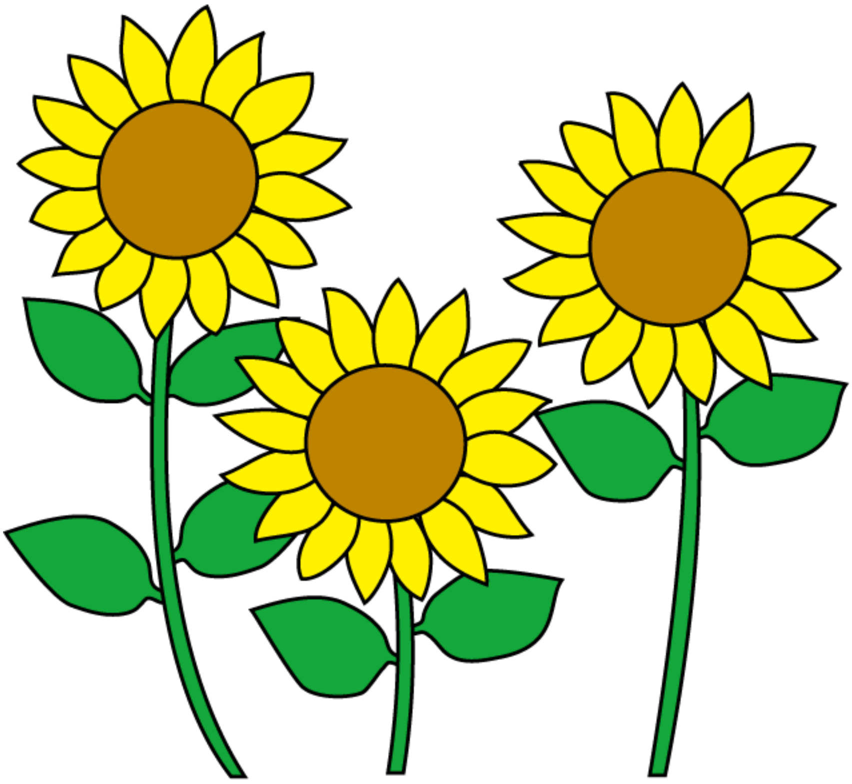
数学発展課題

数列



(　　)年(　　)組(　　)番　氏名(　　　　　　　　　　　　　)

数列　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{1}$ 初項が -6, 公差が -2 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。また数列 $\{b_n\}$ は, $b_1 = 66$, $b_{n+1} - b_n = a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の第 n 項 b_n を n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が最大となるような n の値と S_n の最大値を求めよ。

数列　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

2 初項が 2，公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ の第 3 項は 18 である。また，等差数列 $\{b_n\}$ の第 3 項は -19 で，初項から第 8 項までの和は -116 である。

（1）数列 $\{a_n\}$ の公比を求め，a_n を n を用いて表せ。

（2）b_n を n を用いて表せ。また，$b_n < 0$ を満たす最大の自然数 n の値を求めよ。

（3）不等式 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k > \sum_{k=1}^{20} |b_k|$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。

数列　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

3 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2 = 9$，$a_5 = 21$ を満たしている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_{3n}$ を n を用いて表せ。

(3) a_n を 3 で割ったときの余りを r_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。このとき，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{30} r_k a_k$ を求めよ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

4 初項 a $(a<0)$，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2+a_7=0$ を満たしている。

(1) d を a を用いて表せ。

(2) $a_1a_3+a_2a_4=26$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(3) (2) のとき，$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{3n}>8000$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

数列　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{5}}$ 等差数列 $\{a_n\}$ は $a_7 - a_3 = 12$ を満たしている。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の公差を求めよ。

(2) a_1，a_3，a_7 がこの順に等比数列であるとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) (2) のとき，$S_n = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1}$ とする。
S_n を n を用いて表せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{S_k}$ を求めよ。

6 数列 $\{a_n\}$ は初項が 3，公差が整数の等差数列である。
また，数列 $\{b_n\}$ は初項が正で，$b_2 = 8$，$b_4 = 32$ の等比数列であり，

$$a_4 < b_3 < a_5$$

を満たしている。

(1) b_n を n を用いて表せ。

(2) a_n を n を用いて表せ。

(3) この 2 つの数列の項を小さい方から順に一列に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とする。数列 $\{c_n\}$ のはじめの 50 項の和を求めよ。

数列　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{7}$ 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で，$a_3 = 7$，$a_9 = 19$ である。また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n = 2^{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_1 を求めよ。また，$n \geqq 2$ のとき b_n を n を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，$T = a_2b_1 + a_4b_2 + a_6b_3 + \cdots + a_{2n}b_n$ を n を用いて表せ。

8 数列 $\{a_n\}$ は等差数列であり，$a_1 = 4$，$a_3 + a_4 = 23$ を満たしている。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を次のように，それぞれ 3 個ずつの区画に分ける。

$$a_1,\ a_2,\ a_3 \mid a_4,\ a_5,\ a_6 \mid a_7,\ a_8,\ a_9 \mid a_{10},\ \cdots$$

第 m 番目の区画の最初の数を b_m とするとき，b_m を m を用いて表せ。また，$b_m \geqq 100$ を満たす最小の自然数 m の値を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を次のように，第 k 番目に $(2k-1)$ 個の数が入るように分ける。

$$a_1 \mid a_2,\ a_3,\ a_4 \mid a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9 \mid a_{10},\ \cdots$$

第 i 番目の区画の最初の数を c_i とするとき，c_i を i を用いて表せ。また，$c_i \leqq 700$ を満たす最大の自然数 i の値を求めよ。

数列　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

9 4 で割り切れる自然数のうち，12 で割り切れないものを小さい順に並べてできる数列を $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$ とする。

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

(2) a_{2k} を k で表せ。a_{2k-1} を k を用いて表せ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とする。

(3) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}>3000$ となる最小の n の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{10}}$ 初項が 6，第 5 項が 30 である等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の公差 d を求め，一般項 a_n を n の式で表せ。

(2) $b_1 = 3$，$b_{n+1} - b_n = a_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n の式で表せ。

(3) (2) のとき，$c_n = \dfrac{b_n + b_{n+1}}{2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列を $\{c_n\}$ とする。$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$ を求めよ。

数列　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

11 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_3=4$，$a_6=9$ である。

(1) a と d の値を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項のうち，整数となる項を小さい順に 10 個加えた和を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を

$$\underbrace{a_1}_{\text{第 1 群}} \mid \underbrace{a_2,\ a_3,\ a_4}_{\text{第 2 群}} \mid \underbrace{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9}_{\text{第 3 群}} \mid \underbrace{a_{10},\ \cdots}_{\text{第 4 群}} \mid \cdots$$

のように群に分け，第 n 群に $(2n-1)$ 個の項が入るようにし，第 n 群の中央の項を b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。b_n を n を用いて表せ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k$ を n を用いて表せ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

12 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2 = 3$，$2a_3 + a_4 = 13$ を満たしている。また，$b_n = 3 \times 2^{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ と定める。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項と公差をそれぞれ求めよ。

(2) b_1 を求めよ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} b_k$ を求めよ。

(3) b_n の一の位の数を c_n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{100} a_k c_k$ を求めよ。

数列　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

13 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_3=8$，$a_7-a_5=6$ を満たしている。また，数列 $\{b_n\}$ があり，$b_1=5$，$b_{n+1}=2b_n-3$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_ka_{k+1}}+\frac{1}{2b_k-6}\right)$ とするとき，S_n を n を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{14}}$ 等差数列 $\{a_n\}$ があり，公差が 2，第 25 項が 52 である。
また，数列 $\{b_n\}$ があり，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n = na_n$ である。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k b_k$ を求めよ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

15 公比が正である等比数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2 = 2$，$a_4 = 8$ である。また，数列 $\{b_n\}$ は初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = n^2 + n + 1$ となるような数列である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の公比を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $b_3 < x \leqq b_{n+3}$ を満たす整数 x の個数を c_n とする。
$c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 + \cdots + c_na_n$ を n の式で表せ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

16 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で，$a_6-a_2=2$, $a_1+a_3=2(p+1)$ を満たしている。ただし，p は定数である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項と公差を p を用いて表せ。

(2) $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{30}=135$ のとき，p の値を求めよ。

(3) (2) のとき，a_n の整数部分を b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。このとき，$b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3+\cdots+b_{30}a_{30}$ の値を求めよ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

17 数列 $\{a_n\}$ は初項が 1，公差が 2 の等差数列である。また，数列 $\{b_n\}$ は初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるような数列である。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通に含まれている項を数列 $\{a_n\}$ から取り除いて残った数を小さい順に $c_1,\ c_2,\ c_3,\ \cdots,\ c_n,\ \cdots$ とする。
$c_1c_2 + c_3c_4 + c_5c_6 + \cdots + c_{2n-1}c_{2n}$ を n を用いて表せ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

18 公差 -3 の等差数列 $\{a_n\}$ が $a_2 + a_3 = 65$ を満たしている。

(1) a_n を n で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} |a_k|$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{a_k + |a_k|}{2}\right)^2$ の値を求めよ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

19 $a_1=2$，$a_{n+1}=na_n-n^2+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

（1） a_2，a_3，a_4 を求めよ。

（2） a_n を推定し，それが正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

（3） $\dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{a_{30}}+\sqrt{a_{31}}}$ を求めよ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

20 数列 $\{a_n\}$ は各項が自然数の等差数列で，初項は 1，公差は d で $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ を満たしている。次に，$\dfrac{1}{a_1}$ を a_1 個，$\dfrac{1}{a_2}$ を a_2 個，$\dfrac{1}{a_3}$ を a_3 個，$\cdots$ というように順に並べてできる数列を $\{b_n\}$ とする。

(1) d の値を求めよ。また，a_n を n で表せ。

(2) b_3，b_{10}，b_{20} はそれぞれいくらか。また，数列 $\{b_n\}$ で最初に現れる $\dfrac{1}{35}$ は第何項か。最後に現れる $\dfrac{1}{35}$ は第何項か。

(3) $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{300}$ を求めよ。

数列　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

21 初項 3, 公比 r $(r > 0)$ の等比数列 $\{a_n\}$ があり, $a_2+a_3 = 18$ が成り立っている。

(1) r の値を求めよ。

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n > \dfrac{3}{2}(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{12})$
を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(3) $b_1 = a_1,\ b_{n+1} = b_n + a_{2n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす数列 $\{b_n\}$ がある。b_n を n を用いて表せ。

22 次のような数列 $\{a_n\}$ がある。ただし，n は自然数とする。

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{5},\ \cdots$$

(1) $\dfrac{1}{10}$ と書かれた項は，数列 $\{a_n\}$ の第何項か。

(2) k は自然数とする。分母が k と書かれた項の和を求めよ。また，数列 $\{a_n\}$ の初項から $\dfrac{1}{n}$ と書かれた項までの和を求めよ。

(3) m は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ の初項から第 m 項までの和が初めて 30 以上となる m の値を求めよ。また，このときの a_m の値を求めよ。

23 数列 $\{a_n\}$ は $a_1 = 3$, $a_2 = \frac{9}{2}$, $a_{n+1} = pa_n + 6$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を満たしている。ただし、p は定数である。

(1) p の値を求めよ。

(2) a_n を n で表せ。

(3) xy 平面上に点 $\mathrm{A}_n(a_n, 0)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ をとる。
n 本の線分の長さの和

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 + \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3 + \mathrm{A}_3\mathrm{A}_4 + \cdots + \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$$

を n で表せ。

数列　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

24 数列 $\{a_n\}$ は等差数列で, $a_1+a_2+a_3=42$, $a_4=26$ を満たしている。また, 数列 $\{b_n\}$ があり, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると, $3S_n=4b_n-9n+8$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている。

(1) a_n を n で表せ。

(2) b_n を n で表せ。

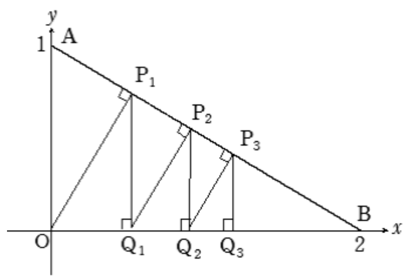
(3) $c_n=a_n+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと, すべての自然数 n に対して, c_n は 9 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

25 座標平面上に 2 点 A(0, 1), B(2, 0) をとる。図のように，線分 AB に原点 O から垂線 $\mathrm{OP_1}$ をひき，次に点 $\mathrm{P_1}$ から x 軸に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ をひく。さらに点 $\mathrm{Q_1}$ から線分 AB に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ をひき，点 $\mathrm{P_2}$ から x 軸に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ をひく。以下このような操作を続け，線分 AB 上に点 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\cdots$, x 軸上に点 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$, $\mathrm{Q_3}$, $\cdots$ をとる。

(1) 点 $\mathrm{P_1}$ の座標を求めよ。

(2) 点 Q_n の座標を $(x_n,\ 0)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，x_{n+1} を x_n で表せ。また，x_n を n で表せ。

(3) 三角形 $\mathrm{OP}_k\mathrm{Q}_k$ の面積を S_k とする。このとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ を n で表せ。



数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{26}}$ 数列 $\{a_n\}$ は $a_9=11,\ a_{n+1}-a_n=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている。この数列 $\{a_n\}$ の各項を下図のように三角形状に順に並べ，上から第 1 行，第 2 行，第 3 行，$\cdots$ とする

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & a_1 & & & & \\
 & & & a_2 & a_3 & a_4 & & & \\
 & & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & & \\
 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$

(1) a_n を n で表せ。

(2) 第 m 行の左端の数を m で表せ。

(3) 第 m 行のあるすべての数の和を T_m とする。T_m を m で表せ。また，T_m は 3 の倍数であることを示せ。

27 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある。数列 $\{a_n\}$ は等差数列で, $a_1+a_3=10$, $a_2+a_4=16$ を満たしている。また, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{1}{2}n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(1) a_n を n で表せ。

(2) b_n を n で表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき, $a_1b_n+a_2b_{n-1}+a_3b_{n-2}+\cdots+a_{n-1}b_2+a_nb_1$ を n で表せ。

数列　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

28 公比が正の数である等比数列 $\{a_n\}$ があり，$a_2 = 4$, $a_4 = 16$ である。また，等差数列 $\{b_n\}$ があり，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_{10} = 175$，$S_{15} = 375$ である。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) $b_n < a_5$ を満たす n の最大値を m とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k b_k$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{29}}$ 初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ と，初項 $3a$，公比 d の等比数列 $\{b_n\}$ があり，$a_5 = 14$，$b_2 = 18$ である。ただし，d は整数である。

(1) a，d の値を求めよ。

(2) 各自然数 n に対して，$b_n < a_k < b_{n+1}$ を満たす a_k の個数を c_n とする。c_n を n を用いて表せ。

(3) (2) のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k$ を n を用いて表せ。

数列　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

30 等差数列 $\{a_n\}$ があり，$a_5 = 13$ で，初項から第 10 項までの和が 145 である。

(1) a_n を n を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k$ を求めよ。また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{20} a_k a_{2k}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{33} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ。

31 初項 1，公差 d $(d>0)$ の等差数列 $\{a_n\}$ がある。また，数列 $\{b_n\}$ は $b_n=(-1)^n a_n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められ，$b_2=9$ を満たしている。

（1） d の値を求めよ。

（2） $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} b_k$ を求めよ。

（3） $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} b_k$ が初めて -1000 より小さくなるような自然数 N を求めよ。また，この N に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{b_{2k-1}+4}$ の値を求めよ。

32 実数の項からなる等比数列 $\{a_n\}$ があり，$a_1 = 2$，$a_4 = 16$ である。また, 数列 $\{b_n\}$ があり, $b_1 = 2$, $b_{n+1} - b_n = a_n + 3$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている。

（1）a_n を n を用いて表せ。

（2）b_n を n を用いて表せ。

（3）$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n$ とする。S_n を n を用いて表せ。