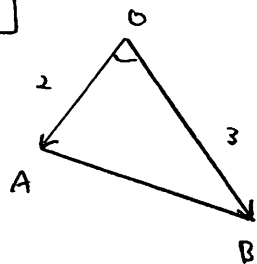


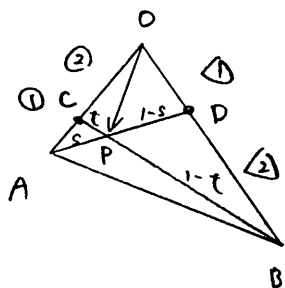
(1)



(1)

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 2 \times 3 \times \frac{1}{6} \\ &= 1\end{aligned}$$

(2)



$$AP : PD = s : (1-s) \text{ とおす}$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} \\ &= (1-s)\vec{OA} + s\frac{1}{3}\vec{OB} \\ &= (1-s)\vec{OA} + \frac{1}{3}s\vec{OB} \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

$$CP : PB = t : (1-t) \text{ とおす}$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-t)\vec{OC} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)\frac{2}{3}\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= \frac{2}{3}(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

$$\text{①, ②より } \vec{OA} \neq \vec{0}, \vec{OB} \neq \vec{0}, \vec{OA} \neq \vec{OB}$$

$$\vec{OP} \text{ を } \vec{r} \text{ (} \vec{r} \text{ は } \vec{r} = |\vec{r}| \text{ の方向に } \vec{r} \text{)}$$

$$\begin{cases} 1-s = \frac{2}{3}(1-t) & (\vec{OA} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{3}s = t & (\vec{OB} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$t = \frac{1}{3} s \text{ とおく}$$

$$1-s = \frac{2}{3} (1 - \frac{1}{3}s)$$

$$1-s = \frac{2}{3} - \frac{2}{9}s$$

$\times 9$

$$9-9s = 6-2s$$

$$-7s = -3$$

$$s = \frac{3}{7}$$

$$\text{①より}$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-\frac{3}{7})\vec{OA} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{7}\vec{OB} \\ &= \frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{1}{7}\vec{OB}\end{aligned}$$

(2)

$$\text{①より}$$

$$\vec{OP} = (1-s)\vec{OA} + \frac{1}{3}s\vec{OB} \quad \text{--- ①}$$

$$\Rightarrow \vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{OA} \text{ あり}$$

$$\text{両辺 } \frac{3}{2} \text{ をかけ}$$

$$\frac{3}{2}\vec{OC} = \vec{OA}$$

$$\text{よって } \text{①より}$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-s)\frac{3}{2}\vec{OC} + \frac{1}{3}s\vec{OB} \\ &= \frac{3}{2}(1-s)\vec{OC} + \frac{1}{3}s\vec{OB} \quad \text{--- (*)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{点 } P \text{ は直線 } CB \text{ 上}$$

$$\text{存在する } (*) \text{ より}$$

$$\frac{3}{2}(1-s) + \frac{1}{3}s = 1$$

$$(\vec{OC} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$$

$$\text{両辺 } 6 \text{ をかけ}$$

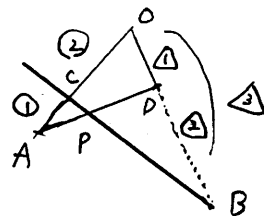
$$9(1-s) + 2s = 6$$

$$9-9s+2s=6$$

$$-7s = -3$$

$$s = \frac{3}{7} \text{ (127頁C)}$$

(2)



$\triangle OAD$ は直線 CB 上にあり

(2.3) とおす。メネラウスの定理より

$$\frac{OC}{CA} \times \frac{AP}{PD} \times \frac{DB}{BO} = 1$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{AP}{PD} \times \frac{2}{3} = 1 \text{ より } \frac{AP}{PD} = \frac{3}{4}$$

$$\text{よって } AP : PD = 3 : 4 \text{ あり}$$

(1) の場合より

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{4\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+4} \\ &= \frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}\vec{OB} = \frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7} \times \frac{1}{3}\vec{OB} \\ &= \frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{1}{7}\vec{OB}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}|\vec{OP}|^2 &= \left| \frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{1}{7}\vec{OB} \right|^2 \\ &= \frac{1}{49} (16|\vec{OA}|^2 + 8\vec{OA} \cdot \vec{OB} + |\vec{OB}|^2)\end{aligned}$$

$$|\vec{OA}| = 2, |\vec{OB}| = 3, \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1$$

よって

$$\begin{aligned}|\vec{OP}|^2 &= \frac{1}{49} (16 \cdot 2^2 + 8 \cdot 1 + 3^2) \\ &= \frac{1}{49} (64 + 8 + 9) = \frac{81}{49}\end{aligned}$$

$$|\vec{OP}| > 0 \text{ より } |\vec{OP}| = \sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$$

よって

$$\vec{OA} \cdot \vec{OP} = |\vec{OA}| |\vec{OP}| \cos \angle AOP$$

$$\vec{OA} \cdot \left(\frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{1}{7}\vec{OB} \right) = 2 \times \frac{9}{7} \cos \angle AOP$$

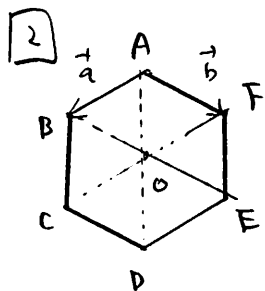
$$\frac{4}{7}|\vec{OA}|^2 + \frac{1}{7}\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{18}{7} \cos \angle AOP$$

$$\frac{4}{7} \cdot 2^2 + \frac{1}{7} \cdot 1 = \frac{18}{7} \cos \angle AOP$$

$$17 = 18 \cos \angle AOP$$

よって

$$\cos \angle AOP = \frac{17}{18}$$



- (1) 正六角形は正三角形の
6倍集まりで正三角形の
よって $\angle BAF = 120^\circ$ である

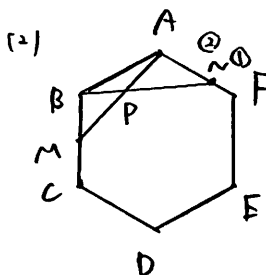
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

また、正六角形の各頂点を通る
円の中心を O とすると、

$$\vec{BC} = \vec{BO} + \vec{OC}$$

$$= \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b}$$



問題より $\vec{AP} = t \vec{AM}$ である。

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM}$$

$$= \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{BC} \quad (1) \text{より}$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2} (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$= \frac{3}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

である。

$$\vec{AP} = t \left(\frac{3}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right)$$

$$= \frac{3}{2} t \vec{a} + \frac{1}{2} t \vec{b} \quad \dots (1)$$

である。

点 P が AM と BN の交点 であるとき
P は BN 上に存在する。

$$BP : PN = s : (1-s) \text{ である}$$

$$\vec{AP} = (1-s) \vec{AB} + s \vec{AN}$$

$$= (1-s) \vec{a} + s \cdot \frac{2}{3} \vec{b}$$

$$= (1-s) \vec{a} + \frac{2}{3} s \vec{b} \quad \dots (2)$$

①②より $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b}$
である。係数を比較して

$$\begin{cases} \frac{3}{2} t = 1-s & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{2} t = \frac{2}{3} s & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

解いて

$$t = \frac{4}{9}, s = \frac{1}{3}$$

よって $t = \frac{4}{9}$ である。

$$t = \frac{4}{9}$$

(3) (1) と (2) より

である。

$$\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{b}$$

$$\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \frac{3}{2} \vec{AN}$$

①②より

$$\vec{AP} = \frac{3}{2} t \vec{AB} + \frac{1}{2} t \cdot \frac{3}{2} \vec{AN}$$

$$\vec{AP} = \frac{3}{2} t \vec{AB} + \frac{3}{4} t \vec{AN}$$

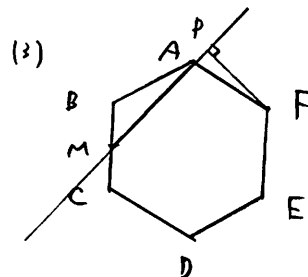
が成り立つので、点 P が BN 上に

存在する。

$$\frac{3}{2} t + \frac{3}{4} t = 1$$

$$(\vec{AB} \text{ の係数}) + (\vec{AN} \text{ の係数}) = 1$$

$$\text{が成り立つ。解いて } t = \frac{4}{9}$$



$$AP \perp FP \quad \text{である}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{FP} = 0 \text{ が成り立つ。}$$

(2) より

$$\vec{AP} = \frac{3}{2} t \vec{a} + \frac{1}{2} t \vec{b}$$

である。

$$\vec{FP} = \vec{AP} - \vec{AF}$$

$$= \left(\frac{3}{2} t \vec{a} + \frac{1}{2} t \vec{b} \right) - \vec{b}$$

$$= \frac{3}{2} t \vec{a} + \left(\frac{1}{2} t - 1 \right) \vec{b}$$

よって

$$\vec{AP} \cdot \vec{FP}$$

$$= \left(\frac{3}{2} t \vec{a} + \frac{1}{2} t \vec{b} \right) \cdot \left\{ \frac{3}{2} t \vec{a} + \left(\frac{1}{2} t - 1 \right) \vec{b} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} t (3 \vec{a} + \vec{b}) \cdot \frac{1}{2} \{ 3 t \vec{a} + (t-2) \vec{b} \}$$

$$= \frac{1}{4} t \{ 9 t |\vec{a}|^2 + 3(t-2) \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$+ 3 t \vec{a} \cdot \vec{b} + (t-2) |\vec{b}|^2 \}$$

$$= \frac{1}{4} t \{ 9 t |\vec{a}|^2 + 3(t-2) \vec{a} \cdot \vec{b} + 3 t \vec{a} \cdot \vec{b} + (t-2) |\vec{b}|^2 \}$$

である。

$$9 t \cdot 1^2 + 3(t-2) \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 t \left(-\frac{1}{2}\right) + (t-2) \cdot 1^2$$

$$= 9 t - \frac{3}{2} t + 3 - \frac{3}{2} t + t - 2$$

$$= 9 t - 3 t + t + 3 - 2$$

$$= 7 t + 1$$

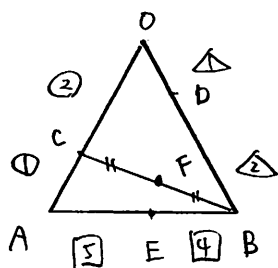
よって

$$\vec{AP} \cdot \vec{FP} = \frac{1}{4} t (7 t + 1) = 0$$

$$t \neq 0 \text{ より } 7 t + 1 = 0$$

$$\text{解いて } t = -\frac{1}{7}$$

3



(1)

内分の公式より

$$\vec{OE} = \frac{4\vec{OA} + 5\vec{OB}}{5+4}$$

$$= \frac{4}{9}\vec{OA} + \frac{5}{9}\vec{OB}$$

$$= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

また正三角形より $\angle AOB = 60^\circ$

である。

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 18 \end{aligned}$$

(2)

証明

(1)より $\vec{OE} = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$ である。

また $\vec{OD} = \frac{1}{3}\vec{OB} = \frac{1}{3}\vec{b}$

よって $\vec{OF} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{OA} + \vec{OB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

である。ゆえに

$$\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$$

$$= \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}\right) - \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b} - \frac{3}{9}\vec{b}$$

$$= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{9}(2\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots \textcircled{1}$$

また

$$\vec{DF} = \vec{OF} - \vec{OD}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{6}\vec{b} - \frac{2}{6}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{6}(2\vec{a} + \vec{b}) \quad \dots \textcircled{2}$$

よって (1), (2) より、 $\vec{DE} = \frac{1}{3}\vec{DF}$ である。

$$\frac{4}{3} \times \frac{1}{6}(2\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{9}(2\vec{a} + \vec{b})$$

よって

$$\frac{4}{3} \times \vec{DF} = \vec{DE} \quad \dots \textcircled{3}$$

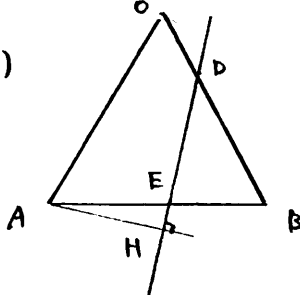
したがって、点 D, F, E は一直線上にある。

また、点 D, F, E は (1) - 直線 DE 上にある。

よって、 $DE = DF = 4:3$

$$DE:DF = 4:3$$

(3)



点 H は直線 DE 上にある。

である。

$$\vec{OH} = \vec{OD} + \vec{DH}$$

$$= \vec{OD} + t\vec{DE}$$

よって、(2) の結果より

$$\vec{OH} = \vec{OD} + t\vec{DE}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{b} + t\left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{4}{9}t\vec{a} + \frac{2}{9}t\vec{b}$$

$$= \frac{4}{9}t\vec{a} + \left(\frac{2}{9}t + \frac{1}{3}\right)\vec{b} \quad \dots (*)$$

AH ⊥ (直線 DE) より

$$\vec{AH} \cdot \vec{DE} = 0$$

$$\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA}$$

$$= \frac{4}{9}t\vec{a} + \left(\frac{2}{9}t + \frac{1}{3}\right)\vec{b} - \vec{a}$$

$$= \left(\frac{4}{9}t - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{9}t + \frac{1}{3}\right)\vec{b}$$

よって

$$\vec{AH} \cdot \vec{DE}$$

$$= \left\{\left(\frac{4}{9}t - 1\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{9}t + \frac{1}{3}\right)\vec{b}\right\} \cdot \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\left\{(4t-9)\vec{a} + (2t+3)\vec{b}\right\} \cdot \frac{2}{9}(2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{2}{81}\left\{(4t-9)\vec{a} + (2t+3)\vec{b}\right\} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$$

である。

$$= \frac{2}{81}\left\{(4t-9)\vec{a} + (2t+3)\vec{b}\right\} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= 2(4t-9)\vec{a} \cdot 2\vec{a} + (4t-9)\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$+ 2(2t+3)\vec{a} \cdot \vec{b} + (2t+3)\vec{b} \cdot \vec{b}$$

である。

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = 6, \vec{a} \cdot \vec{b} = 18$$

よって、

$$2(4t-9) \cdot 6^2 + (4t-9) \cdot 18$$

$$+ 2(2t+3) \cdot 18 + (2t+3) \cdot 6^2$$

$$= 18\left\{2(4t-9) \cdot 2 + (4t-9) \cdot 1\right.$$

$$\left. + 2(2t+3) + (2t+3) \cdot 2\right\}$$

$$= 18(16t-36+4t-9+4t+6+4t+6)$$

$$= 18(28t-33)$$

ゆえに

$$\vec{AH} \cdot \vec{DE} = \frac{2}{81} \times 18(28t-33) = 0$$

$$\text{よって } 28t-33=0$$

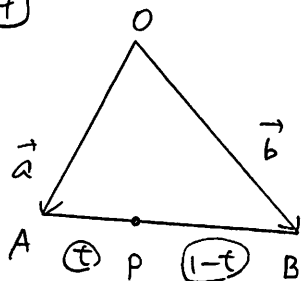
$$t = \frac{33}{28}$$

(*)より、

$$\vec{OH} = \frac{4}{9} \cdot \frac{33}{28}\vec{a} + \left(\frac{2}{9} \cdot \frac{33}{28} + \frac{1}{3}\right)\vec{b}$$

$$= \frac{11}{21}\vec{a} + \frac{25}{42}\vec{b}$$

(4)



(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB$$

$$= 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

内分点 P を

$$\vec{OP} = \frac{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}}{t + (1-t)}$$

$$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$$

(2)

$$OP \perp AB$$

より

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

また、

$$(1) \text{より } \vec{OP} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \text{ であり}$$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ であり}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - (1-t)|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{2}, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{5}{2} \text{ である}$$

より

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = (1-t) \cdot \frac{5}{2} - (1-t) \cdot 4^2 + t \cdot 5^2 - t \cdot \frac{5}{2}$$

$$= \frac{5}{2} - \frac{5}{2}t - 16 + 16t + 25t - \frac{5}{2}t$$

$$= -\frac{27}{2} + 36t$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ より } -\frac{27}{2} + 36t = 0$$

$$\therefore 36t = \frac{27}{2}$$

$$t = \frac{27}{2} \times \frac{1}{36} = \frac{3}{8}$$

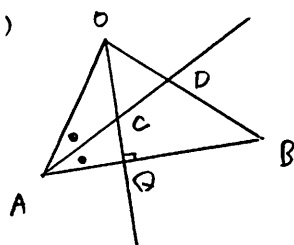
$$(0 < t < 1 \text{ である})$$

したがって (1) により

$$\vec{OP} = (1 - \frac{3}{8})\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

$$= \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

(3)



(2) より、点 O から AB へ

下す垂線と AB の交点を Q

とすると、

$$\vec{OQ} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

である。また、 $\angle A = \angle B$ である

と OB の交点を D とすると、

$$OD : DB = AO : AB$$

である。また、OD : DB = AO : AB

線分 AB 上に点 Q をとる。

余弦定理より

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB$$

$$= 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= 16 + 25 - 20 = 21$$

$$AB > 0 \text{ より } AB = \sqrt{21}$$

$$(AB^2 = |\vec{b} - \vec{a}|^2 \text{ である})$$

したがって

$$OD : DB = AO : AB$$

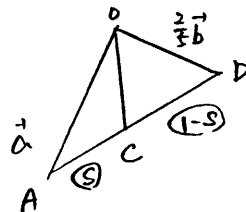
$$= 4 : \sqrt{21} = 2 : 3$$

より

$$\vec{OD} = \frac{2}{5}\vec{b}$$

また、

$$AC : CD = S : (1-S) \text{ である}$$



$$\vec{OC} = (1-S)\vec{a} + S\vec{b}$$

$$= (1-S)\vec{a} + S \cdot \frac{2}{5}\vec{b}$$

$$= (1-S)\vec{a} + \frac{2}{5}S\vec{b} \quad \text{--- (1)}$$

また、点 O, C, Q は

同一直線上にある

$$\vec{OC} = k\vec{OQ} \text{ である}$$

より

$$\vec{OC} = k(\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b})$$

$$= \frac{5}{8}k\vec{a} + \frac{3}{8}k\vec{b} \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) より

$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b} \text{ より}$$

$$\begin{cases} 1-S = \frac{5}{8}k & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{2}{5}S = \frac{3}{8}k & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{16}{25}, S = \frac{3}{5}$$

$$\therefore S = \frac{3}{5} \text{ である}$$

$$\vec{OC} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{25}\vec{b}$$

また

$$OC^2 = |\vec{OC}|^2$$

$$= |\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{6}{25}\vec{b}|^2$$

$$= |\frac{2}{25}(5\vec{a} + 3\vec{b})|^2$$

$$= (\frac{2}{25})^2 |5\vec{a} + 3\vec{b}|^2$$

$$= (\frac{2}{25})^2 (25|\vec{a}|^2 + 30\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2)$$

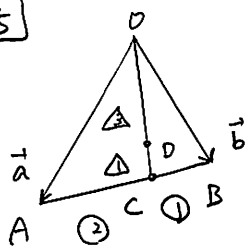
$$= (\frac{2}{25})^2 (25 \cdot 4^2 + 30 \cdot \frac{5}{2} + 9 \cdot 5^2)$$

$$= (\frac{2}{25})^2 \cdot 5^2 (4^2 + 6 \cdot \frac{1}{2} + 9)$$

$$= (\frac{2}{25})^2 (16 + 3 + 9) = (\frac{2}{25})^2 \cdot 28$$

$$OC > 0 \text{ より } OC = \frac{2}{5}\sqrt{7} = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{7} = \frac{4}{5}\sqrt{7}$$

5



$$(1) \text{ 又 } \vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \text{ であり}$$

$$\left| \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right| = 2\sqrt{2}$$

(2)

$$|\vec{a} + 2\vec{b}| = 6\sqrt{2}$$

(1)

内分点の公式より

$$\vec{OC} = \frac{1 \cdot \vec{OA} + 2 \cdot \vec{OB}}{2+1}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

両辺の2乗

$$|\vec{a} + 2\vec{b}|^2 = (6\sqrt{2})^2$$

$$|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 72 \dots \textcircled{1}$$

問題より $|\vec{a}| = OA = 4$,

$|\vec{b}| = OB = 3$ であり、 $\textcircled{1}$ より

$$4^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \cdot 3^2 = 72$$

$$16 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 36 = 72$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 72 - 36 - 16$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 20$$

(2)

$$\vec{OD} = \frac{3}{4}\vec{OC}$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right)$$

$$= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

したがって

$$\vec{BE} = t\vec{BD}$$

$$= t(\vec{OD} - \vec{OB})$$

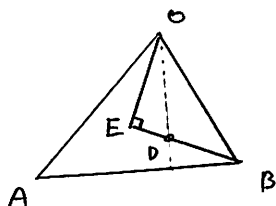
$$= t \left\{ \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) - \vec{b} \right\}$$

$$= t \left(\frac{1}{4}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \right)$$

$$= \frac{1}{4}t\vec{a} - \frac{1}{2}t\vec{b}$$

また

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$



また $\angle OEB = 90^\circ$ より

$$\vec{OE} \cdot \vec{BE} = 0$$

$$\left\{ \frac{1}{4}t\vec{a} + \left(1 - \frac{1}{2}t\right)\vec{b} \right\} \cdot \left(\frac{1}{4}t\vec{a} - \frac{1}{2}t\vec{b} \right) = 0$$

$$\frac{1}{4} \left\{ t\vec{a} + (4-2t)\vec{b} \right\} \cdot \frac{1}{4}t(\vec{a} - 2\vec{b}) = 0$$

$$\frac{1}{16}t \left\{ t|\vec{a}|^2 + (4-2t)\vec{a} \cdot \vec{b} - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} - 2(4-2t)|\vec{b}|^2 \right\} = 0 \dots \textcircled{2}$$

(3)

$$OC = 2\sqrt{2} \text{ より}$$

$$|\vec{OC}| = 2\sqrt{2} \text{ であり}$$

$$\textcircled{2} \text{ より } t(|\vec{a}|^2 + (4-2t)\vec{a} \cdot \vec{b} - 2t\vec{a} \cdot \vec{b} - 2(4-2t)|\vec{b}|^2) = 0$$

$$t \cdot 4^2 + (4-2t) \cdot 5$$

$$- 2t \cdot 5 - 2(4-2t) \cdot 3^2 = 0$$

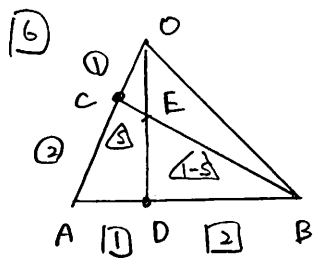
$$16t + 20 - 10t - 10t$$

$$- 72 + 36t = 0$$

$$32t - 52 = 0$$

$$t = \frac{52}{32} = \frac{13}{8}$$





(1)

$$\vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

(内分点の公式より)

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \frac{2\vec{OA} + 1\vec{OB}}{1+2} \\ &= \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

(2)

3点 O, E, D は一直線上より

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= k\vec{OD} \\ &= k\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= \frac{2}{3}k\vec{a} + \frac{1}{3}k\vec{b} \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

また, $CE:EB = S:(1-S)$ より

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{(1-S)\vec{OC} + S\vec{OB}}{S + (1-S)} \\ &= (1-S)\vec{OC} + S\vec{OB} \\ &= (1-S) \cdot \frac{1}{3}\vec{a} + S\vec{b} \\ &= \frac{1}{3}(1-S)\vec{a} + S\vec{b} \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

$\therefore \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$ より

①, ②より $\vec{a}, \vec{b}$ の係数をそれぞれ比較して

$$\begin{cases} \frac{2}{3}k = \frac{1}{3}(1-S) & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{3}k = S & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

解いて $k = \frac{3}{7}, S = \frac{1}{7}$

①より $k = \frac{3}{7}$ を代入して

$$\vec{OE} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$$

(3) (1)と同じ

$$\therefore \vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{a} \text{ より } \vec{a} = 3\vec{OC}$$

また ①より

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{2}{3}k \cdot 3\vec{OC} + \frac{1}{3}k\vec{OB} \\ &= 2k\vec{OC} + \frac{1}{3}k\vec{OB} \quad \text{--- (*)}\end{aligned}$$

よって点 E は直線 CB 上に点より

(*)より

$$2k + \frac{1}{3}k = 1$$

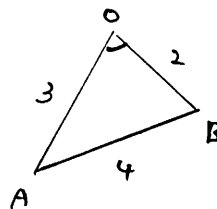
$$(\vec{OC} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$$

が成り立つ。したがって $k = \frac{3}{7}$

①より

$$\vec{OE} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$$

(3)

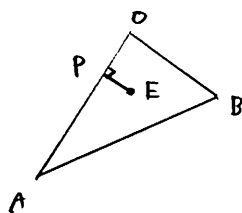


余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} \\ &= \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= \frac{9 + 4 - 16}{2 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$



P は OA 上に点より $\vec{OP} = u\vec{OA}$
と表す

$$\vec{EP} = \vec{OP} - \vec{OE}$$

$$\begin{aligned}&= u\vec{OA} - \left(\frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}\right) \\ &= \left(u - \frac{2}{7}\right)\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\text{よって } EP \perp OA \text{ より } \vec{EP} \cdot \vec{OA} = 0$$

これが成り立つ

$$\begin{aligned}\vec{EP} \cdot \vec{OA} &= \left\{ \left(u - \frac{2}{7}\right)\vec{a} - \frac{1}{7}\vec{b} \right\} \cdot \vec{a} \\ &= \left(u - \frac{2}{7}\right) |\vec{a}|^2 - \frac{1}{7} \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \left(u - \frac{2}{7}\right) \cdot 3^2 - \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 9u - \frac{18}{7} + \frac{3}{14} \\ &= 9u - \frac{33}{14} = 0\end{aligned}$$

$$\text{したがって } u = \frac{11}{42}$$

$$\text{これが成り立つ } \vec{OP} = \frac{11}{42}\vec{OA} \text{ より}$$

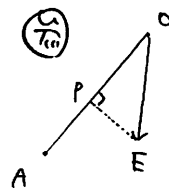
$$OP = \frac{11}{42} OA = \frac{11}{42} \times 3 = \frac{11}{14}$$

$$\text{また } AP = OA - OP = 3 - \frac{11}{14} = \frac{31}{14}$$

これが成り立つ

$$\begin{aligned}\frac{OP}{AP} &= OP \div AP \\ &= \frac{11}{14} \div \frac{31}{14} = \frac{11}{14} \times \frac{14}{31} = \frac{11}{31}\end{aligned}$$

(4) (1)と同じ



OA と AB とは
異なる直線より

$\vec{OE}$ の基底に $\vec{a}, \vec{b}$ とすると

よって

$$\vec{OE} \cdot \vec{OA} = OP \times OA$$

これが成り立つ

$$\left(\frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}\right) \cdot \vec{a} = OP \times 3$$

$$\frac{2}{7} |\vec{a}|^2 + \frac{1}{7} \vec{a} \cdot \vec{b} = OP \times 3$$

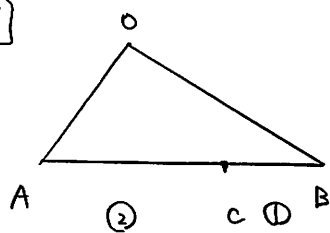
$$\frac{2}{7} \cdot 3^2 + \frac{1}{7} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \times OP$$

$$\frac{18}{7} - \frac{3}{14} = 3OP$$

$$\frac{33}{14} = 3OP \text{ より } OP = \frac{11}{14}$$

(1)と同じ

7

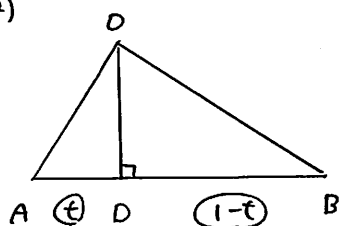


(1)

(A) 1/3 a + 2/3 b

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \frac{1 \cdot \vec{OA} + 2 \cdot \vec{OB}}{2+1} \\ &= \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{OB} \\ &= \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}\end{aligned}$$

(2)



(A) 1/3 a + 2/3 b

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

よって $OD \perp AB$ より

$$\vec{OD} \cdot \vec{AB} = 0.$$

$$\text{よって } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}\vec{OD} \cdot \vec{AB} &= \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - (1-t)|\vec{a}|^2 \\ &\quad + t|\vec{b}|^2 - t\vec{b} \cdot \vec{a}\end{aligned}$$

$$\because |\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \text{ なるから}$$

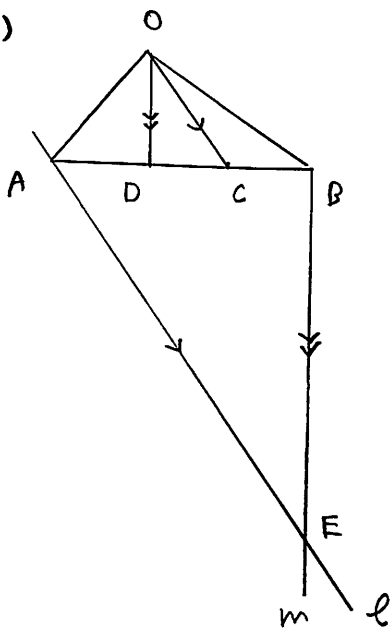
$$\begin{aligned}(1-t) \cdot (-1) - (1-t) \cdot (\sqrt{3})^2 \\ + t \cdot 2^2 - t \cdot (-1)\end{aligned}$$

$$= -1 + t - 3 + 3t + 4t + t$$

$$= 9t - 4 = 0$$

$$\text{よって } t = \frac{4}{9} \quad (0 < t < 1 \text{ なる範囲})$$

(3)



$AE \parallel OC$ より

$$\vec{AE} = s\vec{OC} \text{ なる実数 } s \text{ がある}$$

存在する。

よって

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \vec{OA} + \vec{AE} \\ &= \vec{OA} + s\vec{OC} \\ &= \vec{a} + s\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}s\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}s\right)\vec{a} + \frac{2}{3}s\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

また、同様にして $BE \parallel OD$ より

$$\vec{BE} = k\vec{OD} \text{ なる実数 } k \text{ がある}$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \vec{OB} + \vec{BE} \\ &= \vec{OB} + k\vec{OD} \\ &= \vec{b} + k\left\{\left(1 - \frac{4}{9}\right)\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right\} \\ &= \vec{b} + k\left(\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b}\right) \\ &= \vec{b} + \frac{5}{9}k\vec{a} + \frac{4}{9}k\vec{b} \\ &= \frac{5}{9}k\vec{a} + \left(1 + \frac{4}{9}k\right)\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$$

であるから、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の係数をそれぞれ比較して

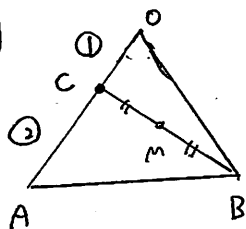
$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{3}s = \frac{5}{9}k & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{2}{3}s = 1 + \frac{4}{9}k & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } k = \frac{9}{2}, s = \frac{9}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ に } s = \frac{9}{2} \text{ を代入して}$$

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2}\right)\vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2}\vec{b} \\ &= \left(1 + \frac{3}{2}\right)\vec{a} + 3\vec{b} \\ &= \frac{5}{2}\vec{a} + 3\vec{b}\end{aligned}$$

8



(1) Mは線分BCの中点より
 仮定から

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OB})$$

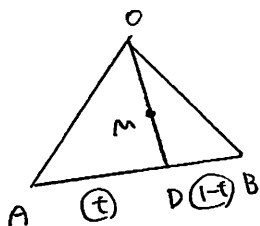
$$\text{仮定より } \vec{OC} = \frac{1}{3}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{a} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 45^\circ \\ &= 3 \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

(2)



3点O, M, Dは一直線上にあるので

$$\vec{OD} = t\vec{OM}$$

と仮定すると存在する。

よって

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= t\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= \frac{t}{6}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

また、AD:DB = t:(1-t) とすると

内分点の仮定より

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \end{aligned}$$

$$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b}$
 であるから、 $\vec{a}, \vec{b}$ の係数をそれぞれ
 比較して

$$\begin{cases} \frac{1}{6}t = 1-t & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{2}t = t & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } t = \frac{3}{2}, t = \frac{3}{4}$$

$$t = \frac{3}{4} \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入して}$$

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \left(1 - \frac{3}{4}\right)\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

②より (①と②を比較)

①より

$$\vec{OD} = \frac{1}{6}t\vec{OA} + \frac{1}{2}t\vec{OB}$$

点Dは直線AB上にあるので

$$\frac{1}{6}t + \frac{1}{2}t = 1$$

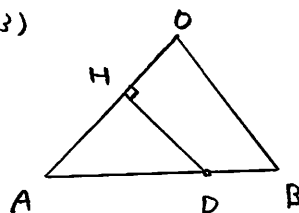
$$(\vec{OA} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$$

$$\text{解いて } t = \frac{3}{2}$$

①より代入して

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \vec{b} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

(3)



HはOA上にあるので

$$\vec{OH} = s\vec{OA} \text{ と仮定すると存在する。}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{DH} &= \vec{OH} - \vec{OD} \\ &= s\vec{OA} - \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) \\ &= s\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

$$= \left(s - \frac{1}{4}\right)\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} \dots (*)$$

よって DH ⊥ OA と仮定から

$$\vec{DH} \cdot \vec{OA} = 0$$

よって

$$\vec{DH} \cdot \vec{OA} = \left\{ \left(s - \frac{1}{4}\right)\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} \right\} \cdot \vec{a}$$

$$|\vec{a}| = 3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$$

(1)より

$$= \left(s - \frac{1}{4}\right)|\vec{a}|^2 - \frac{3}{4}\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= \left(s - \frac{1}{4}\right) \cdot 3^2 - \frac{3}{4} \times 6$$

$$= 9s - \frac{9}{4} - \frac{9}{2}$$

$$= 9s - \frac{27}{4} = 0$$

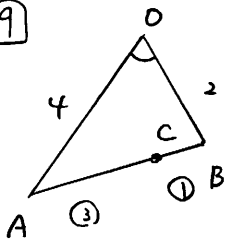
これを解いて

$$9s = \frac{27}{4} \text{ より } s = \frac{3}{4}$$

(*)に代入して

$$\begin{aligned} \vec{DH} &= \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} \end{aligned}$$

9



(1)

(1) 内分の公式より

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \frac{1 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OB}}{3+1} \\ &= \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OB} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 4 \times 2 \times \frac{1}{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

(2)

$$(1) \text{より } \vec{OC} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

これから

$$\begin{aligned}OC^2 &= |\vec{OC}|^2 \\ &= \left| \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 |\vec{a} + 3\vec{b}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \{ |\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \}\end{aligned}$$

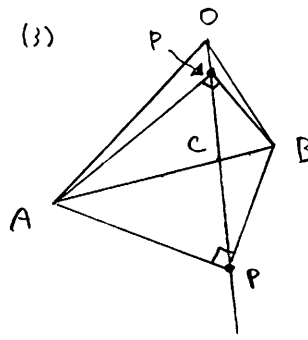
$$\therefore |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 2,$$

$$(1) \text{より } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \text{ である}$$

$$\begin{aligned}OC^2 &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (4^2 + 6 \cdot 2 + 9 \cdot 2^2) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (16 + 12 + 36) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 64\end{aligned}$$

$$\therefore OC = \frac{1}{4} \sqrt{64} = \frac{1}{4} \cdot 8 = 2$$

(3)



問題より $\vec{OP} = t\vec{OC}$ とおける。

(1) より

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= t \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b}\end{aligned}$$

$$\therefore \angle APB = 90^\circ$$

これから $AP \perp BP$ である。

$$\therefore \vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0 \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned}\vec{AP} &= \vec{OP} - \vec{OA} \\ &= \frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} - \vec{a} \\ &= \left(\frac{1}{4}t - 1 \right) \vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} \\ \vec{BP} &= \vec{OP} - \vec{OB} \\ &= \frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} - \vec{b} \\ &= \frac{1}{4}t\vec{a} + \left(\frac{3}{4}t - 1 \right) \vec{b}\end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}\vec{AP} \cdot \vec{BP} &= \left\{ \left(\frac{1}{4}t - 1 \right) \vec{a} + \frac{3}{4}t\vec{b} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{4}t\vec{a} + \left(\frac{3}{4}t - 1 \right) \vec{b} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \{ (t-4)\vec{a} + 3t\vec{b} \} \cdot \left\{ \frac{1}{4}t\vec{a} + (3t-4)\vec{b} \right\} \\ &= \frac{1}{16} \{ (t-4)t|\vec{a}|^2 + (t-4)(3t-4)\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &\quad + 3t^2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3t(3t-4)|\vec{b}|^2 \} \\ &= \frac{1}{16} \{ (t-4)t \cdot 4^2 + (t-4)(3t-4) \cdot 2 \\ &\quad + 3t^2 \cdot 2 + 3t(3t-4) \cdot 2^2 \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{16} \{ 16t^2 - 64t + 2(3t^2 - 16t + 16) \\ &\quad + 6t^2 + 12(3t^2 - 4t) \} \\ &= \frac{1}{16} (16t^2 - 64t + 6t^2 - 32t + 32 + 6t^2 + 36t^2 - 48t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{16} (64t^2 - 144t + 32) \\ &= 4t^2 - 9t + 2 \\ &= (4t-1)(t-2) = 0 \\ &\therefore t = \frac{1}{4}, 2\end{aligned}$$

(2)

$$\angle APB = 90^\circ \text{ より}$$

点 P は AB を直径とする円と直線 OC の交点である。

よって AB の中点を M とすると

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\therefore \vec{MP} = \vec{OP} - \vec{OM}$$

$$= \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \right) \vec{a} + \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \right) \vec{b}$$

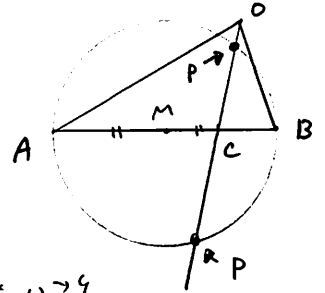
である。余弦定理より $AB = 4$

であるから $OM = 2$

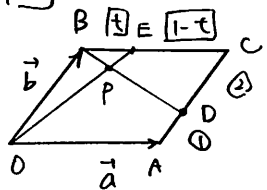
$$|\vec{MP}| = 2$$

$$\therefore \left| \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{2} \right) \vec{a} + \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{2} \right) \vec{b} \right|^2 = 2^2$$

これを解いて $t = \frac{1}{4}, 2$ となる。



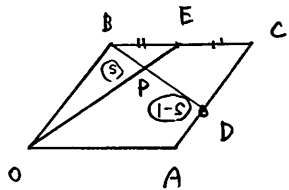
10



$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{AC} \\ &= \vec{OA} + \frac{1}{3} \vec{OB} \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= \vec{OB} + \vec{BE} \\ &= \vec{OB} + t \vec{BC} \\ &= \vec{OB} + t \vec{OA} \\ &= \vec{b} + t \vec{a} \end{aligned}$$

(2)



3.点 O, P, E は

$$\vec{OP} = k \vec{OE}$$

とあるから k を解く。

$$t = \frac{1}{2} \text{ と仮定する。 (1) より}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= k (\vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2} k \vec{a} + k \vec{b} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\text{また } BP : PD = s : (1-s)$$

とある。 (1) の a, b を代入

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{(1-s) \vec{OB} + s \vec{OD}}{s + (1-s)} \\ &= (1-s) \vec{OB} + s \vec{OD} \\ &= (1-s) \vec{b} + s (\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (1-s) \vec{b} + s \vec{a} + \frac{1}{3} s \vec{b} \\ &= s \vec{a} + (1-s + \frac{1}{3} s) \vec{b} \\ &= s \vec{a} + (1 - \frac{2}{3} s) \vec{b} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b}$$

と仮定する。 (1) と (2) を比較

$$\begin{cases} \frac{1}{2} k = s & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ k = 1 - \frac{2}{3} s & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } s = \frac{3}{8}, k = \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } k = \frac{3}{4} \text{ と代入}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b} \\ &= \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b} \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \text{ (1) と (2) の比較}$$

$$(1) \text{ より } \vec{OD} = \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} \text{ と仮定}$$

$$\vec{a} = \vec{OD} - \frac{1}{3} \vec{b} \text{ と (1) を代入}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \frac{1}{2} k (\vec{OD} - \frac{1}{3} \vec{b}) + k \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} k \vec{OD} - \frac{1}{6} k \vec{b} + k \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} k \vec{OD} + \frac{5}{6} k \vec{b} \\ &= \frac{1}{2} k \vec{OD} + \frac{5}{6} k \vec{OB} \quad \dots (*) \end{aligned}$$

つまり点 P は直線 BD 上の点

と仮定。 (*) を代入

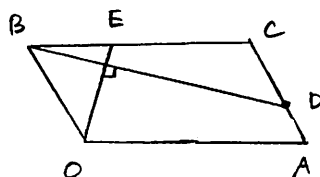
$$\frac{1}{2} k + \frac{5}{6} k = 1$$

$$(\vec{OD} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$$

$$\text{解いて } k = \frac{3}{4}$$

$$\textcircled{1} \text{ を代入 } \vec{OP} = \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b}$$

(2)



$$OA = 2 \text{ より } |\vec{a}| = 2$$

$$OB = 1 \text{ より } |\vec{b}| = 1$$

また

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ \\ &= 2 \times 1 \times (-\frac{1}{2}) = -1 \end{aligned}$$

と仮定

$$OE \perp BD \text{ と仮定 } \vec{OE} \cdot \vec{BD} = 0$$

$$(1) \text{ より } \vec{OE} = \vec{b} + t \vec{a} \text{ と仮定}$$

$$\begin{aligned} \vec{BD} &= \vec{OD} - \vec{OB} \\ &= (\vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}) - \vec{b} = \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} \vec{OE} \cdot \vec{BD} &= (\vec{b} + t \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{3} |\vec{b}|^2 + t |\vec{a}|^2 - \frac{2}{3} t \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= (-1) - \frac{2}{3} \cdot 1^2 + t \cdot 2^2 - \frac{2}{3} t (-1) \\ &= -1 - \frac{2}{3} + 4t + \frac{2}{3} t \\ &= \frac{14}{3} t - \frac{5}{3} \end{aligned}$$

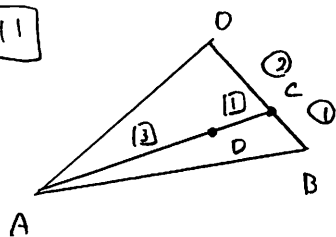
$$\text{よって } \vec{OE} \cdot \vec{BD} = 0 \text{ より}$$

$$\frac{14}{3} t - \frac{5}{3} = 0$$

$$\textcircled{*} \quad 14t - 5 = 0$$

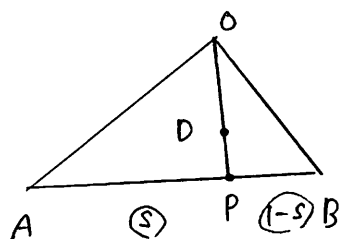
$$t = \frac{5}{14} \quad (0 < t < 1 \text{ と仮定})$$

11



(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB$
 $= 9 \times 3 \times (-\frac{1}{3})$
 $= -9$

(2) (A) 1/3 の位置より
 $\vec{OD} = \frac{1 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OB}}{3+1}$
 $= \frac{1}{4} \vec{OA} + \frac{3}{4} \vec{OB}$
 $= \frac{1}{4} \vec{OA} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \vec{OB}$
 $= \frac{1}{4} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB}$
 $= \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$



3点 O, D, P は一直線上に
 ある。
 $\vec{OP} = k \vec{OD}$
 となる実数 k が存在する。

$\vec{OP} = k(\frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b})$
 $= \frac{1}{4} k \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{b} \dots ①$

また $AP:PB = S:(1-S)$ とおくと
 $\triangle OAB$ の内分点より

$\vec{OP} = \frac{(1-S)\vec{OA} + S\vec{OB}}{S + (1-S)}$
 $= (1-S)\vec{OA} + S\vec{OB}$
 $= (1-S)\vec{a} + S\vec{b} \dots ②$

①, ②より $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$
 であるから係数を比較して

$\begin{cases} \frac{1}{4}k = 1-S & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{2}k = S & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$ より

解いて $k = \frac{4}{3}, S = \frac{2}{3}$
 $S = \frac{2}{3}$ を ② に代入して
 $\vec{OP} = (1 - \frac{2}{3})\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
 $= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

(3) (1) と (2) より

① = ②

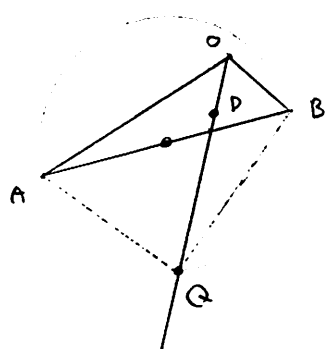
$\vec{OP} = \frac{1}{4}k \vec{OA} + \frac{1}{2}k \vec{OB}$

点 P は直線 AB 上の点より

$\frac{1}{4}k + \frac{1}{2}k = 1$
 $(\vec{OA} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$

解いて $k = \frac{4}{3}$
 ① = ② より $\vec{OP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \vec{b}$
 $= \frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$

(3)



$\angle AQB$ は直径に对する円周角
 であるから 90° である。

よって $\angle AQB = 90^\circ$

より $AQ \perp BQ$ より $\vec{AQ} \cdot \vec{BQ} = 0$

3点 O, D, Q は一直線上より

$\vec{OQ} = t \vec{OD}$ となる実数 t が

存在する。

$\vec{OQ} = t(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b})$

$= \frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b}$

$\vec{AQ} \cdot \vec{BQ} = (\vec{OQ} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OQ} - \vec{OB})$

$= (\frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} - \vec{b})$

$= \frac{1}{4} \{ (t-4)\vec{a} + 2t\vec{b} \} \cdot \frac{1}{4} \{ t\vec{a} + (2t-4)\vec{b} \}$

$= \frac{1}{16} \{ (t-4)t|\vec{a}|^2 + (t-4)(2t-4)\vec{a} \cdot \vec{b}$
 $+ 2t^2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2t(2t-4)|\vec{b}|^2 \}$

$= \frac{1}{16} \{ t(t-4) \cdot 9 + (t-4)(2t-4) \cdot (-9)$
 $+ 2t^2 \cdot (-9) + 2t(2t-4) \cdot 3 \}$

$= \frac{9}{16} \{ 9t(t-4) - (t-4)(2t-4)$
 $- 2t^2 + 2t(2t-4) \}$

$= \frac{9}{16} (9t^2 - 36t - 2t^2 + 12t - 16$
 $- 2t^2 + 4t^2 - 8t)$

$= \frac{9}{16} (9t^2 - 32t - 16)$

$= \frac{9}{16} (9t+4)(t-4)$

$\vec{AQ} \cdot \vec{BQ} = 0$ より $t = -\frac{4}{9}, 4$

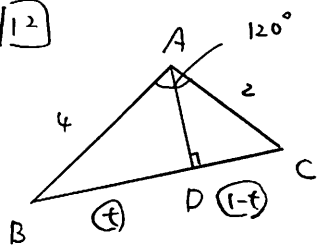
Q は AB (延長) 上 O と反対側に
 あり得る。 $t > 0$ である。

よって $t = -\frac{4}{9}$ は不適

したがって

$\vec{OQ} = 4(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b}$

12



(1)

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BAC \\ &= 4 \times 2 \times \cos 120^\circ \\ &= 4 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -4\end{aligned}$$

(2)

内分の(1)より

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= \frac{(1-t)\vec{AB} + t\vec{AC}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{AB} + t\vec{AC} \\ &= (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$\therefore AD \perp BC$ より

$$\vec{AD} \cdot \vec{BC} = 0 \quad \text{つまり} \quad \textcircled{1} \text{より}$$

$$\begin{aligned}\vec{AD} \cdot \vec{BC} &= \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{AC} - \vec{AB}) \\ &= \{(1-t)\vec{b} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= (1-t)\vec{b} \cdot \vec{c} - (1-t)|\vec{b}|^2 \\ &\quad + t|\vec{c}|^2 - t\vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

(1)より ↓

$$\begin{aligned}&= (1-t) \cdot (-4) - (1-t) \cdot 4^2 \\ &\quad + t \cdot 2^2 - t \cdot (-4) \\ &= -4 + 4t - 16 + 16t \\ &\quad + 4t + 4t \\ &= 28t - 20\end{aligned}$$

$$\text{したがって } 28t - 20 = 0 \quad \therefore t = \frac{20}{28} = \frac{5}{7}$$

⑤ 点Pが直線BC上に存在するとき、線分APの中点をMとすると、Mは線分BCの中点Dと一致する。

$$\vec{AP} = (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

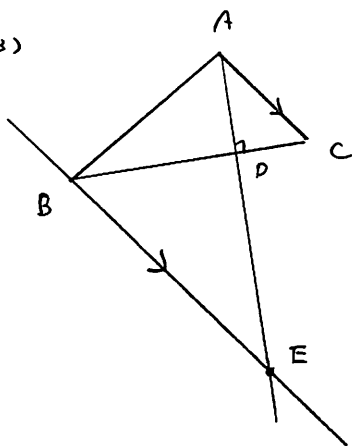
つまり

$$\begin{aligned}|\vec{AP}|^2 &= |(1-t)\vec{b} + t\vec{c}|^2 \\ &= (1-t)^2|\vec{b}|^2 + 2(1-t)t\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad + t^2|\vec{c}|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= (1-t)^2 \cdot 4^2 + 2(1-t)t(-4) \\ &\quad + t^2 \cdot 2^2 \\ &= 16(1-2t+t^2) - 8(t-t^2) + 4t^2 \\ &= 16t^2 - 32t + 16 - 8t + 8t^2 + 4t^2 \\ &= 28t^2 - 40t + 16 \\ &= 28\left(t^2 - \frac{10}{7}t\right) + 16 \\ &= 28\left\{\left(t - \frac{5}{7}\right)^2 - \left(\frac{5}{7}\right)^2\right\} + 16\end{aligned}$$

よって $t = \frac{5}{7}$ のとき、APは最小となる。

(3)



点Eは直線AD上に存在する。

$$\vec{AE} = k\vec{AD}$$

したがってkが存在する。(2)より $t = \frac{5}{7}$ であるから、①より

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= k\left\{(1-\frac{5}{7})\vec{b} + \frac{5}{7}\vec{c}\right\} \\ &= \frac{2}{7}k\vec{b} + \frac{5}{7}k\vec{c} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

また $AC \parallel BE$ であるから

$$\vec{BE} = s\vec{AC}$$

したがってsが存在する。

また

$$\begin{aligned}\vec{AE} &= \vec{AB} + \vec{BE} \\ &= \vec{AB} + s\vec{AC} \\ &= \vec{b} + s\vec{c} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

②、③より

$$\vec{b} \neq \vec{0}, \vec{c} \neq \vec{0}, \vec{b} \nparallel \vec{c}$$

であるから、 $\vec{AE}$ の表し方は

$$t = \frac{2}{7}k = 1$$

また $\vec{b}, \vec{c}$ の係数は

比較して

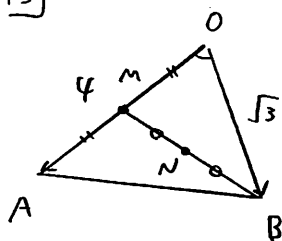
$$\begin{cases} \frac{2}{7}k = 1 & (\vec{b} \text{ の係数}) \\ \frac{5}{7}k = s & (\vec{c} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{よって } k = \frac{7}{2}, s = \frac{5}{2}$$

$$s = \frac{5}{2} \text{ は } \textcircled{3} \text{ より } t = 1 \text{ となる}$$

$$\vec{AE} = \vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$$

(13)



(1)

MはOAの中点であるから

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA} \quad \text{--- ①}$$

また、Nは線分OBの中点であり、内分点であるから

$$\vec{ON} = \frac{1}{2} (\vec{OM} + \vec{OB})$$

①を代入して

$$\begin{aligned} \vec{ON} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{OA} + \vec{OB} \right) \\ &= \frac{1}{4} \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{OB} \\ &= \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 4 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

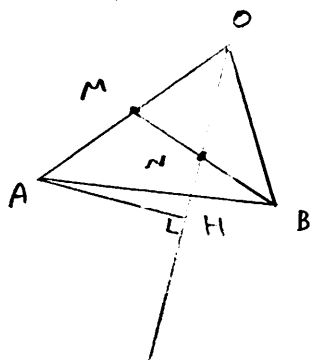
また

$$\begin{aligned} |\vec{ON}|^2 &= \left| \frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{4} (\vec{a} + 2\vec{b}) \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 |\vec{a} + 2\vec{b}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \{ 4^2 + 4 \times 4 + 4(\sqrt{3})^2 \} \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (16 + 16 + 12) \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \times 44 \end{aligned}$$

よって $|\vec{ON}| > 0$ であるから

$$|\vec{ON}| = \frac{1}{4} \sqrt{44} = \frac{1}{4} \times 2\sqrt{11} = \frac{\sqrt{11}}{2} \quad (\times 16)$$

(2)



点Hは直線ON上の点

であるから

$$\vec{OH} = k \vec{ON} \quad \text{--- ②}$$

このときkが存在する。

(1)の結果より

$$\begin{aligned} \vec{OH} &= k \left(\frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{4} k \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{b} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \vec{AH} &= \vec{OH} - \vec{OA} \\ &= \left(\frac{1}{4} k \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{b} \right) - \vec{a} \\ &= \left(\frac{1}{4} k - 1 \right) \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{b} \end{aligned}$$

が成り立つ。今、Hは点Aから

直線ONに下した垂線の足

であるから

$$\angle AHO = 90^\circ$$

が成り立つ。つまり

$$\vec{ON} \perp \vec{AH}$$

より

$$\vec{ON} \cdot \vec{AH} = 0$$

が成り立つ。

$$\left(\frac{1}{4} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) \cdot \left\{ \left(\frac{1}{4} k - 1 \right) \vec{a} + \frac{1}{2} k \vec{b} \right\} = 0$$

$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \{ (k-4)\vec{a} + 2k\vec{b} \} = 0$$

展開して

$$\begin{aligned} (k-4)(|\vec{a}|^2 + 2k\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ + 2(k-4)\vec{a} \cdot \vec{b} + 4k|\vec{b}|^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (k-4) \cdot 4^2 + 2k \cdot 4 \\ + 2(k-4) \cdot 4 + 4k(\sqrt{3})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16(k-4) + 8k \\ + 8(k-4) + 12k = 0 \end{aligned}$$

(÷4)

$$\begin{aligned} 4(k-4) + 2k \\ + 2(k-4) + 3k = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4k - 16 + 2k \\ + 2k - 8 + 3k = 0 \end{aligned}$$

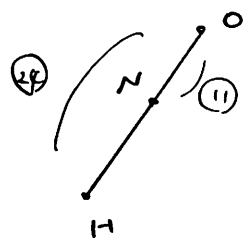
$$11k - 24 = 0$$

$$k = \frac{24}{11}$$

よって ②を代入して

$$\vec{OH} = \frac{24}{11} \vec{ON}$$

が成り立つ。よって

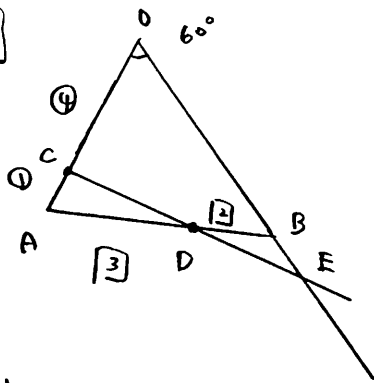


$$ON : OH = 11 : 24$$

よって

$$ON : NH = 11 : 13$$

14



$$\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b} \text{ あり}$$

$$\vec{OD} \text{ の } \vec{a}, \vec{b} \text{ (} \vec{a} \text{ は } t \text{ 倍, } \vec{b} \text{ は } 1 \text{ 倍)}$$

てみれば、①の両辺の

$$\vec{a}, \vec{b} \text{ の係数にそろえてやる$$

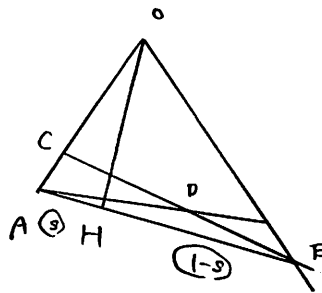
比較して

$$\begin{cases} \frac{2}{5} = \frac{4}{5}(1-t) & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{3}{5} = tk & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{上式より } 1 = 2(1-t) \text{ より } t = \frac{1}{2}$$

$$\text{下式より } \frac{3}{5} = \frac{1}{2}k \text{ より } k = \frac{6}{5}$$

(3)



Hは点Oから直線AEに

下3(1)で垂線をおくことができる

$$\vec{OH} \perp \vec{AE} \text{ であり } \vec{OH} \cdot \vec{AE} = 0$$

$$\therefore AH : HE = S : (1-S)$$

と表せる。内分公式より

$$\vec{OH} = \frac{(1-S)\vec{OA} + S\vec{OE}}{S + (1-S)}$$

(2)より

$$= (1-S)\vec{OA} + S\vec{OE}$$

$$= (1-S)\vec{a} + S \times \frac{6}{5}\vec{b}$$

$$= (1-S)\vec{a} + \frac{6}{5}S\vec{b} \dots (3)$$

より

$$\vec{OH} \cdot \vec{AE} = \left\{ (1-S)\vec{a} + \frac{6}{5}S\vec{b} \right\} \cdot (\vec{OE} - \vec{OA})$$

$$= \left\{ (1-S)\vec{a} + \frac{6}{5}S\vec{b} \right\} \cdot \left(\frac{6}{5}\vec{b} - \vec{a} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ 5(1-S)\vec{a} + 6S\vec{b} \right\} \cdot \frac{1}{5} (6\vec{b} - 5\vec{a})$$

$$= \frac{1}{25} \{ 30(1-S)\vec{a} \cdot \vec{b} - 25(1-S)|\vec{a}|^2 + 36S|\vec{b}|^2 - 30S\vec{a} \cdot \vec{b} \}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \text{ として}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \text{ として}$$

$$30(1-S) \times 10 - 25(1-S) \times 4^2 + 36S \times 5^2 - 30S \times 10 = 0$$

(100)

$$3(1-S) - 4(1-S)$$

$$+ 9S - 3S = 0$$

$$3 - 3S - 4 + 4S$$

$$+ 9S - 3S = 0$$

$$7S - 1 = 0$$

$$S = \frac{1}{7}$$

②より

$$\vec{OH} = \left(1 - \frac{1}{7}\right)\vec{a} + \frac{6}{5} \times \frac{1}{7}\vec{b}$$

$$= \frac{6}{7}\vec{a} + \frac{6}{35}\vec{b}$$

(1) 内分の公式より

$$\vec{OD} = \frac{2\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+2}$$

$$= \frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{3}{5}\vec{OB}$$

$$= \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$$

また

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$= 4 \times 5 \times \cos 60^\circ$$

$$= 4 \times 5 \times \frac{1}{2}$$

$$= 10$$

(2)

$$\vec{OE} = k\vec{OB} \text{ と表せる}$$

点Dが線分CEを $t:(1-t)$

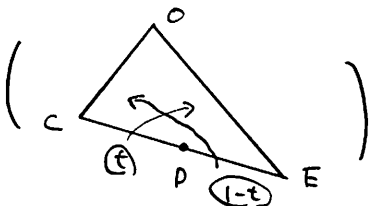
1:内分するとして、内分公式より

$$\vec{OD} = \frac{(1-t)\vec{OC} + t\vec{OE}}{t + (1-t)}$$

$$= (1-t)\vec{OC} + t\vec{OE}$$

$$= (1-t) \times \frac{4}{5}\vec{OA} + t \times k\vec{OB}$$

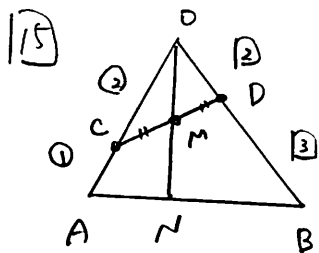
$$= \frac{4}{5}(1-t)\vec{a} + tk\vec{b}$$



(1) の結果より

$$\vec{OD} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} \text{ とおいて}$$

$$\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} = \frac{4}{5}(1-t)\vec{a} + tk\vec{b} \dots (1)$$



また.

$$\begin{aligned} AN:NB &= \frac{3}{8} \cdot (1 - \frac{3}{8}) \\ &= \frac{3}{8} : \frac{5}{8} = 3:5 \end{aligned}$$

また.

$$\begin{aligned} \vec{OB} \cdot \vec{CD} &= \vec{OB} \cdot (\vec{OD} - \vec{OC}) \\ &= \vec{b} \cdot (\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}) \\ &= \frac{2}{5}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{2}{5} \cdot 5^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 10 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

(1)

$$\vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{OA}, \quad \vec{OD} = \frac{2}{5}\vec{OB}$$

これから $\triangle OCD$ は...

(重心の公式より)

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) \\ &= \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} \end{aligned}$$

(重心の公式より)

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB} \\ &= \frac{5}{15}\vec{OA} + \frac{3}{15}\vec{OB} \\ &= \frac{5}{15} \times \frac{5\vec{OA} + 3\vec{OB}}{8} \\ &= \frac{8}{15} \times \frac{5\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+5} \end{aligned}$$

$$\text{これから、7より、} \vec{ON} = \frac{5\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+5}$$

これから $AN:NB = 3:5$ になる。

$$\vec{OM} = \frac{8}{15}\vec{ON} \quad \text{より } k = \frac{15}{8} \quad \text{になる。}$$

(7より)

$$\frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = 10$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15$$

(2)

$$\vec{ON} = k\vec{OM} \quad \text{だから}$$

$$\vec{ON} = k(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b})$$

$$= \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{5}k\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また } AN:NB = t:(1-t)$$

だから $\triangle OAB$ の重心の公式より

$$\vec{ON} = \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}}{t + (1-t)}$$

$$= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}$$

$$= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

また $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \nparallel \vec{b}$ である。

$\vec{ON}$ の表し方から $t = \frac{1}{3}k$ となる。

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k = 1-t & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{5}k = t & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

解いて

$$k = \frac{15}{8}, \quad t = \frac{3}{8}$$

$$t = \frac{3}{8} \textcircled{2} \text{より}$$

$$\vec{ON} = (1 - \frac{3}{8})\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b} = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{3}{8}\vec{b}$$

(3)

$$OB = 5 \text{ より } |\vec{b}| = 5$$

また $AB = 7$ である。

$$|\vec{AB}| = 7$$

$$\text{つまり } \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \text{ より}$$

$$|\vec{OB} - \vec{OA}| = 7$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = 7$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 49$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = 49$$

$$|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 49$$

$$|\vec{b}| = 5 \text{ より}$$

$$5^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 49$$

つまり

$$25 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 49$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 24 \quad \dots \textcircled{3}$$

よって $OB \perp CD$ である。

$$\vec{OB} \cdot \vec{CD} = 0 \text{ である。}$$

$$|\vec{a}|^2 - 2 \times 15 = 24$$

$$|\vec{a}|^2 - 30 = 24$$

$$|\vec{a}|^2 = 54$$

$$|\vec{a}| = \pm \sqrt{54} = \pm 3\sqrt{6}$$

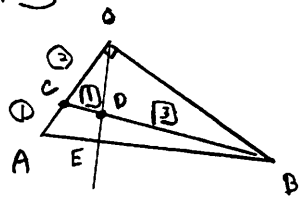
$$|\vec{a}| = \pm \sqrt{54} = \pm 3\sqrt{6}$$

$$\therefore |\vec{a}| > 0 \text{ である。}$$

$$|\vec{a}| = 3\sqrt{6}$$

$$\text{つまり } OA = 3\sqrt{6}$$

16



(1)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ \\ &= 1 \times 2 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}|\vec{b} - \vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 \\ &= 2^2 - 2 \times 0 + 1^2 \\ &= 4 + 1 = 5\end{aligned}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| \geq 0 \text{ より}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{5}$$

(2)

$$\vec{OC} = \frac{2}{3}\vec{OA} \text{ であり}$$

$\triangle OCB$ において、 $\vec{OD}$ は $\vec{OB}$ の中点より

$$\vec{OD} = \frac{3\vec{OC} + 1\vec{OB}}{1+3}$$

$$= \frac{3}{4}\vec{OC} + \frac{1}{4}\vec{OB}$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$$

よって、3点 O, D, E は $\vec{OE}$ の延長上
の点である。

$$\vec{OE} = t\vec{OD}$$

したがって、 t が存在する。

よって

$$\vec{OE} = t \left(\frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} \right)$$

$$= \frac{1}{2}t\vec{OA} + \frac{1}{4}t\vec{OB} \quad \dots \textcircled{1}$$

また、 $AE = EB = t : (1-t)$ とおく

内分公式より

$$\vec{OE} = \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}}{t + (1-t)} = (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \vec{OA} \neq \vec{OB} \text{ より } \vec{OE} \neq \vec{OB}$$

$$\vec{OA} \neq \vec{OB} \text{ より } t \text{ は } 0 \text{ ではない}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}t = 1-t & (\vec{OA} \text{ の成分}) \\ \frac{1}{4}t = t & (\vec{OB} \text{ の成分}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } t = \frac{2}{3}, \quad t = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{2} \text{ に } t = \frac{1}{3} \text{ を代入して}$$

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \left(1 - \frac{1}{3}\right)\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} \\ &= \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} \\ &= \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{4} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3} \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{1+2}\end{aligned}$$

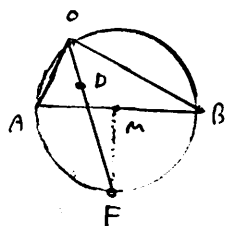
したがって、 $t = \frac{3}{4}$

$$\vec{OE} = \frac{2\vec{OA} + \vec{OB}}{3}$$

$$\text{つまり、} \vec{OD} = \frac{3}{4}\vec{OE}$$

つまり、 O, D, E は $\vec{OE}$ の延長上

(3)



3点 O, D, F は $\vec{OF}$ の延長上

の点である。

$$\vec{OF} = s\vec{OD}$$

したがって、 s が存在する。

ただし、 F は原点 O と異なる

ので、 $s \neq 0$ である。

よって

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= s \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{2}s\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

また、 $\triangle OAB$ の中点 M をとると

$\angle AOB = 90^\circ$ である。したがって、 $\triangle OAB$ は
 $\triangle OAB$ の外接円の直径である。

(つまり、点 M は $\triangle OAB$ の中心
である。)

(1) より $|\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{5}$ 、つまり $AB = \sqrt{5}$
である。したがって、円の半径は $\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

また、 $\triangle OAB$ の外接円の半径は

$$\frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|\vec{OM}| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|\vec{OM} - \vec{OF}| = \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \dots \textcircled{4}$$

また、 M は $\triangle OAB$ の中点

である。したがって、 $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ である。

よって、 $\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ に代入して

$$\left| \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \left(\frac{1}{2}s\vec{a} + \frac{1}{4}s\vec{b} \right) \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(4)

$$|2\vec{a} + 2\vec{b} - 2s\vec{a} - s\vec{b}| = 2\sqrt{5}$$

$$|2(1-s)\vec{a} + (2-s)\vec{b}| = 2\sqrt{5}$$

両辺2乗して

$$|2(1-s)\vec{a} + (2-s)\vec{b}|^2 = 20$$

$$\begin{aligned}4(1-s)^2|\vec{a}|^2 + 4(1-s)(2-s)\vec{a} \cdot \vec{b} \\ + (2-s)^2|\vec{b}|^2 = 20\end{aligned}$$

$$|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ を代入して}$$

$$4(1-s)^2 \cdot 1^2 + (2-s)^2 \cdot 2^2 = 20$$

(5)

$$(1-s)^2 + (2-s)^2 = 5$$

$$1 - 2s + s^2 + 4 - 4s + s^2 = 5$$

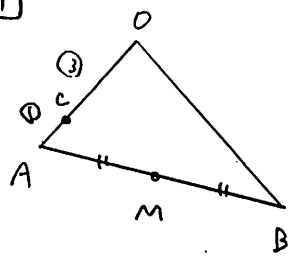
$$2s^2 - 6s = 0$$

$$2s(s-3) = 0 \text{ より } s = 0, 3$$

$$s \neq 0 \text{ より } s = 3 \text{ を代入して}$$

$$\vec{OF} = \frac{1}{2} \times 3 \vec{a} + \frac{1}{4} \times 3 \vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

17



(11)

$$\vec{OC} = \frac{3}{4}\vec{OA} = \frac{3}{4}\vec{a}$$

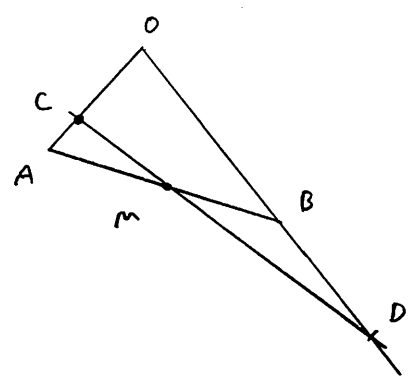
中点の公式より

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$$

で表す

$$\begin{aligned}\vec{CM} &= \vec{OM} - \vec{OC} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{3}{4}\vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} \\ &= -\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

(12)



3点 C, M, D は同一直線上に

ある

$$\vec{CD} = t\vec{CM}$$

これを代入して整理する

より

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OC} + \vec{CD} \\ &= \vec{a} + t\vec{CM} \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} + t(-\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) \\ &= \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}t\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b}\end{aligned}$$

$$= (\frac{3}{4} - \frac{1}{4}t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} \quad \text{①}$$

$$-\vec{OC} = k\vec{b} \quad \text{②}$$

とあるから $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

$\vec{a} \neq \vec{b}$ であるから ①と②より

比較して

$$\begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t = 0 & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{2}t = k & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } t = 3, k = \frac{3}{2}$$

(18)

△OAB と直線 (M) は平行

メネラウスの定理より

$$\frac{OC}{CA} \times \frac{AM}{MB} \times \frac{BD}{DO} = 1$$

が成り立つ。

$$OC:CA = 3:1 \text{ より } \frac{OC}{CA} = \frac{3}{1}$$

$$AM:MB = 1:1 \text{ より } \frac{AM}{MB} = \frac{1}{1}$$

代入して

$$\frac{3}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{BD}{DO} = 1$$

$$\text{より } \frac{BD}{DO} = \frac{1}{3}$$

より $BD:DO = 1:3$ が成り立つ。

(1)より (2)より

$$OB:OD = 2:3$$

とあるから

$$\vec{OD} = \frac{3}{2}\vec{OB}$$

$$\text{つまり } \vec{OD} = \frac{3}{2}\vec{b} \text{ より } k = \frac{3}{2}$$

(3)

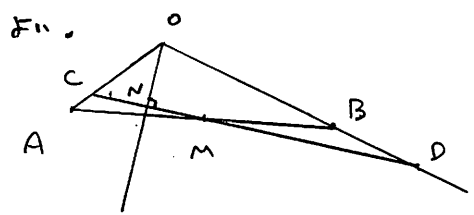
内積の公式より

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 3 \times 5 \times \cos \angle AOB\end{aligned}$$

で表す $\cos \angle AOB$ を求める

$|\vec{a}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求める

より



中点の公式より

$$\begin{aligned}\vec{ON} &= \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OM}) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) = \frac{5}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\end{aligned}$$

$$-\vec{OC} = \frac{3}{4}\vec{a}, \vec{OD} = \frac{3}{2}\vec{b} \text{ より}$$

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a}$$

で表す。 $ON \perp CD$ であるから

$$\vec{ON} \cdot \vec{CD} = 0$$

より

$$\vec{ON} \cdot \vec{CD} = \left(\frac{5}{8}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{a} \right)$$

$$= \frac{1}{8}(5\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot \frac{3}{4}(2\vec{b} - \vec{a})$$

$$= \frac{3}{32}(10\vec{a} \cdot \vec{b} - 5|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$= \frac{3}{32}(-5|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2)$$

$$= \frac{3}{32}(-5 \times 3^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 5^2)$$

$$= \frac{3}{32}(8\vec{a} \cdot \vec{b} + 55) = 0$$

$$\text{より } 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 55 = 0$$

$$\text{つまり } \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{55}{8} \text{ であるから}$$

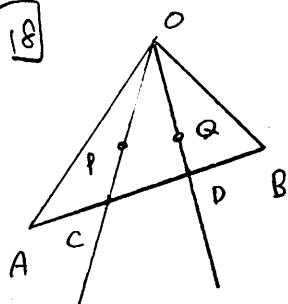
で代入して

$$8 \times 15 \cos \angle AOB = -55$$

$$8 \times 3 \cos \angle AOB = -11$$

$$\cos \angle AOB = -\frac{11}{24}$$

18



(1)

AC:CB = 1:2 であるから

内分点の公式より

$$\vec{OC} = \frac{2\vec{OA} + 1\vec{OB}}{1+2}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

よって $\vec{OP} = x\vec{OC}$ より

$$\vec{OP} = x\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b}$$

(2) 同様

AD:DB = 2:1 であるから

内分点の公式より

$$\vec{OD} = \frac{1\vec{OA} + 2\vec{OB}}{2+1}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

よって $\vec{OD} = y\vec{OB}$ より

$$\vec{OQ} = y\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{2}{3}y\vec{b}$$

(3)

重心の公式より

$\triangle OPQ$ の重心を G とすると

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OB})$$

これを (1) と (2) の式より

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b}\right) + \left(\frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{2}{3}y\vec{b}\right) + \vec{OB}\right\}$$

$$= \frac{2}{9}x\vec{a} + \frac{1}{9}x\vec{b} + \frac{1}{9}y\vec{a} + \frac{2}{9}y\vec{b}$$

$$= \left(\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y\right)\vec{b}$$

$$= \left(\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y\right)\vec{OA} + \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y\right)\vec{OB} \dots (*)$$

よって、点 G が直線 AB 上にあるから (*) より

$$\left(\frac{2}{9}x + \frac{1}{9}y\right) + \left(\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}y\right) = 1$$

$$(\vec{OA} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$$

$$\frac{3}{9}x + \frac{3}{9}y = 1$$

$$(*) \quad x + y = 3 \quad \text{より} \quad y = 3 - x$$

(3)

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$= \left(\frac{1}{3}y\vec{a} + \frac{2}{3}y\vec{b}\right) - \left(\frac{2}{3}x\vec{a} + \frac{1}{3}x\vec{b}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{3}y - \frac{2}{3}x\right)\vec{a} + \left(\frac{2}{3}y - \frac{1}{3}x\right)\vec{b}$$

(2) の結果を代入して

$$\vec{PQ} = \frac{1}{3}\{(3-x) - 2x\}\vec{a} + \frac{1}{3}\{2(3-x) - x\}\vec{b}$$

$$= \frac{1}{3}(3-3x)\vec{a} + \frac{1}{3}(6-3x)\vec{b}$$

$$= (1-x)\vec{a} + (2-x)\vec{b}$$

よって

$$|\vec{PQ}|^2 = |(1-x)\vec{a} + (2-x)\vec{b}|^2$$

$$= (1-x)^2|\vec{a}|^2 + 2(1-x)(2-x)\vec{a} \cdot \vec{b} + (2-x)^2|\vec{b}|^2$$

$$= (1-x)^2 \times 2^2 + 2(1-x)(2-x) \times \frac{1}{2}$$

$$+ (2-x)^2 \times 1^2$$

$$= 4(1-2x+x^2) + (2-3x+x^2) + (4-4x+x^2) = 6x^2 - 5x + 10$$

$$= 6\left(x^2 - \frac{5}{2}x\right) + 10$$

$$= 6\left\{\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} + 10$$

$$= 6\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{5}{8}$$

$$\therefore x > 0, y > 0$$

$$\therefore x > 0, 3-x > 0$$

$$\therefore 0 < x < 3$$

よって $|\vec{PQ}|^2$ は

$$x = \frac{5}{4} \text{ のとき}$$

最小値をとる。

$$PQ > 0 \therefore x=0 \quad x=3$$

より、PQ は

$$x = \frac{5}{4} \text{ のとき最小値をとる。}$$

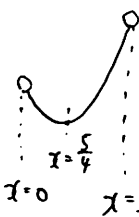
$$\therefore y = 3 - x$$

$$= 3 - \frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

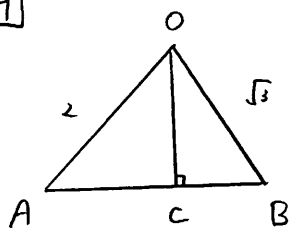
よって PQ は

最小値は $x = \frac{5}{4}, y = \frac{7}{4}$ のとき

$$x = \frac{5}{4}, y = \frac{7}{4}$$



19



(1)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= t \vec{AB} \quad t \text{ は実数} \\ \vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \\ &= \vec{OA} + t \vec{AB} \\ &= \vec{OA} + t(\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \vec{OA} - t\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

と仮定。 \$\therefore OC \perp AB\$ より

$$\vec{OC} \cdot \vec{AB} = 0 \quad \text{である。}$$

$$\begin{aligned}\vec{OC} \cdot \vec{AB} &= \vec{OC} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - (1-t)|\vec{a}|^2 \\ &\quad + t|\vec{b}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= (1-t) \times 2 - (1-t) \times 2^2 \\ &\quad + t(\sqrt{3})^2 - t \times 2 \\ &= 2 - 2t - 4 + 4t \\ &\quad + 3t - 2t \\ &= -2 + 3t = 0\end{aligned}$$

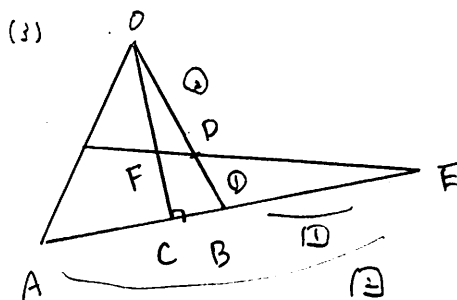
$$3t - 2 = 0 \quad \text{より}$$

$$t = \frac{2}{3}$$

(3)

$$\vec{AC} = t \vec{AB} \quad \text{と仮定。}$$

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OB} \quad (1) \\ \text{仮定} &= \text{仮定} \quad \text{と仮定。} \\ AC : CB &= t : (1-t) \\ \text{と仮定} &= \text{仮定} \quad \text{と仮定。}\end{aligned}$$



$$(+) \text{より } t = \frac{2}{3} \text{ である。}$$

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= (1 - \frac{2}{3})\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

である。 \$\therefore\$ 3点 O, F, C

は同一直線上の点である。

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= k \vec{OC} \quad \text{と仮定。} \\ \text{存在する。} &\text{より}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= k(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}) \\ &= \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{2}{3}k\vec{b} \quad \text{①}\end{aligned}$$

また、3点 F, D, E は同一直線上

にある。

$$\vec{EF} = s \vec{ED}$$

と仮定。 \$s\$ が存在する。

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \vec{OE} + \vec{EF} \\ \text{より}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \vec{OE} + s \vec{ED} \\ &= \vec{OE} + s(\vec{OD} - \vec{OE}) \\ &= (1-s)\vec{OE} + s\vec{OD}\end{aligned}$$

\$\therefore\$ F は線分 AB の

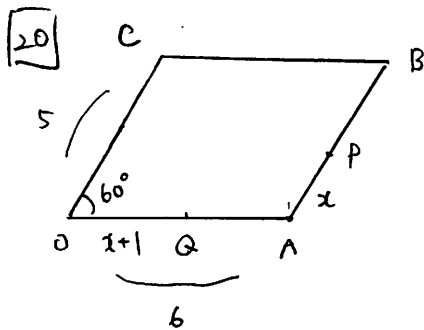
\$2:1\$ の分点である。

$$\vec{OF} = \frac{(-1)\vec{OA} + 2\vec{OB}}{2-1} = -\vec{OA} + 2\vec{OB}$$

また、D は OB の \$2:1\$ の分点である。

$$\vec{OD} = \frac{2}{3}\vec{OB} \quad \text{である。}$$

したがって



(1) $AB = OC = 5$ であるから

$AP = AB = x = 5$

より

$$\vec{AP} = \frac{x}{5} \vec{AB}$$

よって、

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \vec{OA} + \vec{AP} \\ &= \vec{OA} + \frac{x}{5} \vec{AB} \\ &= \vec{OA} + \frac{x}{5} \vec{OC} \\ &= \vec{a} + \frac{x}{5} \vec{c} \end{aligned}$$

同様にして、

$OQ : OA = (x+1) : 6$

より

$$\vec{OQ} = \frac{x+1}{6} \vec{OA}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \vec{CQ} &= \vec{CO} + \vec{OQ} \\ &= (-\vec{OC}) + \vec{OQ} \\ &= -\vec{OC} + \frac{x+1}{6} \vec{OA} \\ &= -\vec{c} + \frac{x+1}{6} \vec{a} \end{aligned}$$

(2)

$OP \perp CQ$ であるから

$\vec{OP} \cdot \vec{CQ} = 0$ であるから、

より (1) の結果より

$$\vec{OP} \cdot \vec{CQ} = \left(\vec{a} + \frac{x}{5} \vec{c} \right) \cdot \left(\frac{x+1}{6} \vec{a} - \vec{c} \right)$$

$$= \frac{x+1}{6} |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{x(x+1)}{30} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{x}{5} |\vec{c}|^2 \quad \text{OR: } RP = s : (1-s)$$

$\therefore |\vec{a}| = OA = 6, |\vec{c}| = OC = 5$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{c} &= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \angle AOC \\ &= 6 \times 5 \times \cos 60^\circ \\ &= 6 \times 5 \times \frac{1}{2} = 15 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{6} \times 6^2 - 15 + \frac{x(x+1)}{30} \times 15 - \frac{x}{5} \times 5^2 \\ &= 6(x+1) - 15 + \frac{1}{2}x(x+1) - 5x \\ &= 6x + 6 - 15 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 5x \\ &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 9 = 0 \end{aligned}$$

(x) $x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x+6)(x-3) = 0$

$x = -6, 3$

$\therefore x \geq 0$ であるから、 $x = 3$ である。P, Q の位置

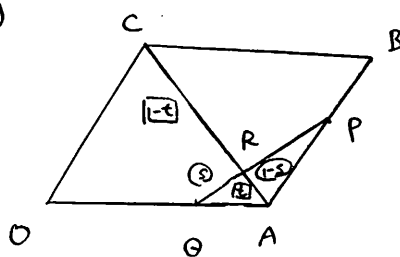
は AB, AC 上にあるから、

$0 \leq x \leq 5$ であるから、

$x = 3$ は、この範囲内であるから、

$x = 3$

(3)



$AR : RC = t : (1-t)$ であるから、

$\triangle OAC$ において、

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OC}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OC} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{c} \quad \text{--- (1)} \end{aligned}$$

また、 $\triangle OAP$ において、

内分点の位置より

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \frac{(1-s)\vec{OA} + s\vec{OP}}{s + (1-s)} \\ &= (1-s)\vec{OA} + s\vec{OP} \end{aligned}$$

(1) の結果より

$$\vec{OP} = \vec{a} + \frac{3}{5} \vec{c}$$

$$\vec{OR} = \frac{3+1}{6} \vec{a} = \frac{2}{3} \vec{a}$$

したがって

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= (1-s) \times \frac{2}{3} \vec{a} + s \left(\vec{a} + \frac{3}{5} \vec{c} \right) \\ &= \frac{2}{3}(1-s) \vec{a} + s \vec{a} + \frac{3}{5} s \vec{c} \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}s + s \right) \vec{a} + \frac{3}{5} s \vec{c} \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}s \right) \vec{a} + \frac{3}{5} s \vec{c} \quad \text{--- (2)} \end{aligned}$$

(1), (2) より $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b}$

であるから

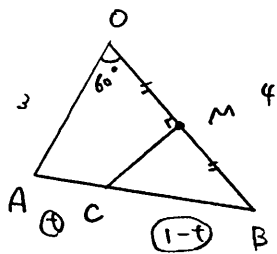
$$\begin{cases} 1-t = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}s \\ t = \frac{3}{5}s \end{cases}$$

したがって $s = \frac{5}{14}, t = \frac{3}{14}$

(1) $t = \frac{3}{14}$ であるから

$$\begin{aligned} \vec{OR} &= \left(1 - \frac{3}{14} \right) \vec{a} + \frac{3}{14} \vec{c} \\ &= \frac{11}{14} \vec{a} + \frac{3}{14} \vec{c} \end{aligned}$$

21



(1)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 3 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ &= 3 \times 4 \times \frac{1}{2} \\ &= 6\end{aligned}$$

(2)

$$AC = CB = t : (1-t) \text{ とおく}$$

$\triangle OAB$ の内分点公式より

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OB}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \\ &= (1-t)\vec{a} + t\vec{b}\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{CM} &= \vec{OM} - \vec{OC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{OB} - \vec{OC} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} - \{(1-t)\vec{a} + t\vec{b}\} \\ &= -(1-t)\vec{a} + (\frac{1}{2}-t)\vec{b} \\ &= (t-1)\vec{a} + (\frac{1}{2}-t)\vec{b}\end{aligned}$$

よって $CM \perp OB$ より

$$\vec{CM} \cdot \vec{OB} = 0 \text{ が成り立つ。}$$

よって

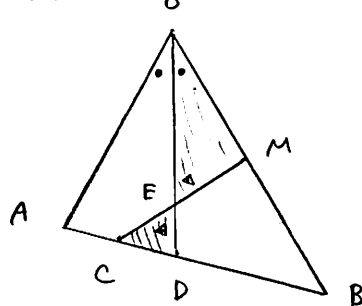
$$\begin{aligned}\vec{CM} \cdot \vec{OB} &= \{(t-1)\vec{a} + (\frac{1}{2}-t)\vec{b}\} \cdot \vec{b} \\ &= (t-1)\vec{a} \cdot \vec{b} + (\frac{1}{2}-t)|\vec{b}|^2 \\ &= (t-1) \cdot 6 + (\frac{1}{2}-t) \cdot 4^2 \\ &= 6t - 6 + 8 - 16t \\ &= -10t + 2 = 0\end{aligned}$$

$$\therefore 10t = 2 \text{ より } t = \frac{1}{5}$$

よって

$$\begin{aligned}AC : CB &= \frac{1}{5} : (1 - \frac{1}{5}) \\ &= \frac{1}{5} : \frac{4}{5} = 1 : 4\end{aligned}$$

(3)



(2) の結果より

$$AC = CB = 1 : 4 \text{ より}$$

また、 OD は $\angle AOB$ の二等分線
より

$$\begin{aligned}AD : DB &= OA : OB \\ &= 3 : 4\end{aligned}$$

が成り立つ。

対頂角が等しいので

$$\angle OEM = \angle CED$$

よって $\triangle CDE$ と $\triangle OEM$

の面積比を求めると

$$CE : EM \text{ と } OE : ED$$

を求めよ。

3点 O, E, D は一直線上の

点である。

$$\vec{OE} = k \vec{OD}$$

よって求めるべき値は

$$AD : DB = 3 : 4 \text{ より}$$

(内分点公式より)

$$\vec{OD} = \frac{4\vec{OA} + 3\vec{OB}}{3+4} = \frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}\vec{OB}$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= k \left(\frac{4}{7}\vec{OA} + \frac{3}{7}\vec{OB} \right) \\ &= \frac{4k}{7}\vec{a} + \frac{3k}{7}\vec{b} \quad \text{--- ①}\end{aligned}$$

$$\text{また } CE : EM = s : (1-s)$$

よって $\triangle OCM$ において
内分点公式より

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{(1-s)\vec{OC} + s\vec{OM}}{s + (1-s)} \\ &= (1-s)\vec{OC} + s\vec{OM}\end{aligned}$$

$$\therefore AC : CB = 1 : 4 \text{ より}$$

$$\vec{OC} = \frac{4\vec{OA} + 1\vec{OB}}{1+4} = \frac{4}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB}$$

よって

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= (1-s) \left(\frac{4}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB} \right) + s \cdot \frac{1}{2}\vec{OB} \\ &= \frac{4}{5}(1-s)\vec{a} + \left\{ \frac{1}{5}(1-s) + \frac{1}{2}s \right\} \vec{b} \\ &= \frac{4}{5}(1-s)\vec{a} + \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}s \right) \vec{b} \quad \text{--- ②}\end{aligned}$$

①, ②より $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}, \vec{a} \neq \vec{b}$ より

$$\begin{cases} \frac{4}{7}k = \frac{4}{5}(1-s) \\ \frac{3}{7}k = \frac{1}{5} + \frac{3}{10}s \end{cases}$$

$$\text{よって } s = \frac{4}{9}, k = \frac{7}{9}$$

$$\text{よって } k = \frac{7}{9} \text{ より } \vec{OE} = \frac{7}{9}\vec{OD}$$

$$\therefore OE : ED = 7 : 2$$

$$\begin{aligned}s = \frac{4}{9} \text{ より } CE : EM &= \frac{4}{9} : (1 - \frac{4}{9}) \\ &= 4 : 5\end{aligned}$$

$$\triangle CDE : \triangle OEM$$

$$= \frac{1}{2} \times CE \times ED \sin \theta : \frac{1}{2} \times EM \times OE \sin \theta$$

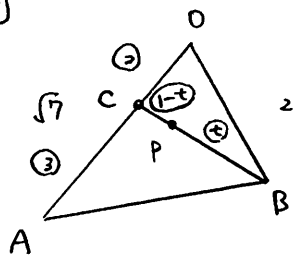
$$= CE \times ED : EM \times OE$$

$$= CE \times ED : \frac{5}{4}CE \times \frac{7}{2}ED$$

$$= 1 : \frac{5}{4} \times \frac{7}{2}$$

$$= 1 : \frac{35}{8} = 8 : 35$$

22



(1)

$OC:CA = 2:3$ である。

$$\vec{OC} = \frac{2}{5}\vec{OA} + \frac{1}{5}\vec{OB}$$

$\triangle OCB$ において、内分点の公式より

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{t\vec{OC} + (1-t)\vec{OB}}{(1-t) + t} \\ &= t\vec{OC} + (1-t)\vec{OB} \\ &= t \times \frac{2}{5}\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} \\ &= \frac{2}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}\end{aligned}$$

(2)

$$\vec{OP} \perp \vec{AB} \text{ より } \vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$$

より

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{AB} &= \vec{OP} \cdot (\vec{OB} - \vec{OA}) \\ &= \left\{ \frac{2}{5}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= \frac{2}{5}t\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{2}{5}t|\vec{a}|^2 \\ &\quad + (1-t)|\vec{b}|^2 - (1-t)\vec{a} \cdot \vec{b}\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{a}| = OA = \sqrt{7}, |\vec{b}| = OB = 2$$

$$\text{また } \angle C \text{ は鋭角より } \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \text{ であるから}$$

代入して

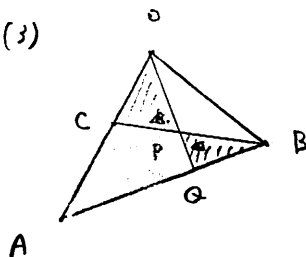
$$\frac{2}{5}t + 1 - \frac{2}{5}t(\sqrt{7})^2 + (1-t) \times 2^2 - (1-t) \times 1$$

$$= \frac{2}{5}t - \frac{14}{5}t + 4 - 4t - 1 + t$$

$$= -\frac{22}{5}t + 3 = 0$$

$$\frac{22}{5}t = 3 \text{ より } t = \frac{15}{22} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{9}$$

(3)



$$(1) \text{ の結果より } t = \frac{5}{9}$$

であるから、(1) より

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{2}{5} \times \frac{5}{9}\vec{a} + \left(1 - \frac{5}{9}\right)\vec{b} \\ &= \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} \\ &= \frac{2}{9}\vec{OA} + \frac{4}{9}\vec{OB}\end{aligned}$$

より、3点 O, P, Q は同一直線上の点である。

$$\vec{OQ} = k\vec{OP}$$

と仮定する。

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= k \left(\frac{2}{9}\vec{OA} + \frac{4}{9}\vec{OB} \right) \\ &= \frac{2}{9}k\vec{OA} + \frac{4}{9}k\vec{OB} \quad (*)\end{aligned}$$

よって (*) により、3点 A, Q, B は

同一直線上の点である。

$$\frac{2}{9}k + \frac{4}{9}k = 1$$

$$(\vec{OA} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) = 1$$

が成り立つ。

$$\text{より解いて } k = \frac{3}{2}$$

よって (*) により

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \frac{2}{9} \times \frac{3}{2}\vec{OA} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{2}\vec{OB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\text{また } \angle BPQ = \angle CPQ = 0$$

である。

$$\triangle BPQ : \triangle OCP$$

$$= \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot BP \cdot \sin \theta : \frac{1}{2} \cdot OP \cdot CP \cdot \sin \theta$$

$$= PQ \times BP : OP \times CP \quad (**)$$

と仮定。(2) の結果より

$$t = \frac{5}{9}$$

$$BP : PC = \frac{5}{9} : \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{5}{9} : \frac{4}{9} = 5 : 4$$

$$\text{より } PC = \frac{4}{5}BP$$

が成り立つ。また $k = \frac{3}{2}$ より

$$\vec{OQ} = \frac{3}{2}\vec{OP}$$

$$\text{より } OP : PQ = 2 : 1$$

$$\text{であるから } OP = 2PQ$$

が成り立つ。

この結果を (**) に代入して

$$\triangle BPQ : \triangle OCP$$

$$= PQ \times BP : \frac{2PQ}{2} \times \frac{4}{5}BP$$

$$= 1 : 2 \times \frac{4}{5}$$

$$= 1 : \frac{8}{5}$$

$$= 5 : 8$$

(4)

QQ は底辺と平行

$$\triangle BPQ : \triangle BOP = PQ : OP$$

$$= 1 : 2$$

$$\text{より } \triangle BPQ = \frac{1}{2}\triangle BOP \quad \text{①}$$

BC は底辺と平行

$$\triangle OCP : \triangle OPB = CP : PB$$

$$= 4 : 5$$

$$\text{より } \triangle OCP = \frac{4}{5}\triangle OPB \quad \text{②}$$

①②より

$$\begin{aligned}\triangle BPQ : \triangle OCP &= \frac{1}{2}\triangle BOP : \frac{4}{5}\triangle OPB \\ &= \frac{1}{2} : \frac{4}{5} = 5 : 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad \vec{AM} &= \vec{OM} - \vec{OA} \\ &= \frac{1}{2}\vec{OB} - \vec{OA} \\ &= \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ \\ &= 1 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ &= 1 \times 3 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

内分の公式より

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= \frac{(1-t)\vec{OA} + t\vec{OM}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{OA} + t\vec{OM} \\ &= (1-t)\vec{a} + t \cdot \frac{1}{2}\vec{b} \\ &= (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} \quad \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\vec{OH} \cdot \vec{AM} = 0 \quad \text{"\(\perp\)"}$$

$$\begin{aligned}\vec{OH} \cdot \vec{AM} &= \left\{ (1-t)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} \right) \\ &= \frac{1}{2}(1-t)\vec{a} \cdot \vec{b} - (1-t)|\vec{a}|^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}t|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}t\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{2}(1-t) \times \frac{3}{2} - (1-t) \times 1^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}t \times 3^2 - \frac{1}{2}t \times \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}t - 1 + t + \frac{9}{4}t - \frac{3}{4}t \\ &= \frac{2}{4}t - \frac{1}{4} = 0 \\ \text{also } \frac{2}{4}t &= \frac{1}{4} \text{ so } t = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\vec{OH} = (1 - \frac{1}{7}) \vec{a} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} \vec{b}$$

$$= \frac{6}{7} \vec{a} + \frac{1}{14} \vec{b}$$

(2) の結果より

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= s\left(\frac{6}{7}\vec{a} + \frac{1}{14}\vec{b}\right) \\ &= \frac{6}{7}s\vec{a} + \frac{1}{14}s\vec{b} \dots (2)\end{aligned}$$

$$\vec{BF} = u \vec{BC}$$

∴ 点 C 在 圆上. OA ⊥ 平行于
直径 AB 与 OB 的交点为 D 与 E.

$$\angle AOB = 60^\circ \text{ 7 } \angle C = 2 \pi / 3.$$

$\triangle BCD$ は正三角形であり、

④角形 $OACD$ は平行四辺形になる。

$$\begin{aligned} 5.7 \quad \vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} \\ &= \vec{OA} - \vec{OB} \\ &= \vec{OA} - \frac{1}{3}\vec{OB} \\ &= \vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\vec{OK} = \vec{OB} + \vec{BK}$$

$$= \vec{OB} + u \vec{BC}$$

$$= \vec{b} + u(\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b})$$

$$= u\vec{a} + (1 - \frac{1}{3}u)\vec{b} \quad \dots (3)$$

$$\begin{cases} \frac{6}{7}S = u \\ \frac{1}{14}S = 1 - \frac{1}{3}u \end{cases}$$

$$\text{7.11.7 } S = \frac{14}{7}, u = \frac{12}{5}$$

$$u = \frac{12}{5} z \quad (3) \quad 1 = \int t' \lambda \quad 1, 2$$

$$\vec{OF} = \frac{12}{5} \vec{a} + (1 - \frac{1}{3} \times \frac{12}{5}) \vec{b}$$

$$= \frac{12}{5} \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{b}$$

$\vec{OE} = 3\vec{OA}$ である点 E をとり
 $\triangle OBE$ は 正三角形 になる。

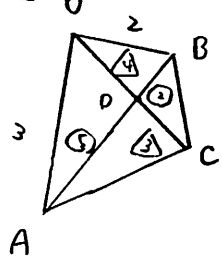
$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \frac{6}{7} S \vec{OA} + \frac{1}{14} S \vec{OB} \\ &= \frac{2}{7} S \times 3 \vec{OA} + \frac{1}{14} S \vec{OB} \\ &= \frac{2}{7} S \vec{OE} + \frac{1}{14} S \vec{OB}\end{aligned}$$

3. 点 E, B, F 在一直线上且

$$\frac{2}{7}S + \frac{1}{14}S = 1$$

Ex: $S = \frac{14}{5}$ (14/500)

[24]



(1) $\triangle OAB$ は鈍角

$$AD:DB = 5:2 \text{ であり}$$

内分点の位置関係

$$\vec{OD} = \frac{2\vec{OA} + 5\vec{OB}}{5+2}$$

$$= \frac{2}{7}\vec{OA} + \frac{5}{7}\vec{OB}$$

$$= \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b}$$

また $OD:DC = 4:3$ であり

$$OD:OC = 4:7 \text{ であり}$$

$$\vec{OC} = \frac{7}{4}\vec{OD} \text{ であり}$$

代入して

$$\vec{OC} = \frac{7}{4} \left(\frac{2}{7}\vec{a} + \frac{5}{7}\vec{b} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b}$$

(2)

$\angle ACB = 90^\circ$ であり $AC \perp BC$

$$\text{つまり } \vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0 \text{ であり}$$

より

$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = (\vec{OC} - \vec{OA}) \cdot (\vec{OC} - \vec{OB})$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} \right) - \vec{a} \right\} \cdot \left\{ \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} \right) - \vec{b} \right\}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} \right)$$

$$= \frac{1}{4}(-2\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot \frac{1}{4}(2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \frac{1}{16}(-4|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 5|\vec{b}|^2) = 0$$

$$|\vec{a}| = OA = 3, |\vec{b}| = OB = 2 \text{ として}$$

$$\frac{1}{16}(-4 \cdot 3^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 5 \cdot 2^2) = 0$$

(x16)

$$-36 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + 20 = 0$$

$$8\vec{a} \cdot \vec{b} - 16 = 0$$

$$\text{より } \vec{a} \cdot \vec{b} = 2$$

$$\text{また } OC^2 = |\vec{OC}|^2$$

$$= \left| \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} \right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right) |2\vec{a} + 5\vec{b}|^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (4|\vec{a}|^2 + 20\vec{a} \cdot \vec{b} + 25|\vec{b}|^2)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 2 + 25 \cdot 2^2)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^2 (36 + 40 + 100)$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 176$$

$$= \left(\frac{1}{4} \right)^2 \cdot 4^2 \times 11$$

$$= 11$$

$$OC > 0 \text{ であり } OC = \sqrt{11}$$

(3)

$$OA = 3, OC = \sqrt{11}$$

であり $\triangle OAC$ の面積

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} OA \cdot OC \cdot \sin \angle AOC$$

の値を求めよう。

ここで (A) の値を求めよう

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = |\vec{OA}| |\vec{OC}| \cos \angle AOC$$

より $\cos \angle AOC = \frac{7}{3\sqrt{11}}$

$$\vec{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} \right) = 3 \times \sqrt{11} \times \cos \angle AOC$$

$$\frac{1}{2}|\vec{a}|^2 + \frac{5}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} = 3\sqrt{11} \cos \angle AOC$$

$$\frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{5}{4} \times 2 = 3\sqrt{11} \cos \angle AOC$$

$$\frac{9}{2} + \frac{5}{2} = 3\sqrt{11} \cos \angle AOC$$

$$7 = 3\sqrt{11} \cos \angle AOC$$

より

$$\cos \angle AOC = \frac{7}{3\sqrt{11}}$$

$$\sin^2 \angle AOC = 1 - \cos^2 \angle AOC$$

$$= 1 - \left(\frac{7}{3\sqrt{11}} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{49}{99}$$

$$= \frac{50}{99}$$

$$0^\circ < \angle AOC < 180^\circ \text{ であり}$$

$$\sin \angle AOC > 0 \text{ であり}$$

$$\sin \angle AOC = \sqrt{\frac{50}{99}} = \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$$

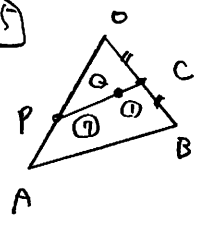
より

$$\triangle AOC = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin \angle AOC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{11} \times \frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{11}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

25



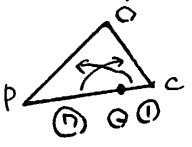
(1) $\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OB}$
 $= \frac{1}{2}\vec{b}$

$\vec{OP} = t\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

点Qは線分AC上

$1:7 = \frac{AQ}{QC}$ となる

$\triangle OCP$ は相似な三角形



$\vec{OQ} = \frac{1 \cdot \vec{OP} + 7 \cdot \vec{OC}}{7+1}$
 $= \frac{1}{8}\vec{OP} + \frac{7}{8}\vec{OC}$
 $= \frac{1}{8} \cdot t\vec{a} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{2}\vec{b}$
 $= \frac{1}{8}t\vec{a} + \frac{7}{16}\vec{b}$

(2) $\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$
 $= t\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

また $OQ \perp CP$ 所以

$\vec{OQ} \cdot \vec{CP} = 0$

$(\frac{1}{8}t\vec{a} + \frac{7}{16}\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = 0$

両辺16で割ると

$(2t\vec{a} + 7\vec{b}) \cdot (t\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}) = 0$

展開して

$2t^2|\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} + 7t\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{7}{2}|\vec{b}|^2 = 0$

$\Rightarrow$

$|\vec{a}| = OA = 3, |\vec{b}| = OB = 2$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle AOB = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$

代入して

$2t^2 \cdot 3^2 - t \cdot \frac{3}{2} + 7t \cdot \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \cdot 2^2 = 0$

$2t^2 \cdot 9 - \frac{3}{2}t + \frac{21}{2}t - \frac{7}{2} \cdot 4 = 0$

$18t^2 + 9t - 14 = 0$

$(6t+7)(3t-2) = 0$

$\therefore t = -\frac{7}{6}, \frac{2}{3}$

$0 < t < 1$ 所以

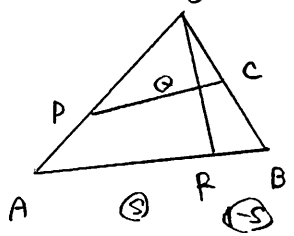
$t = -\frac{7}{6}$ は不適

$\therefore t = \frac{2}{3}$

(3)

(1)より $t = \frac{2}{3}$ である

$\vec{OQ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{7}{16} \vec{b}$
 $= \frac{1}{12} \vec{a} + \frac{7}{16} \vec{b}$



また 3:5 OQ:QR は

一直線上にある

$\vec{OR} = k\vec{OQ}$

$= k(\frac{1}{12}\vec{a} + \frac{7}{16}\vec{b})$

$= \frac{1}{12}k\vec{a} + \frac{7}{16}k\vec{b} \dots ①$

また1:3 OQ:OR は

$AR:RB = s:(1-s)$

また $\triangle OAB$ は直角

$\vec{OR} = \frac{(1-s)\vec{OA} + s\vec{OB}}{s+(1-s)}$

$= (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB}$

$= (1-s)\vec{a} + s\vec{b} \dots ②$

①②より $\vec{OR}$ の表し方は1通り

よって ①②より係数を比較して

$\begin{cases} \frac{1}{12}k = 1-s & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{7}{16}k = s & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$

解いて

$k = \frac{48}{25}, s = \frac{21}{25}$

$s = \frac{21}{25}$ を ② に代入して

$\vec{OR} = \frac{4}{25}\vec{a} + \frac{21}{25}\vec{b}$

④

①より

$\vec{OR} = \frac{1}{12}k\vec{OA} + \frac{7}{16}k\vec{OB}$

$\Rightarrow$ 点Rは直線AB上に

いるから $\frac{1}{12}k + \frac{7}{16}k = 1$

$\therefore \frac{1}{12}k + \frac{7}{16}k = 1$

解いて

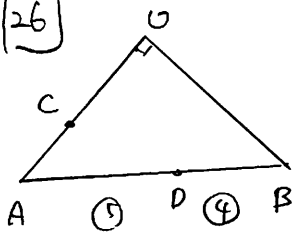
$k = \frac{48}{25}$

①に代入して

$\vec{OR} = \frac{1}{12} \cdot \frac{48}{25} \vec{a} + \frac{7}{16} \cdot \frac{48}{25} \vec{b}$

$= \frac{4}{25}\vec{a} + \frac{21}{25}\vec{b}$

(26)

(1) $\triangle OAB$ の重心 G は CD 上にある。

$$\vec{OG} = \frac{4\vec{OA} + 5\vec{OB}}{5+4}$$

$$= \frac{4\vec{OA} + 5\vec{OB}}{9}$$

$$= \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

また $\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC}$ より

$$\vec{CD} = \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}\right) - t\vec{a}$$

$$= \left(\frac{4}{9} - t\right)\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}$$

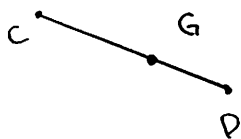
(2) $\triangle OAB$ の重心 G は CD 上にある。 $\vec{OG}$ は $\vec{a}, \vec{b}$ で表す。

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OO} + \vec{OA} + \vec{OB})$$

より

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$$

と置く。

直線 CD 上には点 G が存在する。

$$\vec{DC} = k\vec{DG} \quad (*)$$

と置くことができる。

$$\vec{DC} = -\vec{CD} \text{ より}$$

$$\vec{DC} = -\left(\frac{4}{9} - t\right)\vec{a} - \frac{5}{9}\vec{b}$$

また

$$\vec{DG} = \vec{OG} - \vec{OD}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{9}\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}$$

よって $(*)$ は $s + t = 1$

$$-\left(\frac{4}{9} - t\right)\vec{a} - \frac{5}{9}\vec{b} = k\left(-\frac{1}{9}\vec{a} - \frac{2}{9}\vec{b}\right)$$

$$\therefore -\left(\frac{4}{9} - t\right)\vec{a} - \frac{5}{9}\vec{b} = -\frac{1}{9}k\vec{a} - \frac{2}{9}k\vec{b}$$

両辺の係数を比較して得られる。

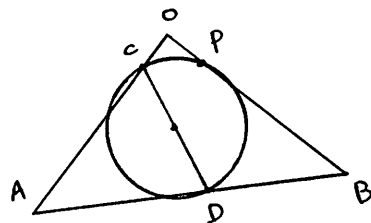
$$\begin{cases} -\left(\frac{4}{9} - t\right) = -\frac{1}{9}k & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ -\frac{5}{9} = -\frac{2}{9}k & (\vec{b} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\therefore k = \frac{5}{2}, \quad t = \frac{1}{6}$$

(3)

 $(0 < t < 1)$ (点 P は AB 上)

$$(2) \text{より } t = \frac{1}{6} \text{ とおくと、より } \vec{OC} = \frac{1}{6}\vec{a}$$

点 P は AB 上の点である。

$$\vec{OP} = s\vec{OB}$$

と置く。すると点 P は AB 上の点である。点 P は AB 上の点である。 CD は AB の中点である。

$$\angle CPD = 90^\circ$$

また $AB \perp CD$ である。

$$CP \perp PD$$

よって

$$\vec{CP} \cdot \vec{PD} = 0$$

また $AB \perp CD$ である。

$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$

$$= s\vec{OB} - \frac{1}{6}\vec{a}$$

$$= s\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}$$

また

$$\vec{PD} = \vec{OD} - \vec{OP}$$

$$= \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{5}{9}\vec{b}\right) - s\vec{b}$$

$$= \frac{4}{9}\vec{a} + \left(\frac{5}{9} - s\right)\vec{b}$$

よって

$$\vec{CP} \cdot \vec{PD} = 0$$

$$\left(s\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{a}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \left(\frac{5}{9} - s\right)\vec{b}\right) = 0$$

展開して

$$\frac{4}{9}s\vec{a} \cdot \vec{b} + s\left(\frac{5}{9} - s\right)|\vec{b}|^2 - \frac{2}{27}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{5}{9} - s\right)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

また $OA = OB$ より

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| \text{ とおくと、また}$$

$$\angle AOB = 90^\circ \text{ より } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

よって

$$\frac{4}{9}s \cdot 0 + s\left(\frac{5}{9} - s\right)|\vec{a}|^2 - \frac{2}{27}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{5}{9} - s\right) \cdot 0 = 0$$

$$\therefore s\left(\frac{5}{9} - s\right)|\vec{a}|^2 - \frac{2}{27}|\vec{a}|^2 = 0$$

 $|\vec{a}| \neq 0$ より $|\vec{a}|^2$ で割ると

$$s\left(\frac{5}{9} - s\right) - \frac{2}{27} = 0$$

$$27s^2 - 15s + 2 = 0$$

$$(9s - 2)(3s - 1) = 0$$

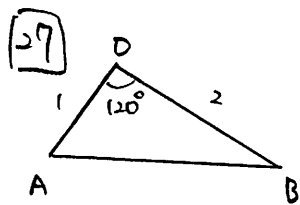
$$\therefore s = \frac{2}{9}, \frac{1}{3}$$

点 P は AB 上の点である。また $AB \perp CD$ である。

$$\vec{OP} = \frac{2}{9}\vec{OB}$$

よって

$$OP : PB = 2 : 7$$



(1)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 120^\circ \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

(2)

$$\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

と表わす点 P が 1)

$$\vec{OA} \perp \vec{AP} \Leftrightarrow \vec{OB} \perp \vec{BP} \Leftrightarrow \vec{OP} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{OA} \perp \vec{AP} \Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{AP} = 0$$

$$\vec{AP} = \vec{OP} - \vec{OA}$$

$$= (s\vec{a} + t\vec{b}) - \vec{a}$$

$$= (s-1)\vec{a} + t\vec{b}$$

より

$$\vec{OA} \perp \vec{AP}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{AP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \{(s-1)\vec{a} + t\vec{b}\} = 0$$

$$\Leftrightarrow (s-1)|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$|\vec{a}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = -1$$

より

$$(s-1) \cdot 1 + t(-1) = 0$$

$$\therefore s - t = 1 \quad \text{--- ①}$$

$$\vec{OP} \perp \vec{BP} \Leftrightarrow \vec{OP} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\vec{BP} = \vec{OP} - \vec{OB}$$

$$= (s\vec{a} + t\vec{b}) - \vec{b}$$

$$= s\vec{a} + (t-1)\vec{b}$$

より

$$\vec{OB} \perp \vec{BP}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OB} \cdot \vec{BP} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{b} \cdot \{s\vec{a} + (t-1)\vec{b}\} = 0$$

$$\Leftrightarrow s\vec{a} \cdot \vec{b} + (t-1)|\vec{b}|^2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1, |\vec{b}| = 2 \text{ より } s(-1) + (t-1) \cdot 2^2 = 0$$

$$-s + 4t - 4 = 0$$

$$-s + 4t - 4 = 0$$

より

$$s - 4t = -4 \quad \text{--- ②}$$

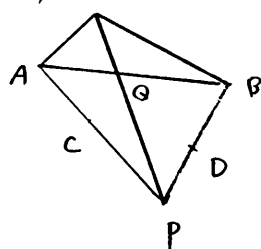
①②より

$$\begin{cases} s - t = 1 \\ s - 4t = -4 \end{cases}$$

$$s - 4t = -4$$

$$s = \frac{8}{3}, t = \frac{5}{3}$$

(3)



(4)より

$$\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

$$= \frac{8}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$$

より 3点 O, Q, P は

一直線上にある

$$\vec{OQ} = k\vec{OP}$$

と表わす。より

$$\vec{OQ} = k\left(\frac{8}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{8}{3}k\vec{a} + \frac{5}{3}k\vec{b} \quad \text{--- (*)}$$

と表わす。よって点 Q は

直線 AB 上にある (*) により

係数は 1/3 である。

より

$$\frac{8}{3}k + \frac{5}{3}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{3}{13}$$

$$(*) \text{より } \vec{OQ} = \frac{8}{13}\vec{a} + \frac{5}{13}\vec{b}$$

$$\vec{OQ} = \frac{8}{13}\vec{a} + \frac{5}{13}\vec{b}$$

$$= \frac{8}{13}\vec{a} + \frac{5}{13}\vec{b}$$

$$= \frac{8\vec{a} + 5\vec{b}}{13} = \frac{8\vec{a} + 5\vec{b}}{s+t}$$

よって点 Q は線分 AB

を 5:8 に内分する点である。

$$\therefore AQ:QB = 5:8 \text{ である。}$$

また点 C, D は

$$AC:CP = PD:DB = AQ:QB$$

より

$$AC:CP = 5:8, PD:DB = 5:8$$

より点 O は

$$\vec{OC} = \frac{8\vec{OA} + 5\vec{OP}}{5+8}$$

$$= \frac{8}{13}\vec{a} + \frac{5}{13}\vec{OP}$$

$$= \frac{8}{13}\vec{a} + \frac{5}{13}\left(\frac{8}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}\right) = \frac{64}{39}\vec{a} + \frac{25}{39}\vec{b}$$

また点 O は

$$\vec{OD} = \frac{8\vec{OP} + 5\vec{OB}}{5+8}$$

$$= \frac{8}{13}\vec{OP} + \frac{5}{13}\vec{b}$$

$$= \frac{8}{13}\left(\frac{8}{3}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}\right) + \frac{5}{13}\vec{b} = \frac{64}{39}\vec{a} + \frac{55}{39}\vec{b}$$

より

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC}$$

$$= \left(\frac{64}{39}\vec{a} + \frac{55}{39}\vec{b}\right) - \left(\frac{64}{39}\vec{a} + \frac{25}{39}\vec{b}\right)$$

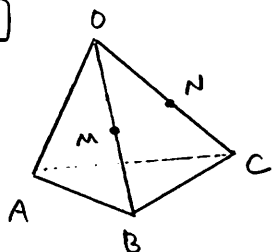
$$= \frac{30}{39}\vec{b} = \frac{10}{13}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{CD} = \frac{10}{13}\vec{b}$$

$$\text{より } CD = \frac{10}{13} \cdot OB$$

$$\text{より } OB = 2 \text{ より } CD = \frac{10}{13} \cdot 2 = \frac{20}{13}$$

28

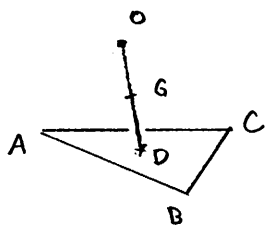


(1) $\triangle AMN$ の重心が G である

を示す

$$\begin{aligned}\vec{OG} &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OM} + \vec{ON}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{6}\vec{OB} + \frac{1}{6}\vec{OC} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}$$

(2)



3点 O, G, D は一直線上にある点である

$\vec{OD} = k\vec{OG}$ と仮定する

存在する。(1)より

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= k(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}) \\ &= \frac{1}{3}k\vec{a} + \frac{1}{6}k\vec{b} + \frac{1}{6}k\vec{c} \quad \text{--- (1)}\end{aligned}$$

また点 D は平面 ABC 上の点である

A, B, C を始点として

$$\vec{AD} = s\vec{AB} + t\vec{AC}$$

と仮定する s, t が存在する。

より

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \vec{OA} + \vec{AD} \\ &= \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC} \\ &= \vec{OA} + s(\vec{OB} - \vec{OA}) + t(\vec{OC} - \vec{OA}) \\ &= (1-s-t)\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}\end{aligned}$$

$$= (1-s-t)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \quad \text{--- (2)}$$

(1), (2) より $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1:2:2 の係数で表わされる

$$\begin{cases} \frac{1}{3}k = 1-s-t & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{6}k = s & (\vec{b} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{6}k = t & (\vec{c} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } k = \frac{3}{2}, s = t = \frac{1}{4}$$

(1)より (1) $k = \frac{3}{2}$ を代入して

$$\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

(3) (1)と同じ

より

$$\vec{OD} = \frac{1}{3}k\vec{OA} + \frac{1}{6}k\vec{OB} + \frac{1}{6}k\vec{OC}$$

また点 D は平面 ABC 上の点である

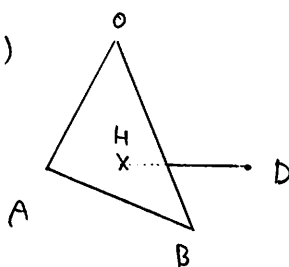
点 D を始点として

$$\frac{1}{3}k + \frac{1}{6}k + \frac{1}{6}k = 1$$

$$(\vec{OA} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) + (\vec{OC} \text{ の係数}) = 1$$

$$\text{解いて } k = \frac{3}{2} \quad (\text{以下同じ}) \quad \text{--- (4)}$$

(3)



点 H は平面 OAB 上の点である

また点 O を始点として

$$\vec{OH} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$$

と仮定する x, y が存在する。

また $DH \perp (\text{平面 } OAB)$

を示す

$$\begin{cases} \vec{DH} \perp \vec{OA} \quad \text{--- (5)} \\ \vec{DH} \perp \vec{OB} \quad \text{--- (6)} \end{cases}$$

を示す。

(2)の結果より

$$\begin{aligned}\vec{DH} &= \vec{OH} - \vec{OD} \\ &= (x\vec{a} + y\vec{b}) - (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}) \\ &= (x-\frac{1}{2})\vec{a} + (y-\frac{1}{4})\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

また (1)より

$$\begin{aligned}|\vec{a}| &= 3, |\vec{b}| = 4, |\vec{c}| = 4 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8 \\ \vec{c} \cdot \vec{a} &= |\vec{c}||\vec{a}|\cos 60^\circ = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 6\end{aligned}$$

また

(3)より

$$\begin{aligned}\vec{DH} \cdot \vec{OA} &= \left\{ (x-\frac{1}{2})\vec{a} + (y-\frac{1}{4})\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \right\} \cdot \vec{a} \\ &= (x-\frac{1}{2})|\vec{a}|^2 + (y-\frac{1}{4})\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= (x-\frac{1}{2})9 + (y-\frac{1}{4})6 - \frac{1}{4}6 \\ &= 9x - \frac{9}{2} + 6y - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \\ &= 9x + 6y - \frac{15}{2} = 0 \quad \text{--- (7)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{DH} \cdot \vec{OB} &= \left\{ (x-\frac{1}{2})\vec{a} + (y-\frac{1}{4})\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c} \right\} \cdot \vec{b} \\ &= (x-\frac{1}{2})\vec{a} \cdot \vec{b} + (y-\frac{1}{4})|\vec{b}|^2 - \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{b} \\ &= (x-\frac{1}{2})6 + (y-\frac{1}{4})16 - \frac{1}{4}8 \\ &= 6x - 3 + 16y - 4 - 2 \\ &= 6x + 16y - 9 = 0 \quad \text{--- (8)}\end{aligned}$$

(7), (8)より x, y の連立 2 方程式

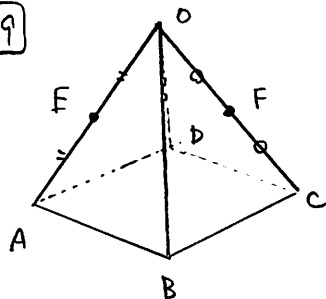
を解いて

$$x = \frac{11}{18}, y = \frac{1}{3}$$

また

$$\vec{OH} = \frac{11}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

29



(1)

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = \vec{c} - \vec{b}$$

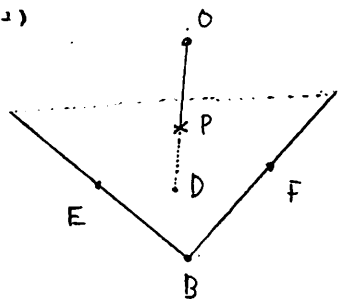
④四面体 ABCD は正四面体より

$$\vec{AD} = \vec{BC} \text{ が成り立つ。}$$

(1)より、

$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \vec{OA} + \vec{AD} \\ &= \vec{OA} + \vec{BC} \\ &= \vec{a} + (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

(2)



3点 O, P, D は一直線上で並ぶから

$$\vec{OP} = k \vec{OD}$$

なる実数 k が存在する。

(1)の結果より

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= k(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= k\vec{a} - k\vec{b} + k\vec{c} \quad \text{①} \end{aligned}$$

また、点 P は平面 BEF 上の点で

だから、点 B を始点として

$$\vec{BP} = s\vec{BE} + t\vec{BF}$$

なる実数 s, t が存在する。

(1)より、

$$\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BP}$$

$$= \vec{OB} + s\vec{BE} + t\vec{BF}$$

$$= \vec{OB} + s(\vec{OE} - \vec{OB}) + t(\vec{OF} - \vec{OB})$$

$$= (1-s-t)\vec{OB} + s\vec{OE} + t\vec{OF}$$

$$= (1-s-t)\vec{OB} + s \cdot \frac{1}{2}\vec{OA} + t \cdot \frac{1}{2}\vec{OC}$$

$$= \frac{1}{2}s\vec{a} + (1-s-t)\vec{b} + \frac{1}{2}t\vec{c} \quad \text{②}$$

①, ②より $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1-基底より

$$\begin{cases} k = \frac{1}{2}s & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ -k = 1-s-t & (\vec{b} \text{ の係数}) \\ k = \frac{1}{2}t & (\vec{c} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } k = \frac{1}{3}, t = s = \frac{2}{3}$$

①に $k = \frac{1}{3}$ を代入して

$$\vec{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(3) (1)より (2)より

$$\therefore \vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{OA}, \vec{OF} = \frac{1}{2}\vec{OC}$$

$$\text{より } \vec{OA} = 2\vec{OE}, \vec{OC} = 2\vec{OF} \text{ なる}$$

①に代入して

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= k \times 2\vec{OE} - k\vec{OB} + k \times 2\vec{OF} \\ &= 2k\vec{OE} - k\vec{OB} + 2k\vec{OF} \end{aligned}$$

よって、点 P は平面 EBF 上の

点で並ぶから

$$2k + (-k) + 2k = 1$$

$$(\vec{OE} \text{ の係数}) + (\vec{OB} \text{ の係数}) + (\vec{OF} \text{ の係数}) = 1$$

$$\text{解いて } k = \frac{1}{3} \text{ (1, 2, 3 の場合)}$$

(3)

証明

$$\vec{OP} \perp \vec{BP} \text{ のとき}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{BP} = 0 \text{ であることを示す。}$$

(1)の結果より

$$\vec{OP} \cdot \vec{BP} = \vec{OP} \cdot (\vec{OP} - \vec{OB})$$

$$= \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) \cdot \left\{\left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \vec{b}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{3}(\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \frac{1}{9}\{(\vec{a} + \vec{c}) - \vec{b}\} \cdot \{(\vec{a} + \vec{c}) - 4\vec{b}\}$$

$$= \frac{1}{9}\{|\vec{a} + \vec{c}|^2 - 5\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) + 4|\vec{b}|^2\}$$

$$= \frac{1}{9}\{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{b} \cdot \vec{c} + 4|\vec{b}|^2\}$$

$$= \frac{1}{9}\{(\sqrt{5})^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + (\sqrt{5})^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{b} \cdot \vec{c} + 4(\sqrt{5})^2\}$$

$$= \frac{1}{9}\{30 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 5\vec{b} \cdot \vec{c}\} = 0$$

よって 四面体 ABCD は 1 辺の長さが 2 の正四面体より

$$AB = 2 \Leftrightarrow |\vec{AB}| = 2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}| = 2$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b} - \vec{a}|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 5 = 4$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

BC = 2 となるように基底を定める

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 3 \text{ が成り立つから}$$

(3)より

$$30 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 5 \times 3 - 5 \times 3$$

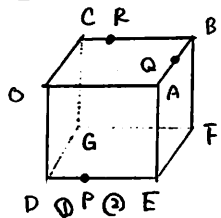
$$= 30 + 2\vec{a} \cdot \vec{c} - 15 - 15$$

$$= 2\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$$

よって $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ であることを示す

$$OA \perp OC \text{ が成り立つ。}$$

30



(1)

$$\vec{OP} = \vec{OD} + \vec{DP}$$

$$= \vec{OD} + \frac{1}{3}\vec{DE}$$

$$= \vec{d} + \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \vec{d}$$

$$\vec{OQ} = \vec{OA} + \vec{AQ}$$

$$= \vec{OA} + t\vec{AB}$$

$$= \vec{a} + t\vec{c}$$

$$\vec{OR} = \vec{OC} + \vec{CR}$$

$$= \vec{OC} + (1-t)\vec{CB}$$

$$= \vec{c} + (1-t)\vec{a}$$

$$= (1-t)\vec{a} + \vec{c}$$

よ

$$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$$

$$= (\vec{a} + t\vec{c}) - (\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{d})$$

$$= \vec{a} + t\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{a} - \vec{d}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{a} + t\vec{c} - \vec{d}$$

また

$$\vec{PR} = \vec{OR} - \vec{OP}$$

$$= \{ (1-t)\vec{a} + \vec{c} \} - (\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{d})$$

$$= (1-t-\frac{1}{3})\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$$

$$= (\frac{2}{3}-t)\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$$

$$\text{また } PQ = PR \text{ より}$$

$$PQ^2 = PR^2$$

よ

$$|\frac{2}{3}\vec{a} + t\vec{c} - \vec{d}|^2 = |(\frac{2}{3}-t)\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}|^2$$

$$\text{つまり } |\vec{a}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = 1 \text{ とする}$$

また、互に垂直であるから、

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{a} = 0 \text{ である}$$

よって、展開して両辺を比較すると

$$\frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + t^2|\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2 = (\frac{2}{3}-t)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{d}|^2$$

$$\frac{4}{9} + t^2 + 1 = (\frac{2}{3}-t)^2 + 1 + 1$$

$$\frac{4}{9} + t^2 + 1 = \frac{4}{9} - \frac{4}{3}t + t^2 + 1 + 1$$

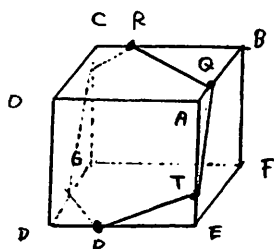
よ

$$0 = -\frac{4}{3}t + 1$$

よ

$$\frac{4}{3}t = 1 \quad \text{よって } t = \frac{3}{4}$$

(0 < t < 1 と仮定する)



$$\vec{AT} = s\vec{AE} \text{ とおく}$$

(1)の結果より $t = \frac{3}{4}$ であるから

$$\vec{PQ} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{d} \quad \text{--- ①}$$

$$\vec{PR} = (\frac{2}{3}-\frac{3}{4})\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$$

$$= -\frac{1}{12}\vec{a} + \vec{c} - \vec{d} \quad \text{--- ②}$$

つまり

今、点 T を平面 PQR 上の

点と仮定する。それと x, y を

用いて

$$\vec{PT} = x\vec{PQ} + y\vec{PR} \quad \text{--- ③}$$

と表すことができる。

==>

$$\vec{PT} = \vec{OT} - \vec{OP}$$

$$= (\vec{OA} + \vec{AT}) - \vec{OP}$$

$$= (\vec{OA} + s\vec{AE}) - \vec{OP}$$

$$= (\vec{a} + s\vec{d}) - (\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{d})$$

$$= \frac{2}{3}\vec{a} + (s-1)\vec{d} \quad \text{--- ④}$$

つまり、①, ②, ③, ④より

$$1 = st\lambda$$

$$\frac{2}{3}\vec{a} + (s-1)\vec{d}$$

$$= x(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{c} - \vec{d})$$

$$+ y(-\frac{1}{12}\vec{a} + \vec{c} - \vec{d})$$

つまり

$$\frac{2}{3}\vec{a} + (s-1)\vec{d}$$

$$= (\frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y)\vec{a}$$

$$+ (\frac{3}{4}x + y)\vec{c}$$

$$+ (-x-y)\vec{d}$$

つまり $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ は 1-基底である

であるから、両辺の係数を

それぞれ比較すると

$$\begin{cases} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{12}y & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ 0 = \frac{3}{4}x + y & (\vec{c} \text{ の係数}) \\ s-1 = -x-y & (\vec{d} \text{ の係数}) \end{cases}$$

上の2式から

$$x = \frac{32}{35}, \quad y = -\frac{24}{35}$$

よ

$$s = 1 - x - y$$

$$= 1 - \frac{32}{35} + \frac{24}{35}$$

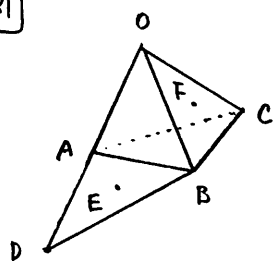
$$= \frac{27}{35}$$

$$\text{よって } \vec{AT} = \frac{27}{35}\vec{AE} \text{ である}$$

$$\vec{AT} = \frac{27}{35}\vec{AE} = \frac{27}{35} \times 1$$

$$= \frac{27}{35}$$

31



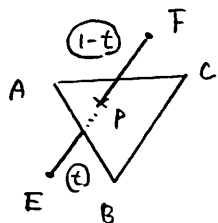
(1) $\triangle ABD$ の重心が E 点

$$\begin{aligned}\vec{OE} &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + 2\vec{OA}) \\ &= \frac{1}{3}(3\vec{OA} + \vec{OB}) \\ &= \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

また $\triangle OBC$ の重心が F 点

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OO}) \\ &= \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

(2)



EP:PF = t:(1-t) とおく (0 < t < 1)

$\triangle OEF$ は $\triangle OAC$ の重心

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \frac{(1-t)\vec{OE} + t\vec{OF}}{t + (1-t)} \\ &= (1-t)\vec{OE} + t\vec{OF} \\ &= (1-t)(\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}) + t(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}) \\ &= (1-t)\vec{a} + \left\{\frac{1}{3}(1-t) + \frac{1}{3}t\right\}\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c} \\ &= (1-t)\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}t\vec{c} \\ &= (1-t)\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}t\vec{OC} \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

∴ $\textcircled{1}$ は $\triangle OAC$ の重心 P は平面 ABC 上

の点で表す

$$(1-t) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t = 1$$

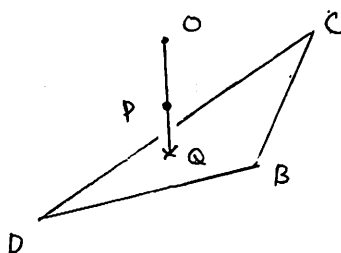
$$(\vec{OA} \text{ 係数}) + (\vec{OB} \text{ 係数}) + (\vec{OC} \text{ 係数}) = 1$$

$$\text{よって } t = \frac{1}{2} \quad (0 < t < 1 \text{ を満たす})$$

したがって $\textcircled{1}$ は $\triangle OAC$ の重心

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= (1-\frac{1}{2})\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\vec{c} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}\end{aligned}$$

(3)



3点 O, P, Q は一直線上より

$$\vec{OQ} = S\vec{OP} \text{ とおす } S \text{ なる}$$

存在する。(2)の結果より)

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= S(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c}) \\ &= \frac{1}{2}S\vec{a} + \frac{1}{3}S\vec{b} + \frac{1}{6}S\vec{c} \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\text{∴ } \vec{OD} = 2\vec{OA} \text{ より } \vec{OA} = \frac{1}{2}\vec{OD}$$

と $\textcircled{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \frac{1}{2}S \times \frac{1}{2}\vec{OD} + \frac{1}{3}S\vec{OB} + \frac{1}{6}S\vec{OC} \\ &= \frac{1}{4}S\vec{OD} + \frac{1}{3}S\vec{OB} + \frac{1}{6}S\vec{OC} \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

∴ $\textcircled{3}$ は $\triangle OBC$ の重心 Q は平面 BCD 上

の点で表す

$$\frac{1}{4}S + \frac{1}{3}S + \frac{1}{6}S = 1$$

$$(\vec{OD} \text{ 係数}) + (\vec{OB} \text{ 係数}) + (\vec{OC} \text{ 係数}) = 1$$

$$\text{よって } 3S + 4S + 2S = 12$$

$$9S = 12 \quad S = \frac{4}{3}$$

$\textcircled{2}$ は代入して

$$\begin{aligned}\vec{OQ} &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{3}\vec{b} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{3}\vec{c} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c} \\ &= \frac{2}{9}(3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c})\end{aligned}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}OQ^2 &= |\vec{OQ}|^2 \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 |3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}|^2 \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 \{9|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 \\ &\quad + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{c} + 6\vec{c} \cdot \vec{a}\}\end{aligned}$$

∴ 正四面体 OABC の

1辺の長さは 1 とおす

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

また各面は正三角形で表す

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

これを代入して

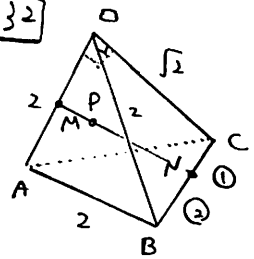
$$\begin{aligned}OQ^2 &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 (9 \times 1^2 + 4 \times 1^2 + 1^2 \\ &\quad + 12 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{2}) \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 (9 + 4 + 1 + 6 + 2 + 3) \\ &= \left(\frac{2}{9}\right)^2 \times 25\end{aligned}$$

よって $OQ > 0$ より

$$OQ = \frac{2}{9} \times 5$$

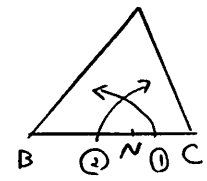
$$= \frac{10}{9}$$

{2}



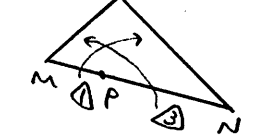
(1) $\vec{OM} = \frac{1}{2} \vec{OA}$
 $= \frac{1}{2} \vec{a}$ (i)

また、 $\triangle OBC$ について、 $\angle BOC = 90^\circ$ である。



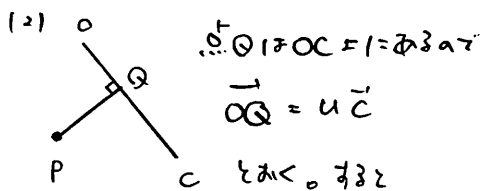
$\vec{ON} = \frac{1 \cdot \vec{OB} + 2 \cdot \vec{OC}}{2+1}$
 $= \frac{1}{3} \vec{OB} + \frac{2}{3} \vec{OC}$
 $= \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$ (ii)

また、 $\triangle OMN$ について、 $\angle OMN = 90^\circ$ である。



$\vec{OP} = \frac{3\vec{OM} + 1 \cdot \vec{ON}}{1+3}$
 $= \frac{3}{4} \vec{OM} + \frac{1}{4} \vec{ON}$

(i)(ii) を代入して
 $\vec{OP} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} \right)$
 $= \frac{3}{8} \vec{a} + \frac{1}{12} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c}$



$\vec{PQ} = \vec{OQ} - \vec{OP}$
 $= u \vec{c} - \left(\frac{3}{8} \vec{a} + \frac{1}{12} \vec{b} + \frac{1}{6} \vec{c} \right)$
 $= -\frac{3}{8} \vec{a} - \frac{1}{12} \vec{b} + \left(u - \frac{1}{6} \right) \vec{c}$

したがって、 $PQ \perp OC$ である。
 $\vec{PQ} \cdot \vec{OC} = 0$
 したがって、代入して

$\left\{ -\frac{3}{8} \vec{a} - \frac{1}{12} \vec{b} + \left(u - \frac{1}{6} \right) \vec{c} \right\} \cdot \vec{c} = 0$

$\therefore$ 展開して
 $-\frac{3}{8} \vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{12} \vec{b} \cdot \vec{c} + \left(u - \frac{1}{6} \right) |\vec{c}|^2 = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

$\angle AOC = 90^\circ$ である。 $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

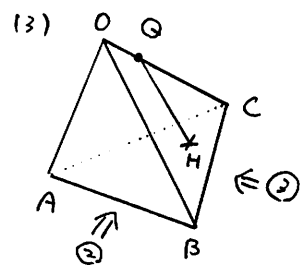
また、 $\angle BOC = 90^\circ$ である。 $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

したがって、 $|\vec{c}| = OC = \sqrt{2}$ である。代入して

$-\frac{3}{8} \cdot 0 - \frac{1}{12} \cdot 0 + \left(u - \frac{1}{6} \right) (\sqrt{2})^2 = 0$

$\therefore u = \frac{1}{6}$

よって
 $\vec{OQ} = \frac{1}{6} \vec{c}$



点 H は平面 ABC 上にあり、 $\vec{OH} = r \vec{OA} + s \vec{OB} + t \vec{OC}$ と表すことができる。

$\vec{OH} = r \vec{OA} + s \vec{OB} + t \vec{OC}$
 $(r+s+t=1)$ ①

したがって、 $\vec{OH} = \vec{OH} - \vec{OO}$

$\vec{OH} = \vec{OH} - \vec{OO}$
 $= (r \vec{OA} + s \vec{OB} + t \vec{OC}) - \frac{1}{6} \vec{c}$
 $= r \vec{a} + s \vec{b} + \left(t - \frac{1}{6} \right) \vec{c}$ (*)

$\therefore$ $\vec{OH}$ は平面 ABC 上にあり、 $\vec{OH} \perp AB$ かつ $\vec{OH} \perp BC$ である。

- よって
 ② $\vec{OH} \perp AB$
 ③ $\vec{OH} \perp BC$
 したがって、 $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$
 $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ である。

$\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$ である。

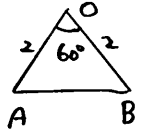
代入して
 $\left\{ r \vec{a} + s \vec{b} + \left(t - \frac{1}{6} \right) \vec{c} \right\} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0$

展開して
 $r \vec{a} \cdot \vec{b} + s |\vec{b}|^2 + \left(t - \frac{1}{6} \right) \vec{b} \cdot \vec{c}$
 $- r |\vec{a}|^2 - s \vec{a} \cdot \vec{b} - \left(t - \frac{1}{6} \right) \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ である。 $\triangle OAB$ は

二等辺三角形である。したがって、 $\angle AOB = 60^\circ$ である。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$



よって
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2, \vec{b} \cdot \vec{c} = 0, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$
 $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = \sqrt{2}$

代入して
 $r \cdot 2 + s \cdot 2^2 + \left(t - \frac{1}{6} \right) \cdot 0$
 $- r \cdot 2^2 - s \cdot 2 - \left(t - \frac{1}{6} \right) \cdot 0 = 0$
 $\therefore -2r + 2s = 0$
 $\therefore s = r$ ②

同様にして、 $\vec{OH} \perp BC$

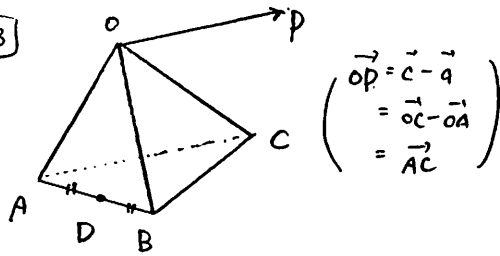
である。
 $\vec{OH} \cdot \vec{BC} = 0$
 代入して展開して
 $\left\{ r \vec{a} + s \vec{b} + \left(t - \frac{1}{6} \right) \vec{c} \right\} \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = 0$
 $r \vec{a} \cdot \vec{c} + s \vec{b} \cdot \vec{c} + \left(t - \frac{1}{6} \right) |\vec{c}|^2$
 $- r \vec{a} \cdot \vec{b} - s |\vec{b}|^2 - \left(t - \frac{1}{6} \right) \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$

代入して
 $r \cdot 0 + s \cdot 0 + \left(t - \frac{1}{6} \right) (\sqrt{2})^2$
 $- r \cdot 2 - s \cdot 2^2 - \left(t - \frac{1}{6} \right) \cdot 0 = 0$
 $\therefore -2r - 4s + 2 \left(t - \frac{1}{6} \right) = 0$
 $\therefore -r - 2s + t = \frac{1}{6}$ ③

①②③より
 $\begin{cases} r+s+t=1 \\ s=r \\ -r-2s+t=\frac{1}{6} \end{cases}$
 したがって
 $r = \frac{1}{6}, s = \frac{1}{6}, t = \frac{2}{3}$

(*) 代入して
 $\vec{OH} = \frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \right) \vec{c}$
 $= \frac{1}{6} \vec{a} + \frac{1}{6} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$

33



(1)

$$\vec{PD} = \vec{OD} - \vec{OP} \text{ である。}$$

∴ 点DはABの中点より

1/2 である

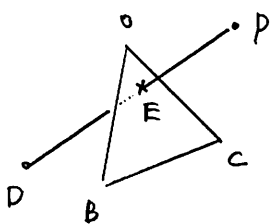
$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \end{aligned}$$

である。また、 $\vec{OP}$ は問題より

$$\vec{OP} = \vec{c} - \vec{a} \text{ である。}$$

$$\begin{aligned} \vec{PD} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \vec{a} \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

(2)



3点P, E, Dは一直線上より

$$\vec{PE} = s\vec{PD} \text{ である。}$$

が存在する。よって

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= \vec{OP} + \vec{PE} \\ &= \vec{OP} + s\vec{PD} \quad (1) \\ &= (\vec{c} - \vec{a}) + s(\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}) \\ &= \vec{c} - \vec{a} + \frac{3}{2}s\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} - s\vec{c} \\ &= (\frac{3}{2}s - 1)\vec{a} + \frac{1}{2}s\vec{b} + (1 - s)\vec{c} \quad (2) \end{aligned}$$

また、点Eは平面OBC上の点であるから

点Oを始点として

$$\vec{OE} = x\vec{OB} + y\vec{OC} \quad (3)$$

と表される。よって存在する。

①, ②より $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は1次独立

より

$$\begin{cases} \frac{3}{2}s - 1 = 0 & (\vec{a} \text{ の係数}) \\ \frac{1}{2}s = x & (\vec{b} \text{ の係数}) \\ 1 - s = y & (\vec{c} \text{ の係数}) \end{cases}$$

$$\text{解いて } s = \frac{2}{3}, x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}$$

$$x = y = \frac{1}{3} \text{ ③に代入して}$$

$$\vec{OE} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

(3)

②の式をE点に代入して

平面OBC上にある点Eより

$\vec{OA}$ の係数は0になる。

これを②を用いて②の式で

$$(\vec{OA} \text{ の係数}) = \frac{3}{2}s - 1 = 0$$

$$\text{より } s = \frac{2}{3}$$

を②に代入してよい。

(1)

(2)の①と同様に考えて、直線PD

上にある点Fは、求める点である。

$$\vec{OF} = (\frac{3}{2}t - 1)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + (1 - t)\vec{c} \quad (4)$$

と書ける。OF ⊥ PD であるから

$$\vec{OF} \cdot \vec{PD} = 0 \text{ が成り立つ。よって}$$

$$\begin{aligned} \vec{OF} \cdot \vec{PD} &= \left\{ (\frac{3}{2}t - 1)\vec{a} + \frac{1}{2}t\vec{b} + (1 - t)\vec{c} \right\} \cdot \left(\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} \right) \\ &= \frac{3}{2}(\frac{3}{2}t - 1)|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}t - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} - (\frac{3}{2}t - 1)\vec{a} \cdot \vec{c} \\ &\quad + \frac{3}{4}t\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}t|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}t\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &\quad + \frac{3}{2}(1 - t)\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2}(1 - t)\vec{b} \cdot \vec{c} - (1 - t)|\vec{c}|^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \vec{OA} = \vec{OB} = \vec{OC} \text{ より } |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\text{また } \vec{OA} = \vec{OB} = 1, AB = \sqrt{2}$$

であるから、△OABは直角二等辺三角形

より OA ⊥ OB, かつ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$\vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$ も同様に0である。

これらの結果を④に代入して

$$\begin{aligned} \vec{OF} \cdot \vec{PD} &= \frac{3}{2}(\frac{3}{2}t - 1) \cdot 1^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}t \cdot 1^2 \\ &\quad - (1 - t) \cdot 1^2 = 0 \end{aligned}$$

より

$$\frac{9}{4}t - \frac{3}{2} + \frac{1}{4}t - 1 + t = 0$$

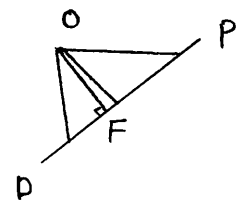
$$\frac{7}{2}t - \frac{5}{2} = 0$$

$$t = \frac{5}{7}$$

これを④に代入して

$$\begin{aligned} \vec{OF} &= (\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{7} - 1)\vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7}\vec{b} + (1 - \frac{5}{7})\vec{c} \\ &= \frac{1}{14}\vec{a} + \frac{5}{14}\vec{b} + \frac{2}{7}\vec{c} \end{aligned}$$

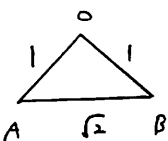
(4)



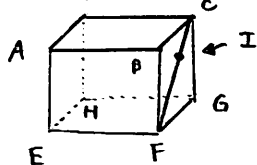
OF ⊥ PD であるから

OF ⊥ PD であるから

$|\vec{OF}|^2$ を t の関数として t の2次関数にすると、そこから t の値を求めてよい。



34



$$(1) \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} \\ = \vec{AB} + \vec{AD} \\ = \vec{b} + \vec{d}$$

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} \\ = \vec{AB} + \vec{AE} \\ = \vec{b} + \vec{e}$$

よて $\triangle ACF$ において

$$\begin{aligned} \vec{AI} &= \frac{2\vec{AC} + 1\vec{AF}}{1+2} \\ &= \frac{2}{3}\vec{AC} + \frac{1}{3}\vec{AF} \\ &= \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{d}) + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{e}) \\ &= \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{e} \\ &= \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} + \frac{1}{3}\vec{e} \end{aligned}$$

(2) 立方体の1辺の長さは1と

$$\text{よて } |\vec{b}| = |\vec{d}| = |\vec{e}| = 1$$

また、各面は正方形である

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = \vec{d} \cdot \vec{e} = \vec{e} \cdot \vec{b} = 0$$

よて

$$\begin{aligned} AI^2 &= |\vec{AI}|^2 \\ &= \left| \vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} + \frac{1}{3}\vec{e} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{3}(3\vec{b} + 2\vec{d} + \vec{e}) \right|^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^2 (3\vec{b} + 2\vec{d} + \vec{e})^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^2 (9 + 4 + 1) \\ &= \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times 14 \end{aligned}$$

$$AI > 0 \text{ より } AI = \frac{1}{3}\sqrt{14}$$

(3) この立方体において

空間座標を導入する

Aを原点とし、線分ABをx軸、ADをy軸、AEをz軸とする

$$\vec{b} = (1, 0, 0), \vec{d} = (0, 1, 0), \vec{e} = (0, 0, 1)$$

よて

$$\vec{AI} = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

よて I $\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$ である

線分の長さを求める

$$AI = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

(3)

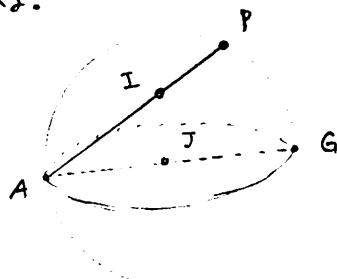
立方体の頂点から

球上の点に接している

対称性より立方体の対角線

AGの中心が球の中心である

また、線分AGが球の直径である



よてこの球の中心はJと等しい

$$\begin{aligned} \vec{AJ} &= \frac{1}{2}\vec{AG} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BF} + \vec{FG}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AE} + \vec{AD}) \\ &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{e} + \vec{d}) \quad \text{--- ①} \end{aligned}$$

また、半径は線分AJの長さである

$$\begin{aligned} AJ^2 &= |\vec{AJ}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 |\vec{b} + \vec{e} + \vec{d}|^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 (|\vec{b}|^2 + |\vec{e}|^2 + |\vec{d}|^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 (1^2 + 1^2 + 1^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 3 \end{aligned}$$

$$AJ > 0 \text{ より } AJ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3点A, I, Pは同一直線上より $\vec{AP} = t\vec{AI}$ である

実数tが存在する。(1)の結果より

$$\vec{AP} = t\left(\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{d} + \frac{1}{3}\vec{e}\right) = t\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{d} + \frac{1}{3}t\vec{e} \quad \text{--- ②}$$

よて線分JPはこの球の半径である

$$JP = AJ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ が成り立つ。①, ②より}$$

$$\begin{aligned} \vec{JP} &= \vec{AP} - \vec{AJ} = \left(t\vec{b} + \frac{2}{3}t\vec{d} + \frac{1}{3}t\vec{e}\right) - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{d} + \vec{e}) \\ &= \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\right)\vec{d} + \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{2}\right)\vec{e} \end{aligned}$$

$$\text{よて } |\vec{JP}|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \text{ である}$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 |\vec{b}|^2 + \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\right)^2 |\vec{d}|^2 + \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{2}\right)^2 |\vec{e}|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 + \left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\text{整理して } \frac{14}{9}t^2 - 2t = 0$$

$$\frac{14}{9}t\left(t - \frac{9}{7}\right) = 0$$

点Pは点Aと異なる点なので $t \neq 0$

$$\text{よて } t = \frac{9}{7} \text{ であり、②に代入して}$$

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= \frac{9}{7}\vec{b} + \frac{2}{3} \times \frac{9}{7}\vec{d} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{7}\vec{e} \\ &= \frac{9}{7}\vec{b} + \frac{6}{7}\vec{d} + \frac{3}{7}\vec{e} \end{aligned}$$

(4) 線分AGが直径より

$$\angle APG = 90^\circ \text{ である}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{GP} = 0 \text{ であり、} t \text{ の値を求める}$$

(5) (1)と同じ空間座標で表すと

$$\text{①より } J\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ である}$$

$$\text{この球は中心}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\text{半径}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

球面の方程式は

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\text{よて } x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0$$

$$\text{②より } P\left(t, \frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t\right) \text{ であり}$$

同様、点Pがこの球面上の点より代入して

$$t^2 + \left(\frac{2}{3}t\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t\right)^2 - t - \frac{2}{3}t - \frac{1}{3}t = 0$$

$$\frac{14}{9}t^2 - 2t = 0$$

$$t \neq 0 \text{ より } t = \frac{9}{7} \text{ である}$$

$$P\left(\frac{9}{7}, \frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right) \text{ である}$$

$$\vec{AP} = \frac{9}{7}\vec{b} + \frac{6}{7}\vec{d} + \frac{3}{7}\vec{e}$$

35

(1)
 $k\vec{PO} + 2\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0}$

また、 $\vec{PO} = \vec{OA} - \vec{OP}$
 $k(-\vec{OP}) + 2(\vec{OA} - \vec{OP}) + (\vec{OB} - \vec{OP}) + (\vec{OC} - \vec{OP}) = \vec{0}$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とし

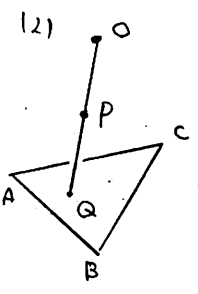
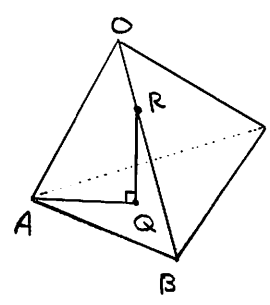
$k(-\vec{OP}) + 2(\vec{a} - \vec{OP}) + (\vec{b} - \vec{OP}) + (\vec{c} - \vec{OP}) = \vec{0}$

$2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - (k+4)\vec{OP} = \vec{0}$

$(k+4)\vec{OP} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$k > 0$ より $k+4 \neq 0$ であるから

$\vec{OP} = \frac{1}{k+4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$



線分 OC の中点を P とし、
 仮定する。

$\vec{OQ} = 2\vec{OP}$

また、 $\vec{OP} = \frac{1}{k+4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$\vec{OQ} = 2 \cdot \frac{1}{k+4}(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

$= \frac{4}{k+4}\vec{a} + \frac{2}{k+4}\vec{b} + \frac{2}{k+4}\vec{c}$

また、 $\vec{OQ} = \frac{4}{k+4}\vec{a} + \frac{2}{k+4}\vec{b} + \frac{2}{k+4}\vec{c}$

$\vec{OQ} = \frac{4}{k+4}\vec{OA} + \frac{2}{k+4}\vec{OB} + \frac{2}{k+4}\vec{OC} \dots (*)$

また、点 Q は平面 ABC 上に存在する。

(*)より、係数之和は 1 である。

$\frac{4}{k+4} + \frac{2}{k+4} + \frac{2}{k+4} = 1$

よって

$\frac{8}{k+4} = 1$

両辺に $k+4$ をかけると

$8 = k+4$

$\therefore k = 4$

($k=4$ は $k > 0$ を満たす)

$|c| = 4\sqrt{4} = 8$

$\vec{OQ} = \frac{4}{8}\vec{a} + \frac{2}{8}\vec{b} + \frac{2}{8}\vec{c}$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

(3) 点 P が線分 OB 上に存在する

$\vec{OR} = u\vec{OB}$ と仮定する。

また、(*)より

$\vec{OQ} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

$\vec{AQ} = \vec{OQ} - \vec{OA}$
 $= (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}) - \vec{a}$
 $= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$

$\vec{OR} = \vec{OR} - \vec{OQ}$
 $= u\vec{OB} - (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c})$
 $= u\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$
 $= -\frac{1}{2}\vec{a} + (u - \frac{1}{4})\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}$

また、 $\angle AQR = 90^\circ$ より

$\vec{AQ} \perp \vec{OR}$ であるから $\vec{AQ} \cdot \vec{OR} = 0$

よって、 $\vec{AQ} \cdot \vec{OR} = 0$

$(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}) \cdot (-\frac{1}{2}\vec{a} + (u - \frac{1}{4})\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{c}) = 0$

$\frac{1}{4}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \frac{1}{4}(-2\vec{a} + (4u - 1)\vec{b} - \vec{c}) = 0$

両辺に 16 をかけると

$(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-2\vec{a} + (4u - 1)\vec{b} - \vec{c}) = 0$

展開すると

$4|\vec{a}|^2 - 2(4u - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c}$
 $= 2\vec{a} \cdot \vec{b} + (4u - 1)|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c}$
 $- 2\vec{a} \cdot \vec{c} + (4u - 1)\vec{b} \cdot \vec{c} - |\vec{c}|^2 = 0$

よって、条件より

$|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 5, |\vec{c}| = 5$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = 7, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$

よって、 $\vec{AQ} \cdot \vec{OR} = 0$

$4 \cdot 2^2 - 2(4u - 1) \cdot 0 + 2 \cdot 0$

$- 2 \cdot 0 + (4u - 1) \cdot 5^2 - 7$

$- 2 \cdot 0 + (4u - 1) \cdot 7 - 5^2 = 0$

整理して

$16 + 25(4u - 1) - 7$

$+ 7(4u - 1) - 25 = 0$

$16 + 100u - 25 - 7$

$+ 28u - 17 - 25 = 0$

$128u - 48 = 0$

$\therefore u = \frac{48}{128}$

$= \frac{3}{8}$

よって、 $\vec{OR} = \frac{3}{8}\vec{OB}$

$\vec{OR} = u\vec{OB}$

より

$\vec{OR} = \frac{3}{8}\vec{OB}$

また、線分 OR

が $\vec{OC}$ と $\vec{OB}$ の

延長上に存在する。

$\vec{OC}$ と $\vec{OB}$ の延長上に存在する。

$OR = \frac{3}{8} \times 5$

$= \frac{15}{8}$