

①

(1)

$\{a_n\}$ は初項 -6 , 公差 -2 の
等差数列より、一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= -6 + (n-1)(-2) \\ &= -6 - 2n + 2 \\ &= \underline{-2n - 4} \end{aligned}$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ は

$$b_{n+1} - b_n = a_n$$

を満たすので、数列 $\{b_n\}$ の階差数列
が $\{a_n\}$ になる。より

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\ &= 66 + \sum_{k=1}^{n-1} (-2k - 4) \\ &= 66 - 2 \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 4 \\ &= 66 - 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \{ (n-1) + 1 \} - 4(n-1) \\ &= 66 - (n-1)n - 4(n-1) \\ &= 66 - n^2 + n - 4n + 4 \\ &= \underline{-n^2 - 3n + 70} \quad \text{①} \end{aligned}$$

①に $n=1$ を代入して成り立つ。

以上より $b_n = \underline{-n^2 - 3n + 70}$

③

階差数列の公式を用いずに±は

まず「 $n \geq 2$ 」「 $n=1$ のとき成り立つ」
と書くこと。(書かないと減点を受ける)

(3)

$b_n > 0$ となる n の範囲を
求める

$$-n^2 - 3n + 70 > 0$$

⇔

$$n^2 + 3n - 70 < 0$$

$$(n+10)(n-7) < 0$$

$$-10 < n < 7$$

$$n > 0 \text{ より } 0 < n < 7$$

である。よって数列 $\{b_n\}$ は

- { 初項 ~ 第6項 ... 正の数
- { 第7項 ... 0
- { 第8項以降 ... 負の数

である。数列 $\{b_n\}$ の初項から
第 n 項までの和 S_n は

正の数で足し続けているとき

は和は増え続けている。負の数で

足した瞬間には和は減るので

S_n は第6項 (もしくは第7項
も0なので、第7項) まで
足し続けたものが最大となる。

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} \{b_n\} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & \dots \\ & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & 0 & \ominus & \ominus & \dots \end{array} \right)$$

← 和の部分で足したものが最大

よって S_n が最大になる n は $\underline{n=6, 7}$

そのときの和 S_6 は

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{k=1}^6 b_k \\ &= \sum_{k=1}^6 (-k^2 - 3k + 70) \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot (6+1) \cdot (2 \cdot 6 + 1) - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6+1) + 70 \cdot 6 \\ &= -\frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 7 \cdot 13 - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 + 420 \\ &= -91 - 63 + 420 = \underline{266} \end{aligned}$$

④

S_n を n の式で表して
後は微分していいが
手間がかかるので
この考えが利用できる
ときには利用した方が...

②

(1)

数列 $\{a_n\}$ の公比 r と $a_3 = 18$ である。
 この等比数列の一般項 a_n を

$$a_3 = ar^{3-1}$$

$\therefore a_3 = 18$, 初項 $a = 2$ より

$$18 = 2r^2$$

$$\therefore r^2 = 9 \text{ より } r = \pm 3$$

公比は正であるから $r = 3$

故に一般項 a_n は

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

(2) 等差数列 $\{b_n\}$ の初項 b 、

公差 d と $a_3 = 18$ である。

一般項 b_n は

$$b_n = b + (n-1)d$$

$$\therefore b_3 = -19 \text{ より}$$

$$-19 = b + (3-1)d$$

より

$$b + 2d = -19 \dots \textcircled{1}$$

また、初項から第 n 項までの和 S_n は

$$\frac{1}{2}n \{2b + (n-1)d\}$$

であるので、初項から第 8 項までの

和が -116 であるので

$$\frac{1}{2} \times 8 \{2b + (8-1)d\} = -116$$

$$4(2b + 7d) = -116$$

④

$$2b + 7d = -29 \dots \textcircled{2}$$

①、②より

$$\begin{cases} b + 2d = -19 \\ 2b + 7d = -29 \end{cases}$$

$$\text{解いて } b = -25, d = 3$$

より

$$b_n = -25 + (n-1) \times 3$$

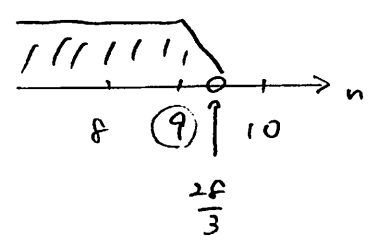
$$= 3n - 28$$

また、 $b_n < 0$ であるのは

$$3n - 28 < 0$$

$$3n < 28$$

$$\therefore n < \frac{28}{3} = 9.\bar{3}$$



$$n < \frac{28}{3} \text{ であるのは } n \leq 9$$

$$\text{自然数 } n \text{ は } n = 9$$

(3)

(1) の結果より $1 \leq n \leq 9$ には

$$b_n < 0, 10 \leq n \text{ には } b_n > 0$$

である。したがって

$$|b_n| = \begin{cases} -b_n & (1 \leq n \leq 9) \\ b_n & (n \leq 10) \end{cases}$$

である。より

$$\sum_{k=1}^{20} |b_k| = \sum_{k=1}^9 (-b_k) + \sum_{k=10}^{20} b_k$$

$$= -\sum_{k=1}^9 b_k + \left(\sum_{k=1}^{20} b_k - \sum_{k=1}^9 b_k \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} b_k - 2 \sum_{k=1}^9 b_k \dots \textcircled{4}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (3k - 28) - 2 \sum_{k=1}^9 (3k - 28)$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) - 28 \cdot 20$$

$$- 2 \left\{ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot (9+1) - 28 \cdot 9 \right\}$$

$$= 630 - 560 - 2(135 - 252)$$

$$= 70 + 2 \times 117 = 304$$

より、また

$$\sum_{k=1}^n a_k > 304$$

を満たす n の最小値 n を求めよ。

数列 $\{a_n\}$ は、初項 2、公比 3

の等比数列である。したがって

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{2(3^n - 1)}{3 - 1}$$

$$= \frac{2(3^n - 1)}{2} = 3^n - 1$$

より

$$3^n - 1 > 304$$

より

$$3^n > 305$$

したがって

$$3^4 = 81, 3^5 = 243, 3^6 = 729$$

であるから、 $3^n > 305$ を満たす

$$n$$
 の最小値 n は $n = 6$

⑤

$$(4) \text{ に } n=17 \text{ として } \sum_{k=1}^{20} b_k +$$

$$\sum_{k=1}^9 b_k = 27(7)$$

等差数列の和の公式

を用いて、より

3

(1)

初項 a , 公差 d とする

一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d \quad \dots \textcircled{1}$$

とある。 $a_2 = 9, a_5 = 21$ より

$$a_2 = a + (2-1)d = 9$$

$$a_5 = a + (5-1)d = 21$$

より

$$\begin{cases} a + d = 9 \\ a + 4d = 21 \end{cases}$$

解いて

$$a = 5, d = 4$$

①に代入して

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 4$$

$$= 5 + 4n - 4$$

$$= 4n + 1$$

(2)

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n}$$

は n 個の項の和である。

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n}$$

$$= (4 \cdot 3 + 1) + (4 \cdot 6 + 1) + (4 \cdot 9 + 1) + \dots + (4 \cdot 3n + 1)$$

$$= 13 + 25 + 37 + \dots + (12n + 1)$$

これは初項 13, 公差 12 である

等差数列の初項から第 n 項

までの和である。求める和は

$$\frac{1}{2}n \{ 2 \cdot 13 + (n-1) \cdot 12 \}$$

$$= \frac{1}{2}n (26 + 12n - 12)$$

$$= \frac{1}{2}n (12n + 14)$$

$$= n(6n + 7)$$

②

$$a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n}$$

$$= \sum_{k=1}^n a_{3k}$$

$$= \sum_{k=1}^n (4 \cdot 3k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (12k + 1)$$

$$= 12 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 12 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$= 6n(n+1) + n$$

$$= n \{ 6(n+1) + 1 \}$$

$$= n(6n + 7)$$

(3)

$$a_n = 4n + 1$$

$$= 3n + (n+1)$$

$$= (3 \cdot \frac{10}{2}) + (n+1)$$

である。 a_n は 3 で割り切れず

余り 1 である。 $n+1$ は 3 で割り切れず

余り 2 である。

n	1	2	3	4	5	...	30
$n+1$	2	3	4	5	6	...	31
$n+1$ を 3 で割った余り	2	0	1	2	0	...	1
$r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_{30}$							

より

$$r_1 = 2, r_2 = 0, r_3 = 1, r_4 = 2, \dots$$

より、0, 1, 2 の 3 個の余りを 10 回繰り返す。

$$r_n = 0 \text{ である } n \text{ は}$$

$$r_2 = r_5 = r_8 = \dots = r_{29} = 0$$

より、 n が 3 で割り切れず 2 余りのとき

$$r_n = 1$$

$$r_{3m-1} = 0 \quad (m=1, 2, \dots, 10)$$

$$r_n = 1 \text{ である } n \text{ は}$$

$$r_3 = r_6 = r_9 = \dots = r_{30} = 1$$

より、 n が 3 の倍数のとき

$$r_{3m} = 1 \quad (m=1, 2, \dots, 10)$$

$$r_n = 2 \text{ である } n \text{ は}$$

$$r_1 = r_4 = r_7 = \dots = r_{28} = 2$$

より、 n が 3 で割り切れず 1 余りのとき

$$r_{3m-2} = 2 \quad (m=1, 2, \dots, 10)$$

より、

$$\sum_{k=1}^{30} r_k a_k = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_{30} a_{30}$$

$$= (r_2 a_2 + r_5 a_5 + \dots + r_{29} a_{29})$$

$$+ (r_3 a_3 + r_6 a_6 + \dots + r_{30} a_{30})$$

$$+ (r_1 a_1 + r_4 a_4 + \dots + r_{28} a_{28})$$

$$= 0 \cdot (a_2 + a_5 + \dots + a_{29})$$

$$+ 1 \cdot (a_3 + a_6 + \dots + a_{30})$$

$$+ 2 \cdot (a_1 + a_4 + \dots + a_{28})$$

$$= 1 \cdot \sum_{k=1}^{10} a_{3k} + 2 \cdot \sum_{k=1}^{10} a_{3k-2}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (4 \cdot 3k + 1)$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{10} \{ 4(3k-2) + 1 \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (12k + 1)$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^{10} (12k - 7)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{ (12k + 1) + 2(12k - 7) \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (36k - 13)$$

$$= 36 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+1) - 13 \cdot 10 = 1850$$

4

(1)

一般項 $a_n = a + (n-1)d$

よ、問題より $a_2 + a_7 = 0$ より

$$\{a + (2-1)d\} + \{a + (7-1)d\} = 0$$

$$(a+d) + (a+6d) = 0$$

$$2a + 7d = 0$$

$$7d = -2a \quad \text{よ、} d = -\frac{2}{7}a$$

(2)

$$a_1 a_3 + a_2 a_4 = 26 \quad \text{より}$$

$$a \times (a+2d) + (a+d)(a+3d) = 26$$

(1)の結果を代入して

$$a(a - \frac{4}{7}a) + (a - \frac{2}{7}a)(a - \frac{6}{7}a) = 26$$

$$a \cdot \frac{3}{7}a + \frac{5}{7}a \cdot \frac{1}{7}a = 26$$

$\times 49$

$$3a^2 + 5a^2 = 26 \times 49$$

$$8a^2 = 26 \times 49$$

$\div 26$

$$a^2 = 49$$

$$a = \pm 7$$

問題より $a < 0$ より $a = -7$

$$(1) \text{より } d = -\frac{2}{7}a = -\frac{2}{7} \times (-7) = 2$$

よ、 $a = -7, d = 2$ と $a_n = 5n - 9$

$$a_n = -7 + (n-1) \cdot 2$$

$$= -7 + 2n - 2 = 2n - 9$$

(3)

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{3n} \text{ は } 3n - (n+1) + 1 = 2n$$

より、 $2n$ 個の項の和で表される。

よ、

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{3n}$$

$$= a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+2n}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} a_{n+k} \quad \leftarrow (1) \text{の結果より}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} \{2(n+k) - 9\}$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} (2k + 2n - 9)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{2n} k + (2n-9) \sum_{k=1}^{2n} 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} 2n(2n+1) + (2n-9) \cdot 2n$$

$$= 2n(2n+1) + (2n-9) \cdot 2n$$

$$= 2n \{ (2n+1) + (2n-9) \}$$

$$= 2n(4n-8)$$

$$= 2n \cdot 4(n-2) = 8n(n-2)$$

よ、

$$8n(n-2) > 8000$$

より

$$n(n-2) > 1000 \dots (*)$$

よ、最小の n を考えよ。

$$\left(\begin{array}{l} n \text{ と } n-2 \text{ は近い整数で表さる。} \\ \text{よ、} \sqrt{1000} \text{ の値を } 2 \text{ けたで } 1000 \text{ の平方根は} \\ \sqrt{1000} = 10\sqrt{10} \approx 10 \times 3 = 30 \text{ 程度} \end{array} \right)$$

$$n=30 \text{ のとき}$$

$$n(n-2) = 30 \cdot 28 = 840$$

$$n=31 \text{ のとき}$$

$$n(n-2) = 31 \cdot 29 = 899$$

$$n=32 \text{ のとき}$$

$$n(n-2) = 32 \cdot 30 = 960$$

$$n=33 \text{ のとき}$$

$$n(n-2) = 33 \cdot 31 = 1023$$

よ、 $n=33$ のとき (*) が成立する。

$$\therefore \text{よ、} n=33 \text{ 以上}$$

(10) (他の方法)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \boxed{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{3n}}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k$$

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k$$

よ、

$$\boxed{a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{3n}} = \sum_{k=1}^{3n} a_k - \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3n} (2k-9) - \sum_{k=1}^n (2k-9)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} 3n(3n+1) - 9 \cdot 3n$$

$$- \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 9n \right\}$$

$$= 9n^2 + 3n - 27n - n^2 - n + 9n$$

$$= 8n^2 - 16n = 8n(n-2)$$

(11) (3) の (*) により

n の二次不等式を解くと

$$n^2 - 2n - 1000 > 0$$

$$n < 1 - \sqrt{1001}, n > 1 + \sqrt{1001}$$

よ、 $n > 33$ である。

⑤

(1)

数列 $\{a_n\}$ の初項は a .

公差は d と可なり.

$$a_n = a + (n-1)d$$

よって

$$a_7 - a_3 = 12$$

$$(a+6d) - (a+2d) = 12$$

$$a+6d - a - 2d = 12$$

$$4d = 12$$

$$\text{よって } d = 3$$

(2)

(1) より $d=3$ と仮定する

$$a_n = a + 3(n-1)$$

と仮定する.

$$a_1 = a.$$

$$a_3 = a + 3(3-1) = a + 6$$

$$a_7 = a + 3(7-1) = a + 18$$

つまり、 a_1, a_3, a_7 が " ∞ の順で"

等比数列をなしている (仮定)

と仮定する.

$$a_3 = r \times a_1, \quad a_7 = r \times a_3$$

が成り立つ. よって

$$r = \frac{a_3}{a_1}, \quad r = \frac{a_7}{a_3}$$

つまり

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{a_7}{a_3}$$

両辺に $a_1 a_3$ をかけると

$$a_3^2 = a_1 \times a_7 \quad \dots (*)$$

が成り立つ.

$$(*) \Rightarrow (a+6)^2 = a(a+18)$$

$$(a+6)^2 = a(a+18)$$

よって

$$a^2 + 12a + 36 = a^2 + 18a$$

$$-6a = -36$$

$$a = 6.$$

ゆえに

$$a_n = 6 + 3(n-1)$$

$$= 3n + 3$$

(6) (7) の関係は $n=2$ と

"等比数列の項の関係"

という。一般に、 a, b, c

が " ∞ の順で" 等比数列

をなすときは

$$b^2 = a \times c$$

が成り立つ。

(1)

$$S_n = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}$$

($\Rightarrow$) S_n は n 個の項の和

である。つまり第 k 項が a_{2k-1}

である数列の初項から第 n 項

までの和である。

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{3(2k-1) + 3\}$$

$$= \sum_{k=1}^n 6k$$

$$= 6 \times \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$= 3n(n+1)$$

また

$$\frac{1}{S_k} = \frac{1}{3k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

と部分分数分解

できると

$$\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{S_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$+ \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{30} - \frac{1}{31} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{31} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{31-1}{31}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{30}{31}$$

$$= \frac{10}{31}$$

$$\underline{\underline{\quad \quad \quad}}$$

6

(1)

等比数列 $\{b_n\}$ の初項を b 。
 公比を r とする。問題より
 $b > 0$ とする。

$$b_n = b r^{n-1} \text{ と仮定}$$

$$b_2 = b r, b_4 = b r^3$$

よって

$$\begin{cases} b r = 8 & \text{①} \\ b r^3 = 32 & \text{②} \end{cases}$$

①より

$$b r^3 = b r \times r^2$$

と仮定。②より

$$b r \times r^2 = 32$$

と仮定。①より

$$8 r^2 = 32$$

$$r^2 = 4$$

$$r = \pm 2$$

・ $r = 2$ のとき

$$2b = 8 \quad \therefore b = 4$$

($b > 0$ を満たす)

・ $r = -2$ のとき

$$-2b = 8 \quad \therefore b = -4$$

($b > 0$ を満たさない)

よって $b = 4, r = 2$ と仮定

$$b_n = 4 \times 2^{n-1}$$

$$(b_n = 2^2 \times 2^{n-1} = 2^{n+1} \text{ と仮定})$$

(2)

(1) の結果より $b_3 = 4 \times 2^2 = 16$ と仮定

また等差数列 $\{a_n\}$ について、初項は 3

とあり、公差を d とする。一般項 a_n は

$$a_n = 3 + (n-1)d$$

と仮定

$$a_4 = 3 + (4-1)d$$

$$= 3 + 3d$$

$$a_5 = 3 + (5-1)d$$

$$= 3 + 4d$$

$$421 = a_4 < b_3 < a_5$$

(= 代入)

$$3 + 3d < 16 < 3 + 4d$$

よって、不等式より

$$\begin{cases} 3 + 3d < 16 \\ 16 < 3 + 4d \end{cases}$$

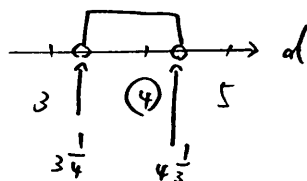
と仮定

$$d < \frac{13}{3} \text{ かつ } \frac{13}{4} < d$$

よって

$$\frac{13}{4} < d < \frac{13}{3}$$

$$3\frac{1}{4} < d < 4\frac{1}{3}$$



d は整数と仮定

$$3\frac{1}{4} < d < 4\frac{1}{3} \text{ と仮定}$$

整数 d は $d = 4$

よって

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 4$$

$$= 4n - 1$$

(3)

数列 $\{a_n\}$ について

数列 $\{b_n\}$ の方が

値が a_n に大きく

なる。

$C_1 \sim C_{50}$ の和は 17. $\{a_n\}$ の項

より $\{b_n\}$ の項の方が大きい。

よって

$$a_{50} = 4 \times 50 - 1 = 199$$

と仮定。199 以下の $\{b_n\}$ の項

を数える

$$b_5 = 64, b_6 = 128, b_7 = 256$$

と仮定。199 以下の $\{b_n\}$ の

項は $b_1 \sim b_6$ の 6 項と仮定

$$a_{44} = 4 \times 44 - 1 = 175$$

と仮定。175 より b_6 と b_7 の

間の項を数える。175 以下の $\{b_n\}$ の項

の和は

$$\{a_n\} \text{ の } a_1 \sim a_{44}$$

$$\{b_n\} \text{ の } b_1 \sim b_6$$

の和は 50 項

と仮定。よって $\{C_n\}$ の和は $C_1 \sim C_{50}$ の

40 項

$$S = \sum_{k=1}^{44} a_k + \sum_{k=1}^6 b_k$$

$$= \frac{1}{2} \times 44 \times (a_1 + a_{44})$$

$$+ \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1}$$

$\{a_n\}$ は等差

$$\{b_n\} \text{ は等比} = \frac{1}{2} \times 44 \times (3 + 175)$$

$$+ 4(64 - 1)$$

$$= 22 \times 178 + 4 \times 63$$

$$= 3916 + 252$$

$$= 4168$$

(4)

$\{a_n\}$ は等差数列

$\{b_n\}$ は等比数列

と仮定。175 より $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$

の共通項は存在しない。

17

(1)

数列 $\{a_n\}$ の初項を a , 公差を d

$$\text{とすると } a_n = a + (n-1)d.$$

よて

$$a_3 = a + (3-1)d = 7$$

$$a_9 = a + (9-1)d = 19$$

また

$$\begin{cases} a + 8d = 19 \\ a + 2d = 7 \end{cases}$$

連立方程式を解いて $a = 3, d = 2$

$$\text{よて } a_n = 3 + (n-1) \times 2$$

$$= 2n + 1$$

(2)

$$b_1 = S_1 = 2^{1+1} = 4$$

また $n \geq 2$ のとき

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2^{n+1} - 2^{(n-1)+1}$$

$$= 2^{n+1} - 2^n$$

$$= 2^n \cdot 2 - 2^n$$

$$= 2^n (2 - 1) = 2^n$$

(3)

(2) の結果より

$$b_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ 2^n & (n \geq 2) \end{cases}$$

よて

$$\{b_n\} = 4, 4, 8, 16, 32, \dots$$

よて $n \geq 2$ のとき

$$T = a_2 b_1 + a_4 b_2 + a_6 b_3 + \dots + a_{2n} b_n$$

$$= (2 \cdot 2 + 1) \cdot 4 + (2 \cdot 4 + 1) \cdot 4 + (2 \cdot 6 + 1) \cdot 8 + \dots + (2 \cdot 2n + 1) \cdot 2^n$$

$$= 5 \cdot 4 + 9 \cdot 4 + 13 \cdot 8 + \dots + (4n+1) \cdot 2^n$$

同様、数列 $\{a_n\}$ の n 項の和を S_n とすると、数列 $\{a_n\}$ の n 項の和を S_n

$$T = 5 \cdot 4 + 9 \cdot 4 + 13 \cdot 8 + \dots + (4n+1) \cdot 2^n$$

$$-) 2T = \quad 5 \cdot 8 + 9 \cdot 8 + \dots + (4n-3) \cdot 2^n + (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$-T = 5 \cdot 4 + (-4) + 4 \cdot 8 + \dots + 4 \cdot 2^n - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 20 - 4 + 4 \cdot 8 + \dots + 4 \cdot 2^n - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= \underline{16} + 4 \cdot 8 + \dots + 4 \cdot 2^n - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

こゝで下線部分には $(n-1)$ 項ある。(20 + (-4)) = 16 項が1つ減る。こゝの部分で $8 < 16$ である

$$-T = \underline{4 \times 4 + 4 \times 8 + \dots + 4 \times 2^n} - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

よて、7...7, 初項 4×4 , 公差 2 , 項数 $n-1$ の

等比数列の和で置き換える。

$$-T = \frac{4 \times 4 (2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 4 \times 4 \times 2^{n-1} - 4 \times 4 - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= 4 \times 2^{n+1} - 16 - (4n+1) \cdot 2^{n+1}$$

$$= \{4 - (4n+1)\} 2^{n+1} - 16$$

$$= (-4n+3) 2^{n+1} - 16$$

よて

$$-T = (-4n+3) 2^{n+1} - 16$$

よて

$$T = (4n-3) 2^{n+1} + 16$$

⑧

(1)

初項 $a_1 = 4$ と公差 d とする

$$a_n = 4 + (n-1)d$$

$$a_3 = 4 + (3-1)d = 4 + 2d$$

$$a_4 = 4 + (4-1)d = 4 + 3d$$

$$a_3 + a_4 = 23$$

より

$$(4 + 2d) + (4 + 3d) = 23$$

$$5d = 15$$

$$d = 3$$

よって

$$a_n = 4 + (n-1)3$$

$$= 3n + 1$$

(2)

第1区画 | 第2区画 | ...

$$a_1, a_2, a_3 \quad | \quad a_4, a_5, a_6 \quad | \quad \dots$$

$$\uparrow \quad \uparrow$$

$$b_1 \quad b_2$$

$$m \geq 2$$

第1区画から第(m-1)区画

まで全部で $3 \times (m-1)$ 個

の項がある。第m区画の

最初のは、数列 $\{a_n\}$ にあて

$$3(m-1) + 1$$

である。(= かつ $m=1$ のとき成立))

よって

$$b_m = a_{3(m-1)+1}$$

$$= 3\{3(m-1) + 1\} + 1$$

$$= 3(3m-2) + 1$$

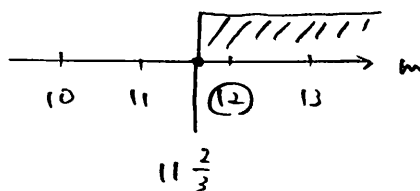
$$= 9m - 5$$

$$b_m \geq 100 \text{ より } 9m - 5 \geq 100$$

より

$$9m \geq 105$$

$$m \geq \frac{105}{9} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$$



$$よって m \geq 11\frac{2}{3} \text{ より } m = 12$$

最小の自然数 m は $m = 12$

(3)

$$\begin{array}{c|c|c} \text{第1区画} & \text{第2区画} & \text{第3区画} \\ a_1 & a_2, a_3, a_4 & a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \end{array}$$

第 i 区画には $(2i-1)$ 個の項がある。よって $i \geq 2$ とする

第1区画から第 $(i-1)$ 区画まで $i-1$ 区画

$$1 + 3 + 5 + \dots + \{2(i-1)-1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{i-1} (2k-1) \text{ 個}$$

の項がある。よって第 i 区画の

最初のは、数列 $\{a_n\}$ にあて

$$1 + \sum_{k=1}^{i-1} (2k-1) \text{ 番目}$$

である。よって

$$1 + \sum_{k=1}^{i-1} (2k-1)$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} k - \sum_{k=1}^{i-1} 1$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2} (i-1) \{ (i-1) + 1 \} - (i-1)$$

$$= 1 + (i-1)i - (i-1)$$

$$= 1 + i^2 - i - i + 1$$

$$= i^2 - 2i + 2$$

よって $i=1$ のとき成立

よって

$$C_i = a_{i^2-2i+2}$$

$$= 3(i^2 - 2i + 1) + 1$$

$$= 3i^2 - 6i + 6 + 1$$

$$= 3i^2 - 6i + 7$$

よって $C_i \leq 700$ とする

最大の自然数 i は

$$3i^2 - 6i + 7 \leq 700$$

$$3i^2 - 6i \leq 693$$

(3)

$$i^2 - 2i \leq 231 \quad \dots (*)$$

$$i(i-2) \leq 231$$

適当に i を代入して

i を探してみよう。

$$i=15 \rightarrow 15 \times 13 \leq 231 \quad \text{OK} \quad (195)$$

$$i=16 \rightarrow 16 \times 14 \leq 231 \quad \text{OK} \quad (224)$$

$$i=17 \rightarrow 17 \times 15 \leq 231 \quad \text{OK} \quad (255)$$

よって $(*)$ とする

最大の自然数 i は $i=16$

(3)

$$(*) \text{ と } 2 \leq i \text{ と仮定して}$$

考える

$$i^2 - 2i - 231 \leq 0$$

$$i = 1 \pm \sqrt{1+231}$$

$$= 1 \pm \sqrt{232}$$

よって $\sqrt{232}$ の

11 < 3.14 < 3.14159... のとき、 $\sqrt{232}$ の

下位で

9

(1)

4で割り切れる自然数は

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, ...

この中で12で割り切れるものを

除いていくと

4, 8, ~~16~~, 20, ~~24~~, 28, ...

つまり

$\{a_k\} : 4, 8, 16, 20, 28, \dots$

と表せる

$$a_1 = 4, a_2 = 8,$$

$$a_3 = 16, a_4 = 20$$

である。

(2)

$\{a_{2k}\} : a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$

$k=1, k=2, k=3, k=4$

である。(1)より $a_2 = 8, a_4 = 20$

である。4で割り切れる自然数の

列は $4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots$

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 4, 8, \cancel{16} & 16, 20, \cancel{24} & 28, 32, \cancel{36} & 40, \dots \\ \hline a_1, a_2 & a_3, a_4 & a_5, a_6 & a_7, \dots \\ \hline \text{第1群} & \text{第2群} & \text{第3群} & \end{array} \right)$$

よって、上図のように第1群, 第2群, ...

と表せる。 a_{2k} は第k群に属する

$$\left(\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \xrightarrow{+4} \\ a_{2k-2} \rightarrow \textcircled{a_{2k-1}} \times \\ \text{第}(k-1)\text{群} \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{+4} \\ a_{2k-1} \rightarrow \textcircled{a_{2k}} \times \\ \text{第}k\text{群} \end{array} \end{array} \right)$$

a_{2k} は第k群の中央の数であり、上図より

a_{2k-2} より12だけ増える (4が3つ分)

よって数列 $\{a_{2k}\}$ は初項 $a_2 = 8$, 公差12

の等差数列であるから

$$a_{2k} = 8 + (k-1) \cdot 12$$

$$= 12k - 4$$

すなわち a_{2k-1} は a_{2k} より

4だけ小さい

$$a_{2k-1} = a_{2k} - 4$$

$$= (12k - 4) - 4$$

$$= 12k - 8$$

(3)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n}$$

は

$$(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

1番目

2番目

n番目

と表せる。よって a_{2k-1} と a_{2k} と

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$$

と表せる。(1)の結果より

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ (12k - 8) + (12k - 4) \}$$

$$= \sum_{k=1}^n (24k - 12)$$

$$= 24 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 12$$

$$= 24 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 12n$$

$$= 12n(n+1) - 12n$$

$$= 12n^2 + 12n - 12n$$

$$= 12n^2$$

$$よって S_n > 3000 \text{ より}$$

$$12n^2 > 3000$$

つまり

$$n^2 > 250$$

よって $\frac{a_{2k}}{2k}$ の自然数nは

$$15^2 = 225, 16^2 = 256$$

$$\text{より } \underline{n = 16}$$

(4)

$$S_n = 2112$$

$$S_n = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1})$$

$$+ (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n})$$

と表せる。よって

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_{2k-1}$$

$$+ \sum_{k=1}^n a_{2k}$$

と表せる。よって LXF 同様に

10

(1)

数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1 が 6 であり
公差 d であり、一般項 a_n は

$$a_n = 6 + (n-1)d$$

である。ここで $a_5 = 30$ であり

$$a_5 = 6 + (5-1)d = 30$$

$$6 + 4d = 30$$

$$4d = 24$$

$$d = 6$$

よって、一般項 a_n は

$$\begin{aligned} a_n &= 6 + (n-1) \cdot 6 \\ &= 6 + 6n - 6 = 6n \end{aligned}$$

(2)

条件より

$$b_1 = 3$$

$$b_{n+1} - b_n = a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

よって、数列 $\{b_n\}$ の隣差数列が $\{a_n\}$
であることは意味している。よって

$$n \geq 2 \text{ のとき } (n \geq 2 \text{ のとき})$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 6k$$

$$= 3 + 6 \sum_{k=1}^{n-1} k$$

$$= 3 + 6 \times \frac{1}{2} (n-1) \{ (n-1) + 1 \}$$

$$= 3 + 3(n-1)n$$

$$= 3 + 3n^2 - 3n$$

$$= 3n^2 - 3n + 3 \quad (*)$$

よって $(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 3 = 3 \text{ であり}$$

a_1 は 3 である。よって $(*)$ は

$n=1$ のときも成り立つ。よって

よって

$$b_n = 3n^2 - 3n + 3$$

(3)

$$(2) \text{ より } b_n = 3n^2 - 3n + 3 \text{ である。}$$

よって

$$c_n = \frac{1}{2} (b_n + b_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} [(3n^2 - 3n + 3) + \{ 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 3 \}]$$

$$= \frac{1}{2} (3n^2 - 3n + 3 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 3)$$

$$= \frac{1}{2} (6n^2 + 6) = 3n^2 + 3$$

よって $c_1 + c_2 + \dots + c_n = S_n$ である

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k^2 + 3)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n 3$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + 3n$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + 3n$$

$$= \frac{1}{2} n(n+1)(2n+1) + \frac{6}{2} n$$

$$= \frac{1}{2} n \{ (n+1)(2n+1) + 6 \}$$

$$= \frac{1}{2} n (2n^2 + 5n + 1 + 6)$$

$$= \frac{1}{2} n (2n^2 + 5n + 7)$$

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a .
 公差 d とある一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

とあるよ.

$$a_2 = a + (2-1)d = 3$$

$$2a_3 + a_4 = 2\{a + (3-1)d\} + \{a + (4-1)d\} = 13$$

ゆえに

$$a + d = 3$$

$$3a + 2d = 13$$

$$\text{解いて } d = 1, a = 2$$

よって初項 2, 公差 1

(2)

条件より $b_n = 3 \times 2^{a_n}$ より

$$b_1 = 3 \times 2^{a_1} \text{ である。}$$

$$(1) \text{ より } a_1 = 2 \text{ である。}$$

$$b_1 = 3 \times 2^2 = 12$$

$$\text{また } a_n = 2 + (n-1) \cdot 1 = n+1$$

である。

$$b_n = 3 \times 2^{n+1} \left(\frac{3 \times 2^2 \times 2^{n-1}}{\text{初項}} \right) + 4 \left(\frac{a_2 + a_6 + \dots + a_{98}}{B} \right)$$

である。よって数列 $\{b_n\}$ は

初項 $b_1 = 12$, 公差 2 の

等差数列 であるから $\sum_{k=1}^{10} b_k$ は

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 10 項

までの 10 項の和

ゆえに

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} b_k &= \frac{12(2^{10}-1)}{2-1} \\ &= 12(2^{10}-1) \\ &= 12 \times 1023 \\ &= 12276 \end{aligned}$$

と書ける。

(3)

$$\{b_n\} = 12, 24, 48, 96, 192, \dots$$

より

$$\{c_n\} = 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

とある。数列 $\{c_n\}$ は 2, 4, 8, 16

(等比数列) である。

$$\text{よって } \sum_{k=1}^{100} a_k c_k = \dots$$

$$\sum_{k=1}^{100} a_k c_k = a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_{100} c_{100}$$

$$= a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4$$

$$+ a_5 c_5 + a_6 c_6 + a_7 c_7 + a_8 c_8$$

$$+ \dots$$

$$+ a_{97} c_{97} + a_{98} c_{98} + a_{99} c_{99} + a_{100} c_{100}$$

$$= a_1 \times 2 + a_2 \times 4 + a_3 \times 8 + a_4 \times 16$$

$$+ a_5 \times 32 + a_6 \times 64 + a_7 \times 128 + a_8 \times 256$$

$$+ \dots$$

$$+ a_{97} \times 2 + a_{98} \times 4 + a_{99} \times 8 + a_{100} \times 16$$

$$= 2(a_1 + a_5 + \dots + a_{97})$$

とある。A, B, C, D について

とある。等比数列は 25 個ある。

また、D は等比数列の第 25 項

である。

$$D = a_4 + a_8 + \dots + a_{100}$$

$$= a_{4 \cdot 1} + a_{4 \cdot 2} + \dots + a_{4 \cdot 25}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} a_{4k}$$

C は D より 4 倍、B は C より 4 倍、A は

B より 4 倍である。よって

とある。

$$C = \sum_{k=1}^{25} a_{4k-1}$$

$$B = \sum_{k=1}^{25} a_{4k-2}$$

$$A = \sum_{k=1}^{25} a_{4k-3}$$

とある。(2) より $a_n = n+1$

である。

$$A = \sum_{k=1}^{25} \{(4k-3)+1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (4k-2)$$

$$B = \sum_{k=1}^{25} \{(4k-2)+1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (4k-1)$$

$$C = \sum_{k=1}^{25} \{(4k-1)+1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} 4k$$

$$D = \sum_{k=1}^{25} (4k+1)$$

より

$$\sum_{k=1}^{100} a_k c_k = 2A + 4B + 8C + 16D$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{25} (4k-2) + 4 \sum_{k=1}^{25} (4k-1)$$

$$+ 8 \sum_{k=1}^{25} 4k + 16 \sum_{k=1}^{25} (4k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{25} \{2(4k-2) + 4(4k-1) + 8 \cdot 4k + 16(4k+1)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{25} (80k-2)$$

$$= 80 \sum_{k=1}^{25} k - \sum_{k=1}^{25} 2$$

$$= 80 \cdot \frac{1}{2} \cdot 25(25+1) - 25 \times 2$$

$$= 40 \times 25 \times 26 - 50$$

$$= 26000 - 50$$

$$= 25950$$

13

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a

公差 d とある。一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$\text{与えらる。よって } a_3 = 8, a_7 - a_5 = 6$$

より

$$a + (3-1)d = 8,$$

$$\{a + (7-1)d\} - \{a + (5-1)d\} = 6$$

より

$$a + 2d = 8, 2d = 6$$

$$\text{より } d = 3, a = 2 \text{ とある。}$$

よって一般項 a_n は

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n - 1$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ は次の漸化式で与えられる。

$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_{n+1} = 2b_n - 3 \end{cases}$$

特性方程式より $C = 2C - 3$

したがって $C = 3$ とある。

$$b_{n+1} = 2b_n - 3$$

$$-) \quad C = 2C - 3$$

$$b_{n+1} - C = 2(b_n - C)$$

$C = 3$ とある。

$$b_{n+1} - 3 = 2(b_n - 3) \dots (*)$$

と変換できる。よって $C_n = b_n - 3$

とある。 $b_{n+1} - 3$ は C_{n+1} と表せる。

(*) より

$$C_{n+1} = 2C_n$$

が成り立つ。また $C_1 = b_1 - 3 = 5 - 3 = 2$

より 数列 $\{C_n\}$ は

$$\begin{cases} C_1 = 2 \\ C_{n+1} = 2C_n \end{cases}$$

が成り立つ。よって、初項 2、公比 2 の

等比数列である。

$$(C_n \text{ について } C_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

$$\text{よって } C_n = b_n - 3 \text{ より}$$

$$b_n - 3 = 2^n$$

$$\text{よって } b_n = 2^n + 3$$

(3)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{a_k a_{k+1}} + \frac{1}{2b_k - 6} \right)$$

$$(1) \text{ より } a_n = 3n - 1 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_k a_{k+1} &= (3k-1) \{3(k+1)-1\} \\ &= (3k-1)(3k+2) \end{aligned}$$

とある。よって

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(3k-1)(3k+2)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right)$$

と部分分数分解できる。

よって (2) より

$$\begin{aligned} 2b_k - 6 &= 2(2^k + 3) - 6 \\ &= 2 \times 2^k + 6 - 6 \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

とある。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2b_k - 6} &= \frac{1}{2^{k+1}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \end{aligned}$$

とある。よって、これは初項 $\frac{1}{4}$ 、

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列である。

よって各項を足す。

したがって

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2b_k - 6}$$

とある。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3n+2-2}{2(3n+2)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{3n}{2(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

また

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2b_k - 6} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-1} \\ &= \frac{\frac{1}{4} \{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \{1 - (\frac{1}{2})^n\} \div \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \{1 - (\frac{1}{2})^n\}$$

したがって

$$S_n = \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{2} \{1 - (\frac{1}{2})^n\}$$

$$= \frac{n}{2(3n+2)} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$= \frac{n + (3n+2)}{2(3n+2)} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$= \frac{4n+2}{2(3n+2)} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$= \frac{2(2n+1)}{2(3n+2)} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

$$= \frac{2n+1}{3n+2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

(1)

(2)

(3)

421 = .

$$421 =$$

$$S = (n-1)2^{n+3} + f$$

15

(1)

等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a .

公比 r がある. 条件より $r > 0$.

また一般項 a_n は $a_n = ar^{n-1}$

より $a_2 = ar^{2-1} = ar = 2 \dots ①$

$a_4 = ar^{4-1} = ar^3 = 8 \dots ②$

したがって ②より $ar^3 = ar \cdot r^2$ がある.

①を代入して置く.

$$2 \cdot r^2 = 8$$

より $r^2 = 4$ より $r = \pm 2$.

$r > 0$ より $r = 2$.

(2)

数列 $\{b_n\}$ の初項が 3. 第 n 項

までの和が S_n である.

$$S_n = n^2 + n + 1$$

である. より

・ $n=1$ のとき

$$b_1 = S_1 = 1^2 + 1 + 1 = 3$$

・ $n \geq 2$ のとき

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (n^2 + n + 1) - \{(n-1)^2 + (n-1) + 1\}$$

$$= (n^2 + n + 1) - (n^2 - 2n + 1 + n - 1 + 1)$$

$$= (n^2 + n + 1) - (n^2 - n + 1)$$

$$= n^2 + n + 1 - n^2 + n - 1$$

$$= 2n \dots (*)$$

したがって (*)より $n=1$ を代入して $b_1 = 3$

とある (2)より.

よって 数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \begin{cases} 3 & (n=1) \\ 2n & (n \geq 2) \end{cases}$$

③ 数列 $\{b_n\}$ は

$\{b_n\}: 3, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$

とある.

(3)

(1) より $b_3 = 2 \cdot 3 = 6$ である.

また自然数 n に対して $n \geq 1$ かつ $n+3 \geq 4$ であるから.

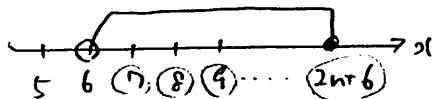
$$b_{n+3} = 2(n+3) = 2n+6$$

である. よって $b_3 < x \leq b_{n+3}$

より

$$6 < x \leq 2n+6$$

を満たす整数 x は

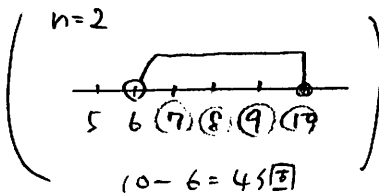


$$x = 7, 8, 9, \dots, 2n+6$$

である. したがって C_n は

$$C_n = (2n+6) - 6$$

$$= 2n \quad \text{④} \quad \text{である.}$$



(4) より

$$S = C_1 a_1 + C_2 a_2 + \dots + C_n a_n$$

とある. (1) より 数列 $\{a_n\}$

の初項 a は $a = 1$ より

$$\text{一般項 } a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

よって

$$S = \sum_{k=1}^n C_k a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n 2k \cdot 2^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^n k \cdot 2^k$$

$$= 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

より

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$$

$$-) 2S = \quad 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1}$$

$$- S = \underbrace{1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^n}_{\text{等比数列の和}} - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= \frac{1 \cdot 2(2^n - 1)}{2 - 1} - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 2 - n \cdot 2^{n+1}$$

$$= -(n-1)2^{n+1} - 2$$

より

$$-S = -(n-1)2^{n+1} - 2$$

より

$$S = (n-1)2^{n+1} + 2$$

16

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 を a 、

公差 d とする。一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

である。 $n=1$ のとき

$$a_6 - a_2 = 2$$

$$\{a + (6-1)d\} - \{a + (2-1)d\} = 2$$

$$(a+5d) - (a+d) = 2$$

$$4d = 2 \quad \text{よって} \quad d = \frac{1}{2}$$

$$\text{また} \quad a_1 + a_3 = 2(p+1)$$

$$a + \{a + (3-1)d\} = 2p+2$$

$$a + a + 2d = 2p+2$$

$$d = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$2a + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2p+2$$

$$2a = 2p+1$$

$$\text{よって} \quad a = p + \frac{1}{2}$$

$$\text{よって一般項} \quad p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$$

(2)

数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は (1) より

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$= (p + \frac{1}{2}) + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}n + p$$

である。よって

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30}$$

$$= (\frac{1}{2} \cdot 2 + p) + (\frac{1}{2} \cdot 4 + p) + (\frac{1}{2} \cdot 6 + p)$$

$$+ \dots + (\frac{1}{2} \cdot 30 + p)$$

$$= (1+p) + (2+p) + (3+p) + \dots + (15+p)$$

これは初項 $1+p$ 、末項 $15+p$ 、項数 15

の等差数列の和である。

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{30} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (1+p) + (15+p) \cdot 15$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (16+p)$$

$$= 15(8+p) \text{ である。}$$

$$\text{また} \quad a_2 + a_4 + \dots + a_{30} = 135$$

よって

$$15(8+p) = 135$$

$$8+p = 9$$

$$\text{よって} \quad p = 1$$

(17)

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{30}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} a_{2k}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (\frac{1}{2} \cdot 2k + p)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (k+p)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} p$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (15+1) + 15p$$

$$= 120 + 15p$$

とわかる。

(13)

(2) より $p=1$ である。

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{2}n + 1$$

である。

$$\left(\begin{array}{l} \{a_n\}: \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \dots \\ \{b_n\}: 1, 2, 2, 3, 3, 4, \dots \end{array} \right)$$

1段 2段 3段 ...

これは2つの区間、7段ある。

それぞれ $\{a_n\}$ の区間、7段ある。

1段、2段、...、7段

$$\left(\begin{array}{l} \{a_n\}: \dots \quad \left| \begin{array}{l} a_{2k-1} \quad a_{2k} \end{array} \right| \dots \\ \{b_n\}: \dots \quad \left| \begin{array}{l} b_{2k-1} \quad b_{2k} \end{array} \right| \dots \end{array} \right)$$

1段は $\{a_n\}$ の区間、7段ある。

a_{2k-1} と a_{2k} 、 $\{b_n\}$ の区間

b_{2k-1} と b_{2k} である。

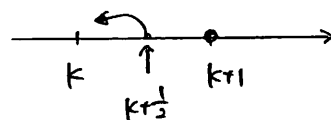
$$\text{よって} \quad a_n = \frac{1}{2}n + 1 \text{ より}$$

$$a_{2k} = \frac{1}{2} \cdot 2k + 1 = k+1$$

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2} \cdot (2k+1) + 1 = k + \frac{1}{2}$$

である。 k は自然数である。

$k+1 \in \mathbb{N}$ である。



また $a_{2k} = k+1$ の整数部分は

$k+1$ である。 $b_{2k} = k+1$

$a_{2k+1} = k + \frac{1}{2}$ の整数部分は

$k + \frac{1}{2}$ である。 k と $k+1$ の間にあり、

整数部分 $b_{2k+1} = k$ である。

よって

$$b_1 a_1 + b_2 a_2 + \dots + b_{30} a_{30}$$

$$= (b_1 a_1 + b_2 a_2) + (b_3 a_3 + b_4 a_4) + \dots + (b_{29} a_{29} + b_{30} a_{30})$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (b_{2k-1} a_{2k-1} + b_{2k} a_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^{15} \left\{ k \cdot (k + \frac{1}{2}) + (k+1)(k+1) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (k^2 + \frac{1}{2}k + k^2 + 2k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^{15} (2k^2 + \frac{5}{2}k + 1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{15} k^2 + \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 15 \cdot (15+1) + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot (15+1) + 15$$

$$= 5 \cdot 16 \cdot 31 + 5 \cdot 15 \cdot 4 + 15$$

$$= 2480 + 300 + 15$$

$$= 2795$$

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ は初項 1
公差 2 で与えらる。一般項 a_n は
$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2$$

$$= 2n - 1$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項
までの和が $S_n = \frac{1}{2}n(3n-1)$
で与えらる。

$n=1$ のとき
 $b_1 = S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (3 \cdot 1 - 1)$
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$

$n \geq 2$ のとき

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= \frac{1}{2}n(3n-1) - \frac{1}{2}(n-1)\{3(n-1)-1\}$$
$$= \frac{1}{2}n(3n-1) - \frac{1}{2}(n-1)(3n-4)$$
$$= \frac{1}{2}(3n^2 - n) - \frac{1}{2}(3n^2 - 7n + 4)$$
$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 2$$
$$= 3n - 2 \quad (*)$$

したがって $(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$3 \cdot 1 - 2 = 1 = b_1$$

したがって $n=1$ のときも成り立つ

したがって
$$b_n = 3n - 2$$

(3)

(1)(2) より

$$a_n = 2n - 1, \quad b_n = 3n - 2$$

で与えらる

$$\{a_n\}: \textcircled{1} 3, \textcircled{5}, \textcircled{7} 9, 11, \textcircled{13}, 15, 17, \textcircled{19}, 21, \dots$$
$$\{b_n\}: \textcircled{1} 4, \textcircled{7}, 10, \textcircled{13}, 16, \textcircled{19}, \dots$$

したがって $\{a_n\}$ から $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は互いに素な
項が 1 個しかなく、それらは $\{c_n\}$ の初項から第 n 項
で与えらる。よって

$$\{c_n\}: 3, 5, 9, 11, 15, 17, \dots$$

で与えらる。

したがって $\{c_n\}$ は 3 の倍数
でない。また、7 を含み
ない。

$$\{c_n\}: \begin{array}{c} \cancel{3}, 5 \\ 1 \text{ 番} \end{array} \mid \begin{array}{c} \cancel{7}, 9, 11 \\ 2 \text{ 番} \end{array} \mid \begin{array}{c} \cancel{13}, 15, 17 \\ 3 \text{ 番} \end{array} \mid \dots = 3n(4n^2 + 6n + 2 - 4n - 4 + 1)$$

したがって $\{c_n\}$ は最初から 1 番, 2 番, ...
と 1 から n 番まで、各 1 番から n 番まで

$\{c_n\}$ の項に 1 を入す。2 番目と 3 番目の
 $\{c_n\}$ の項に 2 を入す。

$$\{c_n\}: \dots \mid \begin{array}{c} \cancel{a_{3k-2}}, a_{3k-1}, a_{3k} \\ k \text{ 番} \end{array} \mid \dots$$

3 の倍数でない。また、7 を含み
ない。また、 k 番目の 3 番目は a_{3k}

で与えらる。したがって $\{c_n\}$ は 3 の倍数
でない。また、7 を含みない。

したがって $\{c_n\}$ は 3 の倍数
でない。また、7 を含みない。

したがって $\{c_n\}$ は 3 の倍数
でない。また、7 を含みない。

$$\{c_n\}: \begin{array}{c} 1 \text{ 番} \\ \cancel{3}, 5 \end{array} \mid \begin{array}{c} 2 \text{ 番} \\ \cancel{7}, 9, 11 \end{array} \mid \dots \mid \begin{array}{c} k \text{ 番} \\ \cancel{a_{3k-2}}, a_{3k-1}, a_{3k} \end{array} \mid$$
$$\{c_n\}: \begin{array}{c} c_1, c_2 \\ c_3, c_4 \end{array} \mid \dots \mid \begin{array}{c} c_{3k-1}, c_{3k} \end{array} \mid$$

よって $c_{3k-1} = a_{3k-1}, c_{3k} = a_{3k}$ が成り立つ。

$$c_1 c_2 + c_3 c_4 + \dots + c_{3n-1} c_{3n}$$
$$= \sum_{k=1}^n c_{3k-1} c_{3k}$$
$$= \sum_{k=1}^n a_{3k-1} a_{3k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{2(3k-1)-1\} \{2 \cdot 3k-1\}$$

$$= \sum_{k=1}^n (6k-3)(6k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (36k^2 - 24k + 3)$$

$$= 36 \sum_{k=1}^n k^2 - 24 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 3$$

$$= 36 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 24 \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + 3n$$

$$= 6n(n+1)(2n+1) - 12n(n+1) + 3n$$

$$= 3n \{ 2(n+1)(2n+1) - 4(n+1) + 1 \}$$

$$= 3n(4n^2 + 6n + 2 - 4n - 4 + 1)$$

$$= 3n(4n^2 + 2n - 1)$$

(3)

$$a_\ell = b_m \text{ と仮定する。}$$

$$2\ell - 1 = 3m - 2$$

$$2\ell - 1 = 3m - 2 \quad \text{より} \quad 3m - 2\ell = 1 \quad \text{①}$$

したがって $m=1, \ell=1$ は

① を満たす。

$$3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1 \quad \text{②}$$

よって ①-② より

$$3m - 2\ell = 1$$
$$-) \quad 3\ell - 2\ell = 1$$

$$3(m-1) - 2(\ell-1) = 0$$

$$3(m-1) = 2(\ell-1) \quad \text{③}$$

$$m-1 = 2k, \quad \ell-1 = 2j$$

したがって $m=1, \ell=1$ は

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 2$$
$$6 = 4$$

で与えらる。
したがって $m=1, \ell=1$ は

$$m-1 = 2k$$

したがって $m=1, \ell=1$ は

$$3 \cdot 2 = 2 \cdot 2$$

$$6 = 4$$

$$2\ell - 1 = 3m - 2$$

$$\ell = 3k + 1 \text{ とおくと}$$

$$a_\ell = b_m \text{ と仮定する。}$$

したがって $m=1, \ell=1$ は

$$k=0 \text{ のとき } \ell=1, m=1$$

$$k=1 \text{ のとき } \ell=4, m=3$$

$$k=2 \text{ のとき } \ell=7, m=5$$

したがって

19

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a とする

公差が -3 であり、一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)(-3)$$

より、第54項は

$$a_{54} = 65$$

$$\{a + (2-1)(-3)\} + \{a + (3-1)(-3)\} = 65$$

$$a - 3 + a - 6 = 65$$

$$2a - 9 = 65$$

$$2a = 74 \quad a = 37$$

より

$$a_n = 37 + (n-1)(-3)$$

$$= 37 - 3n + 3$$

$$= -3n + 40$$

(2)

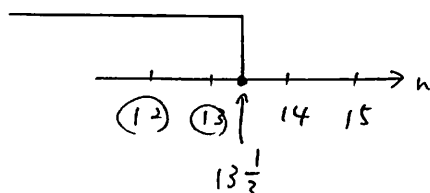
$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_{20}|$$

より (1) より $a_n = -3n + 40$ より

$a_n \geq 0$ となる n は

$$-3n + 40 \geq 0$$

$$n \leq \frac{40}{3} = 13 \frac{1}{3}$$



より $n \leq 13$ のとき $a_n \geq 0$

$n \geq 14$ のとき $a_n \leq 0$

したがって

$$|a_n| = \begin{cases} a_n & (n \leq 13) \\ -a_n & (n \geq 14) \end{cases}$$

したがって、421は

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = a_1 + a_2 + \dots + a_{13}$$

$$+ (-a_{14}) + (-a_{15}) + \dots + (-a_{20})$$

$$= \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{13})}_A - \underbrace{(a_{14} + a_{15} + \dots + a_{20})}_B$$

より、 a と -3 の放物 $\{a_n\}$ の

等差数列である

$$A = a_1 + a_2 + \dots + a_{13}$$

は、初項 a_1 、末項 a_{13} 、項数 13

の等差数列の和より

$$A = \frac{1}{2} \times 13 \times (a_1 + a_{13})$$

$$B = a_{14} + a_{15} + \dots + a_{20}$$

は初項 a_{14} 、末項 a_{20} 、項数 7

の等差数列の和より

$$B = \frac{1}{2} \times 7 \times (a_{14} + a_{20})$$

より

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = A - B$$

$$= \frac{1}{2} \times 13 \times (37 + 1)$$

$$- \frac{1}{2} \times 7 \times (-2 - 20)$$

$$= \frac{1}{2} \times 13 \times 38 + \frac{1}{2} \times 7 \times 22$$

$$= 247 + 77$$

$$= \underline{324}$$

(3)

$$\sum_{k=1}^{20} |a_k| = (a_1 + a_2 + \dots + a_{13})$$

$$- (a_{14} + \dots + a_{20})$$

$$= 2(a_1 + a_2 + \dots + a_{13})$$

$$- (a_1 + a_2 + \dots + a_{13} + a_{14} + \dots + a_{20})$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{13} a_k - \sum_{k=1}^{20} a_k$$

したがって、17は

(3)

$$(2) \text{より } |a_n| = \begin{cases} a_n & (n \leq 13) \\ -a_n & (n \geq 14) \end{cases}$$

より

$$\frac{a_n + |a_n|}{2} = \begin{cases} \frac{a_n + a_n}{2} = a_n & (n \leq 13) \\ \frac{a_n - a_n}{2} = 0 & (n \geq 14) \end{cases}$$

したがって

$$\sum_{k=1}^{20} \left(\frac{a_k + |a_k|}{2} \right)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{13} a_k^2$$

より (1) より $a_n = -3n + 40$

である

$$\sum_{k=1}^{13} a_k^2 = \sum_{k=1}^{13} (-3k + 40)^2$$

$$= \sum_{k=1}^{13} (9k^2 - 240k + 1600)$$

$$= 9 \sum_{k=1}^{13} k^2 - 240 \sum_{k=1}^{13} k + \sum_{k=1}^{13} 1600$$

$$= 9 \times \frac{1}{6} \times 13 \times 14 \times (2 \times 13 + 1)$$

$$- 240 \times \frac{1}{2} \times 13 \times (13 + 1)$$

$$+ 1600 \times 13$$

$$= 9 \times \frac{1}{6} \times 13 \times 14 \times 27$$

$$- 120 \times 13 \times 14$$

$$+ 1600 \times 13$$

$$= 3 \times 13 \times 7 \times 27$$

$$- 120 \times 13 \times 14$$

$$+ 1600 \times 13$$

$$= 7371 - 21840$$

$$+ 20800$$

$$= \underline{6331}$$

19

(1)

$$a_{n+1} = n a_n - n^2 + 2 \dots (*)$$

1: おいて (*) に $n=1$ を代入して

$$a_2 = 1 \cdot a_1 - 1^2 + 2$$

$$= a_1 + 1$$

$$= 2 + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a_1 = 2$$

$$= 3$$

(*) に $n=2$ を代入して

$$a_3 = 2a_2 - 2^2 + 2$$

$$= 2a_2 - 2$$

$$= 2 \cdot 3 - 2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a_2 = 3$$

$$= 4$$

(*) に $n=3$ を代入して

$$a_4 = 3a_3 - 3^2 + 2$$

$$= 3a_3 - 7 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} a_3 = 4$$

$$= 3 \times 4 - 7$$

$$= 5$$

よって

$$a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 5$$

(2)

(1) より

$$a_n = n + 1 \dots (A)$$

と検証したい。

(I)

$$n=1 \text{ のとき}$$

$$(A) = 1+1 = 2 = a_1 = (\text{右辺})$$

よって $n=1$ のとき (A) は成り立つ。

(II)

$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると

$$\text{つまり } a_k = k+1 \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。 $\Rightarrow$ $n=k$ を (*) に代入すると

代入すると

$$a_{k+1} = k a_k - k^2 + 2 \quad (\textcircled{1} \text{ を用いて})$$

$$= k(k+1) - k^2 + 2$$

$$= k^2 + k - k^2 + 2$$

$$= k+2$$

$$= (k+1) + 1$$

よって $n=k+1$ のとき

(A) が成り立つ。

以上 (I)(II) より

すべての自然数 n について

(A) が成り立つ。

$$\text{つまり } a_n = n + 1$$

(3)

$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{30}} + \sqrt{a_{31}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \quad (\text{有理化})$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{1 \times (\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}})}$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{(\sqrt{a_k})^2 - (\sqrt{a_{k+1}})^2}$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k+1}}}{a_k - a_{k+1}} \quad ((2) \text{ より})$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(k+1) - (k+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{30} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{30} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4})$$

$$+ \dots + (\sqrt{32} - \sqrt{31})$$

$$= \sqrt{32} - \sqrt{2}$$

$$= 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

相殺

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項は1, 公差は d

より一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

よって $a_1 + a_2 + a_3 = 9$ より

$$1 + (1+d) + (1+2d) = 9$$

より

$$3 + 3d = 9$$

$$3d = 6 \quad \text{より} \quad d = 2$$

よって

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$$

(2)

$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, \dots$

より数列 $\{b_n\}$ は

$\{b_n\} = \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \mid \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \mid \frac{1}{7}, \dots$
 ① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

である。より

$$b_3 = \frac{1}{3}, b_{10} = \frac{1}{7}$$

よって 第10項より第16項の7個が $\frac{1}{7}$

第17項から第25項の9個が $\frac{1}{9}$

$$\text{より} \quad b_{20} = \frac{1}{9}$$

よって $b_n = \frac{1}{35}$ とおくと $n=21$ まである。

$\frac{1}{33} \mid \frac{1}{35}, \frac{1}{35}, \dots, \frac{1}{35} \mid$
 35個

$\frac{1}{35}$ に分母前には全部で

$$1 + 3 + 5 + \dots + 33 \quad \text{個}$$

の項がある。よって $a_n = 33$

より

$$2n - 1 = 33$$

よって $n = 17$ より 33は数列 $\{a_n\}$

の第17項である。より

$$1 + 3 + 5 + \dots + 33$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{17}$$

$$= \sum_{k=1}^{17} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{17} (2k-1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{17} k - \sum_{k=1}^{17} 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 17(17+1) - 17$$

$$= 17 \times 18 - 17$$

$$= 306 - 17$$

$$= 289$$

よって数列 $\{b_n\}$ の最終項は

$$\text{現れる} \frac{1}{35} \text{ は } 289 + 1 = 290$$

より 第290項

よって最終項は現れる $\frac{1}{35}$ は

$$289 + 35 = 324$$

より 第324項

(3) (2) の結果を使うと

$\{b_n\} = \dots, \frac{1}{33} \mid \frac{1}{35}, \frac{1}{35}, \dots, \frac{1}{35}, \dots$
 (289) (290) (291) (300)
 ① ② ③

b_{300} は 11番目の $\frac{1}{35}$ である。

数列 $\{b_n\}$ は $\frac{1}{33}, \frac{1}{35}, \frac{1}{35}, \dots$ の

項で区切りをなして $\frac{1}{33} + \frac{1}{35} < 1$ 。

よって $\frac{1}{a_k}$ が添字区切りを

なすところ (2) より $\frac{1}{33}$ が

添字のか 17個より $\frac{1}{35}$ は 18個

にある。

$\{b_n\} = \frac{1}{1} \mid \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \mid, \dots, \frac{1}{33} \mid \frac{1}{35}, \dots, \frac{1}{35}, \dots$
 ① ② ③ ④ ⑤
 (289) (290) ... (300)

第k群の中へ値だけ足ると

$$\frac{1}{a_k} \text{ が } a_k \text{ 個ある}$$

$$\frac{1}{a_k} \times a_k = 1 \text{ である}$$

$$\text{よって } b_1 + b_2 + \dots + b_{300} = \sum_{k=1}^{300} b_k \text{ は}$$

$$\sum_{k=1}^{300} b_k = (18 \text{ 群} \sim 17 \text{ 群の和})$$

$$+ \left(\frac{1}{35} \text{ が } 11 \text{ 個} \right)$$

$$= 1 \times 17 + \frac{1}{35} \times 11$$

$$= 17 + \frac{11}{35}$$

$$= \frac{595 + 11}{35} = \frac{606}{35}$$

21

(1)

等比数列 $\{a_n\}$ は、初項 3.

公比 r を満たす。一般項 a_n は

$$a_n = 3 \cdot r^{n-1}$$

よって

$$a_2 + a_3 = 18$$

$$3r + 3r^2 = 18$$

(2)

$$r^2 + r - 6 = 0$$

$$(r+3)(r-2) = 0$$

$$r = -3, 2$$

条件より $r > 0$ より

$$r = 2$$

(1)

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \text{ は}$$

等比数列 $\{a_n\}$ にあつて

初項 a_1 から第 n 項 a_n

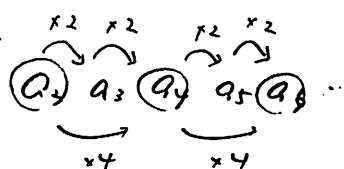
までの項の和 S_n の値を求めよ

ただし、初項 3, (1) より (2) より

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$= \frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$$

また



$$\text{よって } a_2 + a_4 + \dots + a_{12}$$

$$12 \text{ 項の和 } a_2 = ar = 3 \times 2 = 6$$

公比 4, 項数 6 個の等比数列の和より

$$a_2 + a_4 + \dots + a_{12}$$

$$= \frac{3 \cdot 2(4^6 - 1)}{4 - 1} = 2(4^6 - 1)$$

よって

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > \frac{1}{2}(a_2 + a_4 + \dots + a_{12})$$

$$3(2^n - 1) > \frac{1}{2} \times 2(4^6 - 1)$$

$$2^n - 1 > 4^6 - 1$$

よって

$$2^n > 4^6$$

$$2^n > (2^2)^6$$

$$2^n > 2^{12}$$

したがって n は 1 より大きい整数である。

$$n > 12$$

よって n は 13 以上の整数である。

よって

$$n = 13$$

(3)

$$(1) (2) \text{ より } a_1 = 3, a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$$

等比数列 $\{b_n\}$ は

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_{n+1} = b_n + 3 \cdot 2^{2n-1} \end{cases}$$

で定義されている。

$$n \geq 2 \text{ のとき}$$

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{2k-1}$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \cdot 2^{2k} \cdot 2^{-1}$$

$$= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{2} \cdot 4^k$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{3}{2} \cdot 4^k = \frac{3}{2} \cdot 4^1 + \frac{3}{2} \cdot 4^2 + \dots + \frac{3}{2} \cdot 4^{n-1}$$

$$\text{よって、初項 } \frac{3}{2} \times 4 = 6, \text{ 公比 } 4, \text{ 項数 } n-1$$

の等比数列の和より

$$b_n = 3 + \frac{6(4^{n-1} - 1)}{4 - 1}$$

$$= 3 + \frac{6(4^{n-1} - 1)}{3}$$

$$= 3 + 2(4^{n-1} - 1)$$

$$= 3 + 2 \cdot 4^{n-1} - 2 = 2 \cdot 4^{n-1} + 1 \dots (*)$$

(*) にあつて、 $n=1$ を代入すると

$$2 \cdot 4^{1-1} + 1 = 2 \cdot 4^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

と一致する。よって

$$b_n = 2 \cdot 4^{n-1} + 1$$

(1) $\frac{1}{1} \mid \frac{2}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \mid \frac{4}{4}, \dots$
 1群 2群 3群

分母が k である分数が k 個
 区別して k 群とすると

k 群には k 個の項がある。

$\frac{1}{10}$ は 10 群の最後の項

である。1群から10群

までの項の総和は

$$1 + 2 + \dots + 10$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (10+1) = 55 \text{ 個}$$

よって $\frac{1}{10}$ は数列 $\{a_n\}$ の第55項

(2)

分母が k である分数の和は

$$\frac{k}{k} + \frac{k-1}{k} + \dots + \frac{1}{k}$$

$$= \frac{1}{k} \{ k + (k-1) + \dots + 1 \}$$

$$= \frac{1}{k} \times \frac{1}{2} k(k+1) = \frac{k+1}{2}$$

また数列 $\{a_n\}$ の初項から $\frac{1}{n}$ まで
 書かれた項までの和について

$$\frac{1}{1} \mid \frac{2}{2}, \frac{1}{2} \mid \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \mid \frac{4}{4}, \dots \mid \frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \dots, \frac{1}{n}$$

1群 2群 3群 ... n 群

k 群の中での和は $\frac{k+1}{2}$ である。

1群から n 群までの和は

$$\sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} n$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1) + \frac{1}{2} n$$

$$= \frac{1}{4} n(n+1) + \frac{2}{4} n$$

$$= \frac{1}{4} n \{ (n+1) + 2 \}$$

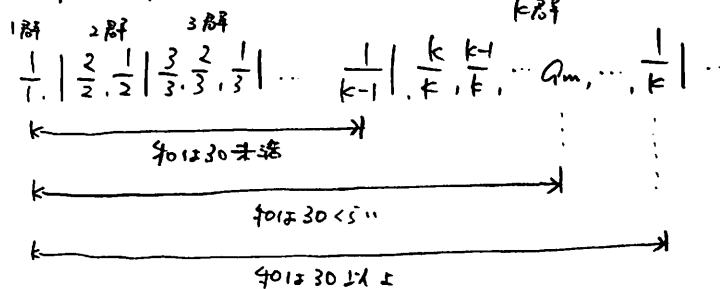
$$= \frac{1}{4} n(n+3)$$

数列 $\{a_n\}$ の初項から

第 m 項までの和 $\sum_{k=1}^m a_k$

が初項で30以上になる a_m

が第 k 群 $1 \leq k \leq 30$ と



$$\{ 1群 \sim (k-1)群までの和 \} < 30 \leq \{ 1群 \sim k群までの和 \}$$

が成り立つ。(1)の結果より

$$\frac{1}{4} (k-1) \{ (k-1) + 2 \} < 30 \leq \frac{1}{4} k(k+3)$$

(x4)

$$(k-1)(k+1) < 120 \leq k(k+3)$$

よって $k=10$ と推測される

$$9 \times 11 < 120 \leq 10 \times 13$$

(99)

(130)

よって成り立つので、条件を満たす a_m は第10群に属する。

1群から9群までの項の総和は

$$\sum_{k=1}^9 \frac{k+1}{2} = \frac{1}{4} \times 9 \times (9+3) = 27$$

である。

$$\left(\frac{1}{1} \mid \frac{2}{2} \dots \frac{1}{9} \mid \frac{10}{10}, \frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \dots \right)$$

和は27

第10群の最初の何個目までの和が30以上になるかを
 考えよう。

$$\frac{10}{10} < 3 = \frac{30}{10} \quad (1 \text{ 番目})$$

$$\frac{10}{10} + \frac{9}{10} < 3 = \frac{30}{10} \quad (2 \text{ 番目まで})$$

$$\frac{10}{10} + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} < 3 = \frac{30}{10} \quad (3 \text{ 番目まで})$$

$$\frac{10}{10} + \frac{9}{10} + \frac{8}{10} + \frac{7}{10} > 3 = \frac{30}{10} \quad (4 \text{ 番目まで})$$

よって、よって $\sum_{k=1}^m a_k$ が初項で30以上になる a_m は $a_m = \frac{7}{10}$

また $a_m = \frac{7}{10}$ となる m は 1群から9群までの項の総和が

$$1+2+\dots+9 = \frac{1}{2} \times 9 \times 10 = 45 \text{ 個} \text{ である。} \frac{7}{10} \text{ は 10 群の}$$

4番目なので $45+4=49$

よって、 $\sum_{k=1}^m a_k$ が初項で30以上になる m は $m=49$

$$\therefore a_{49} = \frac{7}{10}$$

23

(1)

漸化式は $a_{n+1} = pa_n + q$ と表せる

$$a_2 = pa_1 + q$$

$$\therefore a_1 = 3, a_2 = \frac{9}{2} \text{ より}$$

$$\frac{9}{2} = p \times 3 + q$$

$$3p + q = \frac{9}{2}$$

$$\textcircled{A} \quad 6p + 12 = 9$$

$$6p = -3 \quad \therefore p = -\frac{1}{2}$$

(2)

(1) より

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 6 \quad (n=1, 2, \dots) \end{cases}$$

漸化式の特性方程式より

$$c = -\frac{1}{2}c + 6$$

$$\therefore \frac{3}{2}c = 6 \quad \therefore c = 4$$

よって

$$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 6$$

$$\rightarrow c = -\frac{1}{2}c + 6$$

$$a_{n+1} - c = -\frac{1}{2}(a_n - c)$$

$$\therefore a_n - c = 4 \text{ とおくと}$$

$$a_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(a_n - 4) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。

$$\therefore b_n = a_n - 4 \text{ とおくと}$$

$$a_{n+1} - 4 = b_{n+1} \text{ とおくと}$$

①より

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$$

よって数列 $\{b_n\}$ は初項より

$$b_1 = a_1 - 4$$

$$= 3 - 4 = -1$$

であり、公比が $-\frac{1}{2}$ の等比数列

である。よって b_n は

$$b_n = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

である。

$$b_n = a_n - 4 \text{ とおくと}$$

代入すると

$$a_n - 4 = -\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって

$$a_n = 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} \{1 - (-\frac{1}{2})^n\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} \{1 - (-\frac{1}{2})^n\} \div \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \{1 - (-\frac{1}{2})^n\} \times 2$$

(3)

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_{n+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n A_k A_{k+1}$$

より、2点 $A_k(a_k, 0)$ と

$A_{k+1}(a_{k+1}, 0)$ とを結ぶと

線分の長さは $|A_k A_{k+1}| = |a_{k+1} - a_k|$

$$|A_k A_{k+1}| = |a_{k+1} - a_k|$$

よって漸化式 (2) の結果より

$$|A_k A_{k+1}| = \left| \left\{ 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} - \left\{ 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \right|$$

$$= \left| 4 - \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \right| \leftarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{3}{2}$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{3}{2} \right|$$

$$= \left| \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right| \times \left| \frac{3}{2} \right|$$

$$= \left| -\frac{1}{2} \right|^{k-1} \times \frac{3}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \frac{3}{2}$$

よって

$$\sum_{k=1}^n A_k A_{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(初項 $\frac{3}{2}$, 公比 $\frac{1}{2}$, 項数 n の等比数列)

24

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、

公差を d とすると一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

と表す。よって

$$a_1 + a_2 + a_3 = 42, a_4 = 26$$

より

$$a + (a+d) + (a+2d) = 42$$

$$\begin{cases} a + 3d = 26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a + 3d = 42 \\ a + 3d = 26 \end{cases}$$

$$\text{よって } a = 8, d = 6$$

$$\begin{aligned} \text{よって } a_n &= 8 + (n-1) \cdot 6 \\ &= \underline{6n + 2} \end{aligned}$$

(2)

$$3S_n = 4b_n - 9n + 8 \dots \textcircled{1}$$

$n=1$ のとき

$$\textcircled{1}: n=1 \text{ を代入すると}$$

$$3S_1 = 4b_1 - 9 \cdot 1 + 8$$

$$\Rightarrow b_1 = S_1 \text{ より}$$

$$3b_1 = 4b_1 - 9 + 8$$

$$-b_1 = -1 \text{ より } b_1 = 1$$

また $\textcircled{1}$ に $n=1$ を代入すると

$$3S_{n+1} = 4b_{n+1} - 9(n+1) + 8 \dots \textcircled{2}$$

より

$$\left(\begin{aligned} &\Rightarrow \textcircled{2} \text{ は } n+1 \geq 1 \text{ より } n \geq 0 \\ &\text{で成り立つ} \end{aligned} \right)$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ より}$$

$$3S_{n+1} = 4b_{n+1} - 9(n+1) + 8$$

$$-) 3S_n = 4b_n - 9n + 8$$

$$3(S_{n+1} - S_n) = 4(b_{n+1} - b_n) - 9 \dots \textcircled{3}$$

$\Rightarrow$ a_n の自然数 $n=1$ より

$$S_{n+1} - S_n = b_{n+1}$$

が成り立つ。 $\textcircled{3}$ に $\Rightarrow$ を代入して

$$3b_{n+1} = 4b_{n+1} - 4b_n - 9$$

$$-b_{n+1} = -4b_n - 9$$

より

$$b_{n+1} = 4b_n + 9$$

よって $b_1 = 1$ と仮定して

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ b_{n+1} = 4b_n + 9 \end{cases}$$

を解く。特性方程式より

$$C = 4C + 9$$

$$\text{よって } -3C = 9 \text{ より } C = -3$$

より

$$b_{n+1} = 4b_n + 9$$

$$-) C = 4C + 9$$

$$b_{n+1} - C = 4(b_n - C)$$

$$C = -3 \text{ を代入して}$$

$$b_{n+1} + 3 = 4(b_n + 3) \dots (*)$$

が成り立つ。 $(*)$ より

$$x_n = b_n + 3 \text{ とおく}$$

$$b_{n+1} + 3 = x_{n+1} \text{ より}$$

$$x_{n+1} = 4x_n$$

より $\{x_n\}$ は

等比数列

$$x_1 = b_1 + 3$$

$$= 1 + 3 = 4$$

よって 4 の等比数列で表すことができる

一般項 x_n は

$$x_n = 4 \cdot 4^{n-1}$$

$$\text{よって } x_n = b_n + 3 \text{ より}$$

$$b_n + 3 = 4^n$$

$$\text{よって } b_n = \underline{4^n - 3}$$

(3)

(1)(2) より

$$C_n = a_n + b_n$$

$$= (6n+2) + (4^n - 3)$$

$$= 4^n + 6n - 1$$

a_n の自然数 $n=1$ より

$$C_n \text{ の } 9 \text{ の倍数となる } (A)$$

を求めよ

(I) $n=1$ のとき

$$C_1 = 4^1 + 6 \cdot 1 - 1 = 9$$

より $n=1$ のとき (A) は成り立つ。

(II) $n=k$ のとき

(A) が成り立つと仮定すると

$$C_k = 4^k + 6k - 1 \text{ は } 9 \text{ の倍数}$$

よって M を用いて

$$4^k + 6k - 1 = 9M$$

$$\text{より } 4^k = 9M - 6k + 1$$

より $n=k+1$ のとき

$$C_{k+1} = 4^{k+1} + 6(k+1) - 1$$

$$= 4 \times 4^k + 6k + 5$$

$$= 4(9M - 6k + 1) + 6k + 5$$

$$= 36M - 24k + 4 + 6k + 5$$

$$= 36M - 18k + 9$$

$$= 9(4M - 2k + 1)$$

$\Rightarrow 4M - 2k + 1$ は整数

より C_{k+1} は 9 の倍数

よって $n=k+1$ のとき

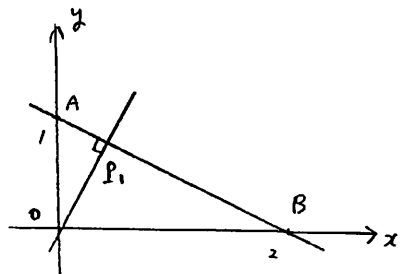
(A) は成り立つ。

以上 (I)(II) より

a_n の自然数 $n=1$ より

(A) は成り立つ。 //

(25)



(1) 直線 AB の傾きは $\frac{0-1}{2-0} = -\frac{1}{2}$

である。よって直線 AB の方程式は
y の片方が 1 より

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

である。また直線 OP₁ の傾きは m は

$$OP_1 \perp AB \text{ より } m \times (-\frac{1}{2}) = -1$$

よって $m = 2$ であるから、直線 OP₁ の方程式は $y = 2x$

よって点 P₁ の座標は

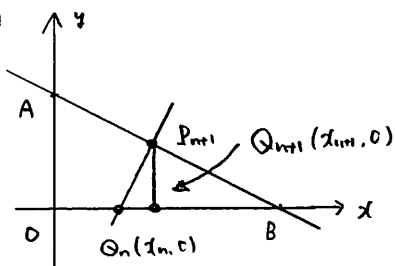
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 2x \end{cases}$$

より、連立方程式を解くと

$$x = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{1}{5}$$

$$\text{よって } P_1 \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

(2)



点 Q_n の座標が $(x_n, 0)$ ならば

点 Q_{n+1} の座標は $(x_{n+1}, 0)$ である。

よって点 P_{n+1} の x 座標も x_{n+1}

(= なる)。点 P_{n+1} は直線 AB と

直線 Q_nP_{n+1} の交点より

直線 AB の方程式は (1) より $y = -\frac{1}{2}x + 1$

直線 Q_nP_{n+1} の傾きは (1) より $m = 2$

なので点 Q_n($x_n, 0$) を通るで

$$y - 0 = 2(x - x_n)$$

$$\text{よって } y = 2x - 2x_n$$

となる。よって

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y = 2x - 2x_n \end{cases}$$

と解く。よって消去して

$$-\frac{1}{2}x + 1 = 2x - 2x_n \quad \text{--- ①}$$

この解が、交点の P_{n+1} の x 座標

であり、それは x_{n+1} であるから

① に代入して

$$-\frac{1}{2}x_{n+1} + 1 = 2x_{n+1} - 2x_n$$

これを解くと $x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}$

$$(*) \quad -x_{n+1} + 2 = 4x_{n+1} - 4x_n$$

$$-5x_{n+1} = -4x_n - 2$$

$$(-5) \quad x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}$$

(1) の結果を代入すると

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{5} \\ x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5} \end{cases}$$

と解く。4 倍不等式より

$$C = \frac{4}{5}C + \frac{2}{5}$$

よって $C = 2$

$$\text{よって } x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}$$

$$- \quad C = \frac{4}{5}C + \frac{2}{5}$$

$$x_{n+1} - C = \frac{4}{5}(x_n - C)$$

$C = 2$ を代入して

$$x_{n+1} - 2 = \frac{4}{5}(x_n - 2) \quad \text{--- (*)}$$

と変換してなる。(*) より

数列 $\{x_n - 2\}$ は

$$\text{初項 } x_1 - 2 = \frac{2}{5} - 2 = -\frac{8}{5}$$

公比 $\frac{4}{5}$ の等比数列になる

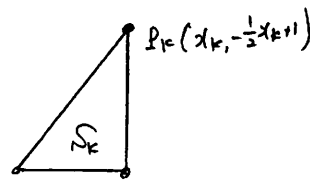
一般項は

$$x_n - 2 = -\frac{8}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって } x_n = 2 - \frac{8}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{よって } x_n = 2 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

(3)



O Q_k($x_k, 0$)

点 Q_k の座標は $(x_k, 0)$

であり、点 P_k の座標は

点 P_k が直線 AB 上の点より

$$y = -\frac{1}{2}x_k + 1$$

よって P_k($x_k, -\frac{1}{2}x_k + 1$)

となる。(2) の結果より

$$P_k Q_k = -\frac{1}{2}x_k + 1 = -\frac{1}{2} \left\{ 2 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^k \right\} + 1$$

$$= -1 + \left(\frac{4}{5}\right)^k + 1 = \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

よって

$$S_k = \frac{1}{2} \times OQ_k \times P_k Q_k$$

$$= \frac{1}{2} \times \left\{ 2 - 2 \left(\frac{4}{5}\right)^k \right\} \times \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$= \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^k \right\} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^k - \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^k \right\}^2 \quad \text{指数法則}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^k - \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^2 \right\}^k$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^k - \left(\frac{16}{25}\right)^k$$

(2) より

$$\sum_{k=1}^n S_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k - \sum_{k=1}^n \left(\frac{16}{25}\right)^k$$

$$= \frac{4}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

$$= \frac{4}{5} - \frac{16}{25} \left\{ 1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n \right\}$$

$$= 4 \left\{ 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n \right\}$$

$$- \frac{16}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{16}{25}\right)^n \right\}$$

$$= 4 - 4 \left(\frac{4}{5}\right)^n - \frac{16}{9} + \frac{16}{9} \left(\frac{16}{25}\right)^n$$

$$= \frac{20}{9} - 4 \left(\frac{4}{5}\right)^n + \frac{16}{9} \left(\frac{16}{25}\right)^n$$

26

(1)

数列 $\{a_n\}$ が漸化式 $a_{n+1} - a_n = 1$ より $a_{n+1} = a_n + 1$ を満たすので数列 $\{a_n\}$ は公差が1の等差数列である。よって一般項 a_n は初項を a

$$といて \quad a_n = a + (n-1) \cdot 1$$

と書ける。 $a_9 = 11$ より

$$a_9 = a + (9-1) \cdot 1 = 11$$

$$a + 8 = 11 \quad \text{より} \quad a = 3$$

$$\text{よって} \quad a_n = 3 + (n-1) \cdot 1 = n+2$$

(2)

 $a_1, \dots$ 第1行... 15個 $a_2, a_3, a_4, \dots$ 第2行... 35個 $a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots$ 第3行... 55個

1行増えるごとに項は2ずつ増える。

よって第 k 行に属する項の個数は

$$1 + (k-1) \cdot 2$$

より $2k-1$ 5個である。 a_1 ← 第1行 a_2, a_3, a_4 ← 第2行 $\dots$ 第 $(m-1)$ 行 ← 第 $(m-1)$ 行第 m 行 $m \geq 2$ のとき、第1行から第 $(m-1)$ 行目までの

$$1 + 3 + \dots + \{2(m-1)-1\}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1} (2k-1) \quad \text{個}$$

の項が属している。第 m 行の左端の数 (上図の a) は数列 $\{a_n\}$ である。

$$\sum_{k=1}^{m-1} (2k-1) + 1 \quad \text{番目}$$

計算すると

$$\sum_{k=1}^{m-1} (2k-1) + 1$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{m-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} 1 + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} (m-1) \{ (m-1) + 1 \} - (m-1) + 1$$

$$= (m-1)m - m + 1 + 1$$

$$= m^2 - 2m + 2 \quad (m=1 \text{ も満たす})$$

であるから、数列 $\{a_n\}$ の第 $(m^2 - 2m + 2)$ 項は (1) より

$$a_{m^2-2m+2} = (m^2-2m+2) + 2$$

$$= m^2 - 2m + 4$$

であるから、第 m 行の左端の数は

$$m^2 - 2m + 4$$

(3)

第 m 行に属する項の総和を T_m とする。

$$\left(\underbrace{(m^2-2m+4), \dots, (m^2-2m+4)}_{\text{公差1, 項数}(2m-1)} \right) \quad \leftarrow m \text{ 行}$$

 T_m は初項 (m^2-2m+4) 、公差1項数 $(2m-1)$ の等差数列の和である。

$$T_m = \frac{1}{2} (2m-1) \left[2(m^2-2m+4) + \{ (2m-1) - 1 \} \cdot 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} (2m-1) (2m^2 - 4m + 8 + 2m - 2)$$

$$= (2m-1) (m^2 - m + 3)$$

$$= 2m^3 - 3m^2 + 7m - 3$$

よって自然数 m について T_m が3の倍数

であることは (A) とする。

(I) $m=1$ のとき

$$T_1 = 2 - 3 + 7 - 3 = 3$$

よって $m=1$ のときは (A) が成り立つ。(II) $m=k$ のとき

(A) が成り立つと仮定する

よって整数 M を用いて

$$2k^3 - 3k^2 + 7k - 3 = 3M$$

$$\text{より} \quad 2k^3 = 3M + 3k^2 - 7k + 3$$

と書ける。

$$= 2k^3 - 3k^2 + 7k + 3$$

$$T_{k+1} = 2(k+1)^3 - 3(k+1)^2$$

$$+ 7(k+1) - 3$$

$$= 2k^3 + 3k^2 + 7k + 3$$

$$= (3M + 3k^2 - 7k + 3) + 3k^2 + 7k + 3$$

$$= 3M + 6k^2 + 6$$

$$= 3(M + 2k^2 + 2)$$

よって $M + 2k^2 + 2$ は整数であり、
 $m = k+1$ のとき (A) は成り立つ。

よって (I) (II) から

すべての自然数 m

について (A) は

成り立つ。

$$\frac{1}{2} n \{ 2a + (n-1)d \}$$

の公式

(6) (84 頁)

 T_m が3の倍数

であることは (A) とする。

$$\begin{cases} m = 3k \\ m = 3k+1 \\ m = 3k+2 \end{cases}$$

で場合分けをする。

他には mod 3 を計算

する。

27

(1)

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 .

公差 d とする. 一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

とある. 条件より

$$a_1 + a_3 = 10, a_2 + a_4 = 16$$

より

$$\begin{cases} a + (a+2d) = 10 \\ (a+d) + (a+3d) = 16 \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 2a + 2d = 10 \\ 2a + 4d = 16 \end{cases}$$

$$\text{よって } a = 2, d = 3$$

$$\text{よって } a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n - 1$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 . 第 n 項

まで n 個の b_k の和 S_n とする.

$n=1$ のとき

$$b_1 = S_1 = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} = 1$$

$n \geq 2$ のとき

$$b_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \right) - \left\{ \frac{3}{2}(n-1)^2 - \frac{1}{2}(n-1) \right\}$$

$$= \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \right) - \left(\frac{3}{2}n^2 - 3n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}n^2 + 3n - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$$

$$= 3n - 2 \dots (*)$$

$$\therefore (*) \text{に } n=1 \text{ を代入すると } 3 \cdot 1 - 2 = 1$$

$$\therefore b_1 = -3 \cdot 2 + 3 = 1$$

よって

$$b_n = 3n - 2$$

(3)

$n \geq 2$ のとき

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$$

を S と用いて表す.

$$\begin{pmatrix} \{a_n \text{ の番号}\}: 1, 2, 3, \dots, n \\ \{b_n \text{ の番号}\}: n, n-1, \dots, 1 \end{pmatrix}$$

a_n の番号が k のとき. 最初 n の b の

番号は $(k-1)$ に 1 を加えて k になる.

よって b_n の番号は 最初 n の a の

$(k-1)$ に 1 を加えて k になる. $a_{n+1} = 3n+1$

$b_{n-(k-1)}$ の a の番号は k になる.

よって

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k-1) \{ 3(n-k+1) - 2 \}$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k-1) (3n-3k+3-2)$$

$$= \sum_{k=1}^n (3k-1) (3n+1-3k)$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ (3n+1) \cdot 3k - 9k^2 - (3n+1) + 3k \}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ (9n+3+3)k - 9k^2 - (3n+1) \}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ -9k^2 + (9n+6)k - (3n+1) \}$$

$$= -9 \sum_{k=1}^n k^2 + (9n+6) \sum_{k=1}^n k - (3n+1) \sum_{k=1}^n 1$$

$$= -9 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (9n+6) \cdot \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$- (3n+1) \cdot n$$

$$= -\frac{3}{2} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1)(9n+6)$$

$$- \frac{2}{2} n(3n+1)$$

$$= \frac{1}{2} n \{ -3(n+1)(2n+1) + (n+1)(9n+6) - 2(3n+1) \}$$

$$= \frac{1}{2} n (-6n^2 - 9n - 3 + 9n^2 + 15n + 6 - 6n - 2)$$

$$= \frac{1}{2} n (3n^2 + 1)$$

(1)

等比数列の初項を a , 公比を r ($r > 0$)とすると、一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1}$$

と仮定。条件より $a_2 = 4, a_4 = 16$

と仮定。

$$a_2 = ar = 4 \cdots \textcircled{1}$$

$$a_4 = ar^3 = 16 \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{ より } ar^3 = ar \times r^2 \text{ より}$$

① を代入すると

$$4 \times r^2 = 16$$

$$r^2 = 4$$

より $r = \pm 2$ と仮定。 $r > 0$ より

$$r = 2. \textcircled{1} \text{ より } 2a = 4, a = 2$$

以上より

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

(2)

等差数列 $\{b_n\}$ の初項を b ,公差を d とすると、初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n\{2b + (n-1)d\}$$

と仮定。条件より $S_{10} = 175, S_{15} = 375$ より

$$S_{10} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \{2b + (10-1)d\} = 175$$

$$S_{15} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \{2b + (15-1)d\} = 375$$

より

$$5(2b + 9d) = 175$$

$$15(b + 7d) = 375$$

より

$$\begin{cases} 2b + 9d = 35 \\ b + 7d = 25 \end{cases}$$

$$\text{解いて } d = 3, b = 4$$

二つの数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = b + (n-1)d$$

より

$$b_n = 4 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 1$$

(3)

$$(1)(2) \text{ より } b_n = 3n + 1, a_n = 2^n = 32$$

より $b_n < a_n$ を満たす n の最大値 m は

$$3n + 1 < 32$$

$$n < \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$$

より $m = 10$ と仮定。

より

$$T_m = \sum_{k=1}^m a_k b_k$$

と仮定。(等差) $\times$ (等比) の和より

$$T_m = 2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 7 + 2^3 \cdot 10 + \cdots + 2^m (3m + 1)$$

$$- 2T_m = 2^2 \cdot 4 + 2^3 \cdot 7 + \cdots + 2^m (3m - 2) + 2^{m+1} (3m + 1)$$

$$- T_m = 2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 + 2^3 \cdot 3 + \cdots + 2^m \cdot 3 - 2^{m+1} (3m + 1)$$

初項 $2^2 \cdot 3$, 公差 2 等差数列 $m-1$ の等比数列の和

$$= 2 \cdot 4 + \frac{2^2 \cdot 3 (2^{m-1} - 1)}{2 - 1} - (3m + 1) 2^{m+1}$$

$$= 2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 3 (2^{m-1} - 1) - (3m + 1) \cdot 2^{m+1}$$

$$= 8 + 3 \cdot 2^{m+1} - 12 - (3m + 1) 2^{m+1}$$

$$= -4 + \{3 - (3m + 1)\} 2^{m+1}$$

$$= -4 - (3m - 2) 2^{m+1}$$

より

$$- T_m = - (3m - 2) \cdot 2^{m+1} - 4$$

より

$$T_m = (3m - 2) 2^{m+1} + 4$$

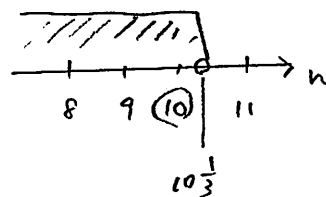
と仮定。今 $m = 10$ より

$$T_{10} = (3 \cdot 10 - 2) \cdot 2^{11} + 4$$

$$= 28 \times 2^{11} + 4$$

$$= 28 \times 2048 + 4$$

$$= 57344 + 4 = \underline{57348}$$



29

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、

公差を d とし、一般項 a_n は

$$a_n = a + (n-1)d$$

で、 3 、 5 、 7 条件より $a_5 = 14$ より

$$a_5 = a + (5-1)d = 14$$

$$\text{より } a + 4d = 14 \dots \textcircled{1}$$

等比数列 $\{b_n\}$ の初項を $3a$

、公比を d とし、一般項 b_n は

$$b_n = 3a \cdot d^{n-1}$$

で、 3 、 5 、 7 条件より $b_5 = 18$

で、 3 、 5 、 7

$$b_5 = 3a \cdot d^{5-1} = 18$$

$$3ad = 18$$

(2)

$$ad = 6 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より } a = 14 - 4d \text{ とし}$$

$\textcircled{2}$ に代入すると

$$d(14 - 4d) = 6$$

(3)

$$7d - 2d^2 = 3$$

より

$$2d^2 - 7d + 3 = 0$$

$$(2d-1)(d-3) = 0$$

$$d = \frac{1}{2}, 3$$

∴ 条件より d は整数より

$d = \frac{1}{2}$ は不適、よって $d = 3$

$$\textcircled{2} \text{より } a \cdot 3 = 6 \text{ より } a = 2$$

$$\text{よって } a = 2, d = 3$$

(2)

(1) の結果より

$$b_n = 3 \cdot 2 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$$

で、 3 、 5 、 7

また

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n - 1$$

で、 3 、 5 、 7 、 $b_n < a_n < b_{n+1}$ より

$$2 \cdot 3^n < 3k - 1 < 2 \cdot 3^{n+1}$$

よって、 $3k-1 = 1$ と見て

$$2 \cdot 3^n + 1 < 3k < 2 \cdot 3^{n+1} + 1$$

よって 3 で割ると

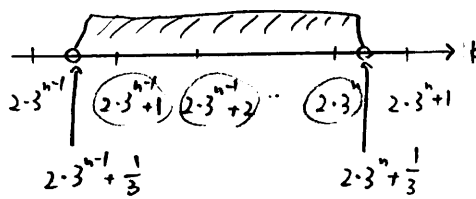
$$\frac{2 \cdot 3^n}{3} + \frac{1}{3} < k < \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{3} + \frac{1}{3}$$

より

$$2 \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{3} < k < 2 \cdot 3^n + \frac{1}{3} \dots \textcircled{*}$$

∴ $n \geq 1$ より、 $2 \cdot 3^{n-1} \neq 2 \cdot 3^n$ と

整数で、 $\textcircled{*}$ を満たす整数 k は



$$k = 2 \cdot 3^{n-1} + 1, 2 \cdot 3^{n-1} + 2, \dots, 2 \cdot 3^n$$

で、 3 、 5 、 7 、個数は

$$2 \cdot 3^n - 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$= 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 3 - 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$= 2 \cdot 3^{n-1} (3 - 1)$$

$$= 2 \cdot 3^{n-1} \cdot 2 = 4 \cdot 3^{n-1} \text{ 個}$$

$$\text{よって } C_n = 4 \cdot 3^{n-1}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n a_k C_k = \sum_{k=1}^n (3k-1) \cdot 4 \cdot 3^{k-1} = 4 \sum_{k=1}^n (3k-1) \cdot 3^{k-1} \text{ より}$$

$$S = \sum_{k=1}^n (3k-1) \cdot 3^{k-1} \text{ とし、 } (3k-1) \cdot 3^{k-1} \text{ の和を } S \text{ とする}$$

$$S = 2 \cdot 3^0 + 5 \cdot 3^1 + 8 \cdot 3^2 + \dots + (3n-1) \cdot 3^{n-1}$$

$$-) 3S = \quad 2 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \dots + (3n-4) \cdot 3^{n-1} + (3n-1) \cdot 3^n$$

$$-2S = 2 \cdot 3^0 + 3 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \dots + 3 \cdot 3^{n-1} - (3n-1) \cdot 3^n$$

初項 $3 \cdot 3^1$ 、公差 3 、項数 $n-1$

より

$$-2S = 2 \cdot 3^0 + \frac{3 \cdot 3^1 (3^{n-1} - 1)}{3 - 1}$$

$$- (3n-1) \cdot 3^n$$

$$= 2 + \frac{3^2}{2} (3^{n-1} - 1) - (3n-1) \cdot 3^n$$

$$= 2 + \frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2} - (3n-1) \cdot 3^n$$

$$= -\frac{5}{2} + (\frac{3}{2} - 3n + 1) \cdot 3^n$$

$$= -\frac{5}{2} - (3n - \frac{5}{2}) \cdot 3^n$$

$$= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} (6n-5) \cdot 3^n$$

よって

$$-2S = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} (6n-5) \cdot 3^n$$

より

$$S = \frac{1}{4} (6n-5) \cdot 3^n + \frac{5}{4}$$

より

$$\sum_{k=1}^n a_k C_k = 4S$$

$$= 4 \left\{ \frac{1}{4} (6n-5) \cdot 3^n + \frac{5}{4} \right\}$$

$$= (6n-5) \cdot 3^n + 5$$

30

(1)

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a

公差を d とすると、一般項 a_n

は

$$a_n = a + (n-1)d$$

とある。第5項 $a_5 = 13$ より

$$a_5 = a + (5-1)d = 13$$

より

$$a + 4d = 13 \dots \textcircled{1}$$

また、数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項

までの和は $\frac{1}{2}n\{2a + (n-1)d\}$

である。第10項より

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \{2a + (10-1)d\} = 145$$

より

$$5(2a + 9d) = 145$$

(2)

$$2a + 9d = 29 \dots \textcircled{2}$$

①、②より $d=3, a=1$

より

$$a_n = 1 + (n-1) \cdot 3$$

$$= 3n - 2$$

(2)

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} (3k-2)$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} 2$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) - 2 \cdot 20$$

$$= 3 \cdot 10 \cdot 21 - 40$$

$$= 630 - 40 = 590$$

$$\sum_{k=1}^{20} a_k a_{2k} = \sum_{k=1}^{20} (3k-2)(3 \cdot 2k-2)$$

$$= \sum_{k=1}^{20} (3k-2)(6k-2)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{20} (3k-2)(3k-1)$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{20} (9k^2 - 9k + 2)$$

$$= 2 \left(9 \sum_{k=1}^{20} k^2 - 9 \sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 2 \right)$$

$$= 2 \left\{ 9 \cdot \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot (20+1) \cdot (2 \cdot 20+1) \right.$$

$$\left. - 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot (20+1) + 2 \cdot 20 \right\}$$

$$= 2 \left(9 \cdot \frac{1}{6} \cdot 20 \cdot 21 \cdot 41 \right.$$

$$\left. - 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 21 + 40 \right)$$

$$= 2 (3 \cdot 10 \cdot 21 \cdot 41 - 9 \cdot 10 \cdot 21 + 40)$$

$$= 2 (25830 - 1890 + 40)$$

$$= 2 \times 23980$$

$$= 47960$$

(3)

$$\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(3k-2)\{3(k+1)-2\}}$$

$$= \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

より

$$\sum_{k=1}^{33} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{33} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right)$$

$$+ \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3 \cdot 33 - 2} - \frac{1}{3 \cdot 33 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{100} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{99}{100} = \frac{33}{100}$$

31

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 d

であるから, 一般項 a_n は

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

である。また $b_n = 9$ であるから

$$\begin{aligned} b_n &= (-1)^n a_n^2 \\ &= 1 \cdot \{1 + (n-1)d\}^2 \\ &= (1+d)^2 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{よって } 1+d = \pm 3 \text{ より}$$

$$d = -1 \pm 3$$

$$\text{つまり } d = -4, 2$$

ここで $d > 0$ より $d = -4$ は不適

$$\text{よって } d = 2$$

(2)

$$(1) \text{より } a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n-1$$

である。

$$\sum_{k=1}^{2n} b_k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k a_k^2$$

$$= (-1)^1 a_1^2 + (-1)^2 a_2^2 + (-1)^3 a_3^2 + \dots + (-1)^{2n} a_{2n}^2$$

$$= -a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 + a_4^2 + \dots + (-a_{2n-1}^2) + a_{2n}^2$$

ここで、正の項と負の項は $1/n$ ずつ

$$\sum_{k=1}^{2n} b_k = - \underbrace{(a_1^2 + a_3^2 + \dots + a_{2n-1}^2)}_{n \text{ 個}} + \underbrace{(a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{2n}^2)}_{n \text{ 個}}$$

$$= - \sum_{k=1}^n a_{2k-1}^2 + \sum_{k=1}^n a_{2k}^2$$

$$= \sum_{k=1}^n (-a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[-\{2(2k-1)-1\}^2 + (2 \cdot 2k-1)^2 \right]$$

$$= \sum_{k=1}^n \{-(4k-3)^2 + (4k-1)^2\}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-16k^2 + 24k - 9 + 16k^2 - 8k + 1)$$

$$= \sum_{k=1}^n (16k - 8)$$

$$= 16 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 8$$

$$= 16 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - 8n$$

$$= 8n(n+1) - 8n$$

$$= 8n^2 + 8n - 8n = \underline{8n^2}$$

(3)

$$\sum_{k=1}^{2n} b_k = (a_2^2 - a_1^2) + (a_4^2 - a_3^2) + \dots + (a_{2n}^2 - a_{2n-1}^2)$$

$$= (a_2 - a_1)(a_2 + a_1) + (a_4 - a_3)(a_4 + a_3) + \dots + (a_{2n} - a_{2n-1})(a_{2n} + a_{2n-1})$$

ここで、数列 $\{a_n\}$ は公差 2 の等差数列

であるから、 $a_{k+1} - a_k = 2$

$$a_{k+1} - a_k = 2$$

が成り立つ。よって

$$\sum_{k=1}^{2n} b_k = \frac{(a_2 - a_1)(a_2 + a_1)}{2} + \frac{(a_4 - a_3)(a_4 + a_3)}{2} + \dots + \frac{(a_{2n} - a_{2n-1})(a_{2n} + a_{2n-1})}{2}$$

$$= 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{2n} a_k$$

$$= 2 \sum_{k=1}^{2n} (2k-1) \quad \text{ここで } \sum_{k=1}^{2n} (2k-1) = 2n^2 \text{ である。}$$

(3) (2) の結果より、数列 $\{b_n\}$ は

初項から第 $2n$ 項まで、公差 8 の等差数列

である。つまり $8n^2 \geq 0$ であるから

$$a_n^2 \cdot \sum_{k=1}^{2n} b_k < -1000 \text{ である。}$$

$\sim$ は奇数 n に対して成り立つ。

$$N = 2n+1 \text{ とおくと}$$

$$\sum_{k=1}^{2n+1} b_k = \sum_{k=1}^{2n} b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} b_k + b_{2n+1}$$

$$= 8n^2 + (-1)^{2n+1} a_{2n+1}^2$$

$$= 8n^2 + (-1)^{2n+1} \{2(2n+1)-1\}^2$$

$$= 8n^2 - (4n+1)^2$$

$$= -8n^2 - 8n - 1$$

$$\text{よって } \sum_{k=1}^{2n+1} b_k < -1000 \text{ となる}$$

$$-8n^2 - 8n - 1 < -1000$$

$$8n^2 + 8n + 1 > 1000$$

$$8n^2 + 8n > 999$$

$$8n(n+1) > 999$$

$$n(n+1) > \frac{999}{8} = 124\frac{7}{8} \dots (*)$$

$n \leq 11$ は明らかに不適

自然数 n に対して

$$125 \leq n(n+1) \leq 200 \text{ の } n$$

$$10 \times 11 = 110$$

$$11 \times 12 = 132$$

よって $n = 11$ のとき

(*) は満たす

最小の自然数 n は

$$N = 2 \times 11 + 1 = \underline{23}$$

$$\text{よって } b_{k+1} + 4 = (-1)^{k+1} a_{k+1}^2 + 4$$

$$= -a_{k+1}^2 + 4$$

$$= -\{2(2k+1)-1\}^2 + 4$$

$$= -(4k-3)^2 + 4$$

$$= 2^2 - (4k-3)^2$$

$$= \{2 + (4k-3)\}$$

$$\times \{2 - (4k-3)\}$$

$$= (4k-1)(-4k+5)$$

$$= -(4k-1)(4k-5)$$

よって

$$\frac{1}{b_{k+1} + 4} = -\frac{1}{(4k-1)(4k-5)}$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k-5} - \frac{1}{4k-1} \right)$$

と部分分数分解することができる

$$\sum_{k=1}^{23} \frac{1}{b_{k+1} + 4}$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right)$$

$$= \dots = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{41} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \left(-1 - \frac{1}{41} \right)$$

$$= -\frac{1}{4} \times \left(-\frac{42}{41} \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{21}{41}}}$$

(4)

(5)

(1)

等比数列 $\{a_n\}$ の初項が 2である。公比 r は 3 を満たす一般項 a_n は

$$a_n = 2 \cdot r^{n-1}$$

である。条件より $a_4 = 16$ である

$$a_4 = 2 \cdot r^{4-1} = 16$$

$$\text{よって } r^3 = 8$$

$$r^3 - 8 = (r-2)(r^2+2r+4)$$

$$\text{F1 } r^3 - 8 = 0 \text{ の解は}$$

$$r = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$$

(n) r は実数であるから $r = -1 \pm \sqrt{3}i$ (不適。よって $r = 2$ であり、一般項 a_n は

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ は漸化式

$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_{n+1} - b_n = a_n + 3 \end{cases}$$

を満たす。(1)より $a_n = 2^n$ より

$$b_{n+1} - b_n = 2^n + 3$$

である。これは数列 $\{b_n\}$ の階差数列の一般項が $2^n + 3$ であることは

意味がある

 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k + 3) \quad \begin{matrix} \text{初項 } 2^1 \\ \text{項数 } 2 \\ \text{項 } n-1 \end{matrix} \\ &= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k + \sum_{k=1}^{n-1} 3 \\ &= 2 + \frac{2^1(2^{n-1}-1)}{2-1} + 3(n-1) \end{aligned}$$

$$= 2 + 2(2^{n-1}-1) + 3n-3$$

$$= 2 + 2^n - 2 + 3n - 3$$

$$= 2^n + 3n - 3 \quad \dots (*)$$

よって $(*)$ に $n=1$ を代入すると

$$2^1 + 3 \cdot 1 - 3 = 2 + 3 - 3 = 2 = b_1$$

よって、 $n=1$ のとき $(*)$ が成り立つ。

$$\text{よって } b_n = 2^n + 3n - 3$$

(3)

$$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

$$= \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

$$= \sum_{k=1}^n 2^k (2^k + 3k - 3)$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ (2^k)^2 + 3(k-1) \cdot 2^k \}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ (2^2)^k + 3(k-1) \cdot 2^k \}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ 4^k + 3(k-1) 2^k \}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^n 4^k}_A + 3 \underbrace{\sum_{k=1}^n (k-1) 2^k}_{B} \dots (*)$$

$$\therefore A = \sum_{k=1}^n 4^k, \quad B = \sum_{k=1}^n (k-1) 2^k$$

とある。A は初項 4^1 、公比 4 、項数 n

の等比数列の和より

$$A = \frac{4^1(4^n-1)}{4-1} = \frac{4}{3}(4^n-1) \dots \textcircled{1}$$

また B は (等差) $\times$ (等比) の数列の和である。

$$B = 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) 2^n$$

$$- \textcircled{1} B = \begin{aligned} & 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + (n-2) 2^n + (n-1) 2^{n+1} \\ & - B = 0 \cdot 2^1 + \underbrace{1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^n}_{\text{初項 } 2^2, \text{ 項数 } n-1} - (n-1) 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$= 0 + \frac{2^2(2^{n-1}-1)}{2-1} - (n-1) 2^{n+1}$$

$$= 2^2(2^{n-1}-1) - (n-1) 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 2^2 - (n-1) 2^{n+1}$$

$$= \{1 - (n-1)\} 2^{n+1} - 4$$

$$= -(n-2) 2^{n+1} - 4$$

$$\text{よって } -B = -(n-2) 2^{n+1} - 4 \quad \text{より } B = (n-2) 2^{n+1} + 4 \dots \textcircled{2}$$

\textcircled{1}, \textcircled{2} を $(*)$ に代入して

$$S_n = \frac{4}{3}(4^n-1) + 3 \{ (n-2) 2^{n+1} + 4 \}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4^{n+1} - \frac{4}{3} + 3(n-2) 2^{n+1} + 12$$

$$= \frac{4^{n+1}}{3} + 3(n-2) 2^{n+1} + \frac{32}{3} \quad \text{---+}$$