

$x \neq \pm 1$ のとき

$$1 = a + b = \frac{1}{2}(1 + a + b)$$

が成り立つ。

$x = -1$ のとき $\frac{1}{x} = -1$ である。

$$a + b = 1 \quad \text{③}$$

③の結果を用いて

$$\begin{cases} a + b = \frac{1}{2}(1 + a + b) \\ 2(a + b) = 1 + a + b \\ \therefore a + b = 1 \end{cases}$$

• $x = -1$ のとき

$\frac{1}{x} = -1$ である。

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = f(-1)$$

が成り立つ。

$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$ は $-1 < x < 1$ の場合である。
 (I)の結果を用いて

$\frac{1}{x} = -1$ である。

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{-1} = -1$$

また、

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$$

は $x < -1$ の場合である。

(IV)の結果を用いて

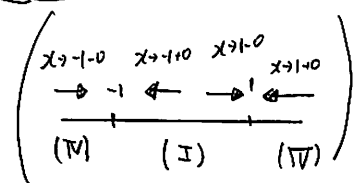
$$\lim_{x \rightarrow -1-0} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1-0} (ax^2 + bx)$$

$$= a(-1)^2 + b(-1)$$

$$= a - b$$

③の結果を用いて



②. $f(-1)$ は (Ⅲ) の結果より

$$f(-1) = \frac{1}{2}(-1 + a - b)$$

①より ②より

$$-1 = a - b = \frac{1}{2}(-1 + a - b)$$

が成り立つことは、

②の等式から

$$a - b = -1 \quad \text{--- ④}$$

が成り立つ。

②, ④より

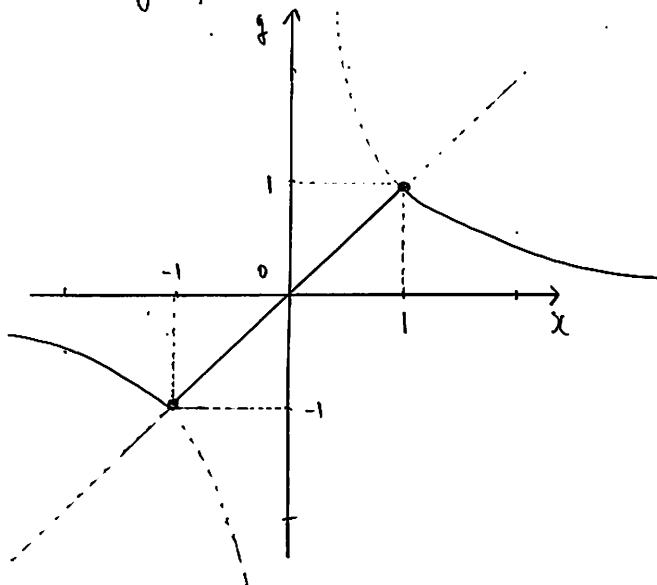
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a - b = -1 \end{cases}$$

解いて、 $a = 0, b = 1$

よって、

$$f(x) = \begin{cases} x & (-1 < x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ -1 & (x = -1) \\ \frac{1}{x} & (x < -1, x > 1) \end{cases}$$

①. $y = f(x)$ のグラフは



52

$$(1) 3^{-x} = 2x \quad (0 < x < 1)$$

$$\text{証明)} \quad f(x) = 3^{-x} - 2x$$

よゝゝゝ. 3^{-x} も $2x$ も

連続関数だから

$f(x)$ も連続関数である。

また.

$$f(0) = 3^0 - 2 \cdot 0$$

$$= 1 - 0 = 1 > 0$$

$$f(1) = 3^{-1} - 2 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3} < 0$$

よゝゝ. 中間値の定理から.

方程式 $f(x) = 0$ は

$0 < x < 1$ の範囲に

少なくとも1つの解がある。 //

$$(2) x - 3 = \sin x \quad (0 < x < \pi)$$

$$\text{証明)} \quad f(x) = x - 3 - \sin x$$

よゝゝゝ. $x - 3$ も $\sin x$ も

連続関数だから.

$f(x)$ も連続関数である。

また.

$$f(0) = 0 - 3 - \sin 0$$

$$= 0 - 3 - 0 = -3 < 0$$

$$f(\pi) = \pi - 3 - \sin \pi$$

$$= \pi - 3 - 0$$

$$= \pi - 3 > 0 \quad (\because \pi > 3)$$

よゝゝ. 中間値の定理から.

方程式 $f(x) = 0$ は

$0 < x < \pi$ の範囲に

少なくとも1つの解がある。 //

$$(3) x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \quad (x < 0)$$

$$\text{証明)} \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

よゝゝゝ. $f(x)$ は連続関数である。

また.

$$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1$$

$$= 1 > 0$$

また.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= -\infty$$

よゝゝ. 中間値の定理から.

方程式 $f(x) = 0$ は

$x < 0$ の範囲に

少なくとも1つの解がある。 //