数学発展課題

ベクトル

（　　）年（　　）組（　　）番　氏名（　　　　　　　　　　）

平面ベクトル　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

1 三角形 OAB があり, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 3$, $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{6}$ である。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ。

(2) 辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D とする。直線 AD と直線 BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めよ。また，$\cos\angle\mathrm{AOP}$ の値を求めよ。

平面ベクトル　　平成______年______月______日

2 一辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF がある。辺 BC の中点を M，辺 AF を 2 : 1 に内分する点を N とする。また，直線 AM 上に $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ (t は 0 でない実数) となる点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{b}$ とおく。

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，点 P が直線 AM と BN の交点となるような t の値を求めよ。

(3) AP$\perp$FP となるような t の値を求めよ。

平面ベクトル　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

3 一辺の長さが 6 の正三角形 OAB があり，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を D，辺 AB を 5 : 4 に内分する点を E とし，線分 BC の中点を F とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。

(2) 3 点 D, E, F が一直線上にあることを示し，DE : DF を求めよ。

(3) 点 A から直線 DE に垂線をひき，その交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

平面ベクトル

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

4 $\triangle$ OAB があり，OA$=4$，OB$=5$，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{8}$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，辺 AB を $t : (1-t)$ $(0<t<1)$ の比に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) (1) の点 P が OP$\perp$AB を満たすとき, t の値を求め，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 頂点 O から辺 AB に引いた垂線と，$\angle$A の二等分線との交点を C とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分 OC の長さを求めよ。

平面ベクトル　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{5}$ OA$=4$，OB$=3$ の△ OAB がある。辺 AB を 2：1 に内分する点を C，線分 OC を 3：1 に内分する点を D とし，点 E を $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ となるようにとる。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ をそれぞれ t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) OC$=2\sqrt{2}$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。さらにこのとき，$\angle\mathrm{OEB}=90^\circ$ となるような t の値を求めよ。

平面ベクトル　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

6 三角形OABがあり，辺OAを$1:2$に内分する点をC，辺ABを$1:2$に内分する点をD，線分ODとBCの交点をEとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a}$を用いて表せ。また, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}, \vec{b}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(3) $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{AB}=4$のとき，内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$の値を求めよ。さらに，点Eから直線OAに垂線を引き，交点をPとするとき，$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{AP}}$の値を求めよ。

平面ベクトル　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{7}}$ 平面上に三角形 OAB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくとき，$|\vec{a}| = \sqrt{3}$，$|\vec{b}| = 2$，$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ である。また，辺 AB を $2 : 1$ の比に内分する点を C, 辺 AB を $t : (1-t)$ $(0 < t < 1)$ の比に内分する点を D とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OD} \perp \mathrm{AB}$ となるとき，t の値を求めよ。

(3) (2) のとき，点 A を通り OC に平行な直線を l，点 B を通り OD に平行な直線を m とし，さらに 2 直線 l，m の交点を E とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

平面ベクトル　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{8}$ 三角形OABがあり, $\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=2\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$ である。辺OAを $1:2$ に内分する点をC，線分BCの中点をMとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) 直線OMと辺ABの交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) (2)の点Dから辺OAに垂線を引き，交点をHとする。$\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

平面ベクトル　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{9}}$ 三角形 OAB があり, OA$= 4$, OB$= 2$, $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{1}{4}$ である。線分 AB を 3 : 1 に内分する点を C とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の大きさを求めよ。

(3) 直線 OC 上に点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ (t は実数) とする。$\angle\mathrm{APB} = 90^\circ$ となるときの t の値を求めよ。

平面ベクトル

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{10}}$ 平行四辺形 OACB があり，辺 AC を $1:2$ に内分する点を D，辺 BC を $t \ : \ (1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を E とする。また，線分 OE と BD の交点を P，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) OA$=2$，OB$=1$，$\angle\mathrm{AOB}=120^\circ$ のとき，OE$\perp$BD となるような t の値を求めよ。

平面ベクトル　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

11 三角形 OAB があり，OA$=9$，OB$=3$，$\cos\angle\text{AOB}=-\dfrac{1}{3}$ である。辺 OB を $2:1$ に内分する点を C，線分 AC を $3:1$ に内分する点を D とする。ただし，$\overrightarrow{\text{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\text{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\text{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，直線 OD と辺 AB との交点を P とするとき，$\overrightarrow{\text{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) 辺 AB を直径とする半円を辺 AB に関して頂点 O と反対側に作る。直線 OD と半円との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\text{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

平面ベクトル　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{12}}$ 三角形 ABC があり，AB$=4$，AC$=2$，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ である。また，A から辺 BC に垂線をひき，その垂線と辺 BC との交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とする。

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) BD : DC$=t\ :\ (1-t)$ とおいたとき，t の値を求めよ。

(3) B を通り辺 AC に平行な直線をひき，直線 AD との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{13}}$ OA$=4$, OB$=\sqrt{3}$, $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ の△OAB がある。△OAB の辺 OA の中点を M，線分 BM の中点を N，また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|$ を求めよ。

(3) 直線 ON に点 A から垂線 AH を下ろすとき，線分の長さの比 ON : NH を最も簡単な整数の比で表せ。

14 三角形 OAB があり，OA$=4$，OB$=5$，$\angle \mathrm{AOB}=60^\circ$ である。辺 OA を 4 : 1 に内分する点を C，辺 AB を 3 : 2 に内分する点を D とし，2 直線 CD，OB の交点を E とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，k の値を求めよ。

(3) 点 O から直線 AE に引いた垂線と直線 AE との交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

平面ベクトル

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

15 $\triangle$ OAB があり，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 2 : 3 に内分する点を D とし，線分 CD の中点を M，直線 OM と辺 AB との交点を N とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ (k は実数) とおくとき，k の値を求めよ。
また，線分 AN : NB を最も簡単な整数の比で表せ。

(3) OB$=5$，AB$=7$，OB$\perp$CD のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。
また，辺 OA の長さを求めよ。

平面ベクトル　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{16}}$ △OAB において，$\angle\mathrm{AOB} = 90^\circ$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とするとき，$|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$ である。また，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，線分 BC を 3 : 1 に内分する点を D とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。また，$|\vec{b}-\vec{a}|$ を求めよ。

(2) 直線 OD と辺 AB との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) △OAB の外接円と直線 OD の交点のうち，点 O と異なる点を F とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

平面ベクトル　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

17 $\triangle$ OAB において，辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 AB の中点を M とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 直線 CM と直線 OB の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\vec{b}$ とおくとき，実数 k の値を求めよ。

(3) OA$=3$，OB$=5$，線分 CM の中点を N とする。(2) の点 D に対して，ON$\perp$CD が成り立つとき，$\cos\angle\mathrm{AOB}$ の値を求めよ。

平面ベクトル　　平成 ＿＿ 年 ＿＿ 月 ＿＿ 日

18 平面上に三角形 OAB があり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ である。辺 AB の 3 等分点のうち，A に近い方を C，B に近い方を D とし，2 点 P，Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=x\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=y\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ $(x>0,\ y>0)$ によって定める。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，x，y でそれぞれ表せ。

(2) 三角形 OPQ の重心 G が辺 AB 上にあるとき，y を x で表せ。

(3) (2) のとき，線分 PQ の長さを最小にする x，y の値を求めよ。

平面ベクトル　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

19 三角形OABにおいて, OA$=2$, OB$=\sqrt{3}$, $\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とする。直線AB上に点CをOC$\perp$ABとなるようにとる。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とするとき，定数 t の値を求めよ。

(3) 辺OBを2 : 1に内分する点をD，辺ABを2 : 1に外分する点をEとする。線分OCと直線DEとの交点をFとする。$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

平面ベクトル　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

20 平行四辺形 OABC において, OA$=6$, OC$=5$, $\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$ である。辺 AB, OA 上にそれぞれ点 P, Q を AP$=x$, OQ$=x+1$ となるようにとる。また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, x で表せ。

(2) $\mathrm{OP}\perp\mathrm{CQ}$ のとき, x の値を求めよ。

(3) (2) のとき, 線分 PQ と対角線 AC の交点を R とする。
$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ で表せ。

平面ベクトル

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

21 三角形 OAB があり，OA$=3$，OB$=4$，$\angle \mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。また，辺 OB の中点を M とし，辺 AB 上に点 C を CM$\perp$OB となるようにとる。なお，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) 線分の長さの比 AC : CB を最も簡単な整数比で表せ。

(3) $\angle$AOB の二等分線と辺 AB，線分 CM との交点をそれぞれ D，E とする。このとき，三角形 CDE と三角形 OEM の面積の比を最も簡単な整数の比で表せ。

22 OA$=\sqrt{7}$, OB$=2$ の三角形 OAB がある。辺 OA を 2 : 3 に内分する点を C, 線分 BC を t : $(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を P とする。また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直のとき、t の値を求めよ。

(3) (2) のとき, 直線 OP と辺 AB の交点を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。また, 三角形 BPQ と三角形 OCP の面積の比を最も簡単な整数比で表せ。

平面ベクトル　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

23 等脚台形 OBCA があり，OA$=1$，OB$=3$，BC$=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{OBC}=60^\circ$ とする。辺 OB の中点を M とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) O から直線 AM に垂線を引き，AM との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) (2) において，2 直線 OH，BC の交点を K とする。$\overrightarrow{\mathrm{OK}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

24 OA$=3$，OB$=2$ の四角形 OACB がある。AB，OC はこの四角形の内部の点 D で交わり，AD : DB$=5:2$，OD : DC$=4:3$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) $\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$ のとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。また，OC の長さを求めよ。

(3) (2) のとき，三角形 OAC の面積を求めよ。

平面ベクトル　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{25}}$ OA$=3$, OB$=2$, $\cos\angle$AOB$=\dfrac{1}{4}$ である三角形 OAB があり、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。また、辺 OB の中点を C とし、辺 OA 上に点 P をとり、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ $(0<t<1)$ とする。さらに、線分 CP を $1:7$ に内分する点を Q とするとき。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t, $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) OQ$\perp$CP のとき、t の値を求めよ。

(3) (2) のとき、直線 OQ と辺 AB との交点を R とする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

平面ベクトル　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

26 三角形 OAB において OA=OB, $\angle$AOB$=90^\circ$ である。
$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（ただし、$0<t<1$）を満たす点を C、辺 AB を 5 : 4 に内分する点を D とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。また、$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, t を用いて表せ。

(2) 三角形 OAB の重心を G とする。点 G が直線 CD 上にあるとき、t の値を求めよ。

(3) (2) のとき、線分 CD を直径とする円と辺 OB との 2 つの交点のうち、O に近い方を P とする。線分の長さの比 OP ： PB を求めよ。

27 三角形 OAB において OA=1, OB=2, ∠AOB=120° である。また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とする。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\vec{a}+t\vec{b}$ (s, t は実数）と表わされる点 P がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ となるとき、s, t の値を求めよ。

(3) (2) のとき、直線 OP と辺 AB との交点を Q とする。線分 AP、BP 上にそれぞれ C、D を AC：CP=PD：DB=AQ：QB となるようにとる。線分 CD の長さを求めよ。

28 四面体 OABC において，OA= 3，OB=OC= 4，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = 60^\circ$ とする。
辺 OB の中点を M，辺 OC の中点を N とし，三角形 AMN の重心を G とし，直線 OG と平面 ABC との交点を D とする。また，点 D を通り，平面 OAB に垂直な直線と平面 OAB の交点を H とする。
ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。
(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

空間ベクトル　平成＿＿年＿＿月＿＿日

29 1 辺の長さが 2 のひし形 ABCD を底面とする四角すい O-ABCD があり，OA=OB=OC= $\sqrt{5}$ である。また，辺 OA，OC の中点をそれぞれ E，F とし，3 点 B，E，F を含む平面と辺 OD との交点を P とする。
ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。
(1) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。
(3) OP⊥BP のとき，OA⊥OC であることを示せ。

空間ベクトル　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

30 1 辺の長さが 1 の立方体 OABC-DEFG がある。辺 DE を $1:2$ の比に内分する点を P，辺 AB，BC を $t\ :\ 1-t$ $(0<t<1)$ の比に内分する点をそれぞれ Q，R とする。
また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，t を用いて表せ。また，PQ=PR のとき，t の値を求めよ。

(2) (1) のとき，3 点 P，Q，R を通る平面と辺 AE との交点を T とする、線分 AT の長さを求めよ。

空間ベクトル　平成＿＿年＿＿月＿＿日

31 1辺の長さが1の正四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。$2\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を満たす点 D をとり，三角形 ABD の重心を E，三角形 OBC の重心を F とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}, \overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(2) 線分 EF と平面 ABC との交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(3) (2) の P に対して，直線 OP と平面 BCD との交点を Q とする。線分 OQ の長さを求めよ。

空間ベクトル

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

32 四面体 OABC がある。三角形 OAB は 1 辺の長さが 2 の正三角形であり，OC=$\sqrt{2}$, $\angle$BOC $=$ $\angle$AOC $=$ 90° である。辺 OA の中点を M，辺 BC を 2:1 に内分する点を N とし，線分 MN を 1:3 に内分する点を P とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(2) 辺 OC 上に点 Q をとり，PQ$\perp$OC となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{c}$ で表せ。

(3) (2) の Q から平面 ABC に引いた垂線と平面との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

空間ベクトル　平成 ＿＿ 年 ＿＿ 月 ＿＿ 日

33　１辺の長さが $\sqrt{2}$ の正三角形 ABC を底面とする四面体 OABC があり，OA=OB=OC=1 である。辺 AB の中点を D とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{c}-\vec{a}$ で定める。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。

(2) 直線 PD と平面 OBC との交点を E とする。 $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。

(3) O から直線 PD に下ろした垂線を OF とする。 $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ で表せ。

空間ベクトル

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{34}}$ 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH があり，線分 CF を 1:2 に内分する点を I とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \vec{e}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ を $\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$ で表せ。

(2) 線分 AI の長さを求めよ。

(3) この立方体が内接する球を K とする。直線 AI と球 K との A 以外の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$ で表せ。

空間ベクトル　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{35}}$ OA$=2$,OB$=$OC$=5$,$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=7$,$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ である四面体 OABC と点 P がある。点 P は

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}}+2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{0}\qquad(k\text{ は正の定数})$$

を満たしている。また、直線 OP と平面 ABC との交点を Q とし、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$,$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$,$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $k,\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) P が線分 OQ の中点であるとき、k の値を定め、$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) (2) のとき、辺 OB 上に点 R を $\angle\mathrm{AQR}=90^\circ$ となるようにとる。線分 OR の長さを求めよ。