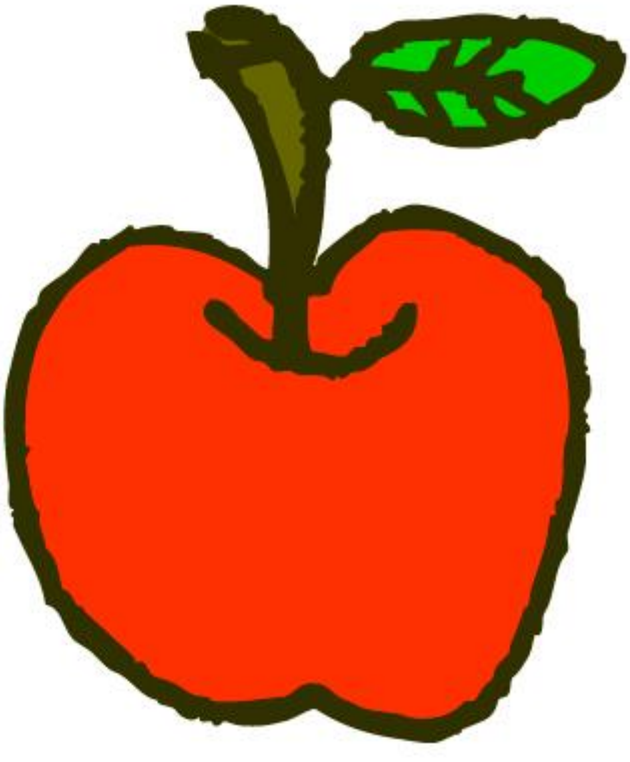
数学発展課題

微分法・積分法



(　　)年(　　)組(　　)番　氏名(　　　　　　　　　　　　)

微分法　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

1 3次関数 $f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+a^3$ の極大値を M，極小値を m とする。ただし，a は定数で，$a>1$ とする。

(1) $f'(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(2) $M-m$ を a で表せ。また，$M-m=8$ のとき，a の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値のとき，方程式 $f(x)=k$ (k は定数) の異なる実数解の個数を k の値によって分類せよ。

微分法　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

2 3次関数 $f(x) = x^3 - ax$ (a は定数) があり，$f'\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) = 0$ である。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値，極小値を求めよ。

(3) xy 平面上で，原点を O とし，点 P の座標を $(p,\ f(p))$ (ただし $p \geqq 1$) とする。$t = p^2$ とおいて，OP^2 を t で表せ。また，OP^2 の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

微分法　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

3 3次関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2 + 2$ がある。ただし，$a > 0$ とする。

（1） $f(x)$ の極大値，極小値を a を用いて表せ。

（2） $a = 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 4$ での $f(x)$ の最大値，最小値および，そのときの x の値を求めよ。

（3） $0 \leqq x \leqq 4$ での $f(x)$ の最大値，最小値を a を用いて表せ。

微分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{4}$ 放物線 $C : y = x(3 - x)$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t(3 - t))$ をとる。
また，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{H}(t,\ 0)$ とし，三角形 OHP の面積を $S(t)$ とする。ただし，$0 < t < 3$ とする。

(1) $S(t)$ を t で表せ。

(2) $S(t)$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。

(3) (2) のとき，点 O と点 P の間にある放物線 C 上に点 Q をとる。四角形 OHPQ の面積の最大値を求めよ。

5 ３次関数 $f(x) = 2x^3 - 3(a-b)x^2 - 6ax + 2$ があり，$f'(-1) = 0$ を満たす。ただし，$a,\ b$ は定数で，$0 < a < 1$ とする。

（1）定数 b の値を求めよ。

（2）$f(x)$ の増減を調べ，極大値 M と極小値 m を a を用いて表せ。

（3）４本の直線 $x = -2$，$x = 2$，$y = 4$，$y = -a^3$ で囲まれた長方形 (周と内部) を D とする。曲線 $y = f(x)$ により長方形 D が４個の部分に分けられるような a の値の範囲を求めよ。

微分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{6}}$ 3次関数 $f(x) = x^3 - ax^2 + ax - 3a$ があり，関数 $g(x)$ を $g(x) = f(x) - xf'(x)$ とする。ただし，a は定数とする。

(1) $f'(x)$，$g(x)$ を求めよ。

(2) $a > 0$ とする。$g(x)$ の極大値，極小値を a を用いて表せ。

(3) $a \neq 0$ とする。方程式 $g(x) = 0$ が異なる実数解を2つだけもつとき，定数 a の値とそのときの実数解を求めよ。

微分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

7 3次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9ax + 9a + 4$ (a，b は定数) があり，$f'(1) = 0$ である。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $a > 0$ で $f(x)$ が極大値 16 をとるとき，a の値とそのときの極小値を求めよ。

(3) $f(x)$ が極大値 $-a^2$ をとるとき，a の値を求めよ。このとき，方程式 $f(x) = ak$ が異なる3つの実数解をもつような定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

8 3次関数 $f(x) = 2x^3 + bx^2 - 6ax + a^2 + 3a$ (a, b は定数) があり，$f'(-1) = 0$ である。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $a > -1$ のとき，$f(x)$ の極大値と極小値を a を用いて表せ。

(3) $x \geqq -1$ における $f(x)$ の最小値が 0 となるような a の値を求めよ。

微分法　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

9 3次関数 $f(x) = -2x^3 + 3ax^2 - 3a + 12$ (a は正の定数) があり，この極小値は正である。

(1) $f(x)$ の極小値を a で表せ。また，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，$M(a)$ を a で表せ。

(3) (2) で求めた $M(a)$ について，$M(a) = k$ となるような a がただ1つ存在するとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

微分法　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

10 3次関数 $f(x)=2x^3+(6a-3)x^2+bx$ (a, b は定数)
があり，$f'(1)=0$ を満たしている。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x=2$ で極値をとる。a の値を求めよ。また，そのときの極小値を求めよ。

(3) (2) のとき, 関数 $f(x)$ の $k \leqq x \leqq k+\dfrac{3}{2}$ における最大値を求めよ。ただし $k>0$ とする。

微分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

11 関数 $f(x)=x^3-4x^2+5x$ がある。

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べて，極値を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 l が原点を通るとき，l の方程式を求めよ。ただし，$t\neq 0$ とする。

(3) (2) のとき，直線 $x=k$ が曲線 $y=f(x)$ および直線 l と交わる点をそれぞれ A, B とし，直線 $x=k+1$ が直線 l と交わる点を C とする。k が $0<k<1$ の範囲で変化するとき，三角形 ABC の面積 S の最大値を求めよ。

微分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

12 3次関数 $f(x) = x^3 - 3ax^2 - 9a^2x + 12a^2$ がある。ただし，a は定数である。

(1) $f'(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。

(2) $a < 0$ とする。$x \geqq 0$ における $f(x)$ の最小値を求めよ。

(3) $a \leqq 0$ とする。$0 \leqq x \leqq 2$ においてつねに $f(x) \geqq 0$ となるような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{13}}$ 3次関数 $f(x) = 2x^3 + (a-3)x^2 - 2ax - a^2 + 3$ がある。ただし，a は定数で，$a > -3$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とするとき，$f'(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の極大値 M を a を用いて表せ。また，極大値 M を与える x の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の極小値が 0 以上であるとき，関数 $f(x)$ の極大値 M のとりうる値の範囲を求めよ。

微分法　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

14 3次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 4 \cdots$ ①と曲線上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^3 - 3t^2 + 4)$ がある。また，点 P における曲線①の接線を $l : y = mx + n$ とする。ただし，$0 < t < 1$ とする。

(1) $m,\ n$ を t を用いてそれぞれ表せ。

(2) 点 $\mathrm{A}(1,\ a)$ が l 上にあるとき，$a > 2$ となることを示せ。

(3) t が $0 < t < 1$ の範囲を動くとき，4直線 $l,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$ で囲まれる四角形の面積の最小値を求めよ。

15 関数 $f(x) = 2x^3 + 3(2-a)x^2 - 12ax - 12a$ がある。ただし，a は正の数である。

(1) $f'(x) = 0$ となる x の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の極大値，極小値を求めよ。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を m とする。m を a で表せ。また，a が $0 < a < 2$ の範囲で変わるとき，m のとりうる値の範囲を求めよ。

微分法　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

16 放物線 $y=x^2-5x+k$ 上の点 $(7,\ k+14)$ における接線を l とする。ただし，k は定数とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) $f(x)=x^3-3x^2-40$ とする。直線 l と曲線 $y=f(x)$ とが異なる 3 点で交わるとき，k の値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，直線 l と曲線 $y=f(x)$ との交点の x 座標を $x_1,\ x_2,\ x_3\ (x_1<x_2<x_3)$ とする。$f'(x_1)$，$f'(x_3)$ の値の正負を調べよ。また，$f'(x_2)<0$ となるような k の値の範囲を求めよ。

17 放物線 $y=(x-3)^2\cdots$①があり，①上の点 A(1, 4) における接線を l とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) A において放物線 $y=-px^2+q\cdots$②が直線 l に接するとき，p, q の値を求めよ。

(3) (2) のとき，①と②および y 軸とで囲まれる部分の面積を S とする。また，①と②および x 軸の正の部分とで囲まれる部分の面積を T とする。S と T の値を求めよ。

積分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

18 放物線 $C_1 : y = -x^2 - x + 2$ がある。

(1) C_1 と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(2) C_1 上の点 P の x 座標を t とする。点 P における C_1 の接線 l の方程式を t を用いて表せ。

(3) 放物線 $C_2 : y = x^2 + x - 2$ がある。(2) で求めた l と C_2 との 2 つの交点の x 座標の和が 0 であるとき，t の値を求めよ。またそのとき，l と C_2 で囲まれる図形のうち，C_1 の上方にある部分の面積を求めよ。

19 放物線 $C: y = x^2 - 2x - 3$ がある。C 上に点 $\mathrm{P}(p,\ p^2 - 2p - 3)$ (ただし，$p > 0$) をとり，P における C の接線を l とする。また，C と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_1，C と l と y 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) S_1 を求めよ。

(3) $S_1 : S_2 = 4 : 1$ のとき，p の値を求めよ。

20 3次関数 $f(x) = x^3 - 3x$ がある。曲線 $C_1 : y = f(x)$ 上で y が極大となる点を A，極小となる点を B とする。

(1) $f(x)$ の増減を調べよ。また，A と B の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 放物線 $C_2 : y = ax^2 + bx + c$ (a，b，c は定数) がある。C_2 は点 A および C_1 上の点 T(2，2) を通る。さらに T における曲線 C_1，C_2 の接線が一致する。このとき，a，b，c の値を求めよ。

(3) (2) のとき，直線 AB と放物線 C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ。

21 O を原点とする座標平面上に，
放物線 $C : y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ がある。放物線 C と y 軸との交点を A，x 軸と正の部分との交点を B とする。

(1) 直線 AB の傾きを求めよ。

(2) 放物線 C 上の点 P における接線が直線 AB に平行なとき，直線 OP の方程式を求めよ。

(3) 放物線 C と x 軸で囲まれた部分のうち，y 軸の右側にある部分を D とすると，D は (2) の直線 OP によって 2 つの部分に分けられる。この 2 つの部分のうち直線 OP の上側にある部分の面積を S_1，下側にある部分の面積を S_2 とするとき，$S_1 : S_2$ を最も簡単な整数比で表せ。

積分法　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

22 曲線 $C : y = x(2-x)$ 上の点 A$(2,\ 0)$ における接線を l とする。また，曲線 C 上を動く点 P$(t, t(2-t))$ における接線を m とし，2 直線 l, m の交点を Q とする。ただし，$0 < t < 2$ とする。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(2) 直線 m の方程式を求めよ。また，点 Q の x 座標を t を用いて表せ。

(3) 曲線 C，直線 m，y 軸で囲まれた部分の面積を S_1，曲線 C，直線 l，直線 m で囲まれた部分の面積を S_2 とし，$S = S_1 + S_2$ とする。S の最小値と，そのときの t の値を求めよ。

積分法

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{23}}$ 放物線 $C : y = x^2$ がある。

（1） C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。

（2） 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$ から C に 2 本の接線を引く。このときの接点の x 座標を求めよ。

（3） (2) の 2 本の接線と C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

積分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

24 直線 $l : y = -2x + 4$ と放物線 $C : y = \dfrac{3}{2}x^2 - x$ との２つの交点を A，B とする。ただし，A の x 座標は B の x 座標よりも大きいものとする。また，放物線 C と x 軸との２つの交点のうち，原点でない方の点を D とする。

(1) 点 A，B の座標を求めよ。

(2) 線分 BD と放物線 C で囲まれる図形の面積を S とする。S の値を求めよ。

(3) 線分 AB 上の点を P とし，２つの線分 AP，DP と放物線 C で囲まれる図形の面積を T とする。(2) の S に対して，$S = 4T$ であるとき，点 P の座標を求めよ。

25 放物線 $C : y = -x^2 + 2x + 15$ 上に，x 座標が t である点 P をとる。ただし，$0 < t < 5$ とする。また，点 P を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点を Q とする。

（1）三角形 OPQ の面積を t を用いて表せ。

（2）三角形 OPQ の面積が最大となる t の値と，面積の最大値を求めよ。

（3）放物線 C の頂点を A とする。t が (2) の値をとるとき，２つの線分 OP，OA および放物線 C とで囲まれる図形の面積を求めよ。

積分法　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

26 ２つの放物線 $y=x^2\cdots$①と $y=-x^2+4x+6\cdots$②
があり，交点をA，Bとする。ただし，Aの x 座標の方
がBの x 座標よりも大きいものとする。

（1）点A，Bの座標を求めよ。

（2）(1)の点A，Bにおける放物線①の接線の方程式をそれぞれ求めよ。

（3）(2)のとき，２本の接線の交点をCとする。線分AC，線分BCと放物線②で囲まれた図形を D とするとき，D の面積を求めよ。

積分法　平成＿＿年＿＿月＿＿日

27 放物線 $C : y = 1 - x^2$ と y 軸に平行な 2 直線 $l : x = a$, $m : x = a + 1$ がある。ただし，$0 < a < 1$ とする。

(1) 直線 l よりも右側で，直線 l と放物線 C および x 軸で囲まれる図形の面積を S_1 とする。S_1 を a を用いて表せ。

(2) 直線 m と放物線 C および x 軸で囲まれる図形の面積を S_2 とする。(1) の S_1 について，$S = S_1 + S_2$ とするとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ

28 関数 $f'(x) = -3x^2 + 12kx - 9k^2$，$f(0) = 3$ を満たしている。ただし，k は正の定数である。

(1) $f(x)$ を k を用いて表せ。

(2) $f(x)$ の極小値が -1 のとき，k の値および極大値を求めよ。

(3) (2) のとき，$3 - a \leqq x \leqq 3 + a$ $(a > 0)$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

積分法

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{29}}$ 2つの放物線 $C_1 : y = ax^2$, $C_2 : y = -b(x-1)^2 + 1$ はただ1つの共有点をもつとする。ただし，a, b は $a > 1$, $b > 1$ を満たす定数とする。

(1) a, b が満たす等式を求めよ。

(2) 平面上の4点を O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1) とし，C_1 と線分 OC, BC とで囲まれる図形の面積を S とする。このとき，S を a を用いて表せ。

(3) (2) のとき，C_2 と線分 OA, AB とで囲まれる図形の面積を T とする。$S : T = 2 : 1$ であるとき，a, b の値を求めよ。

微分法

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{30}}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to -4} \frac{x^3 + 4x^2 + 2x + 8}{x^2 + x - 12}$

(3) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2 - x} - \frac{1}{2 + x^2}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x + 1} - 2}{x - 3}$

微分法　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

31 次の極限値を a, $f(a)$, $f'(a)$ などを用いて表せ。

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h}$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a-4h)}{h}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^3f(x)-a^3f(a)}{x^2-a^2}$

32 等式

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 3$$

を満たす定数 a, b の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{33}}$ 曲線 $C : y = x^3 + 3x^2 + x$ と点 A$(1,\ a)$ がある。A を通って C に 3 本の接線が引けるとき，定数 a の値を求めよ。

34 4次関数

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 5$$

の極値を求めよ。また，$y = f(x)$ のグラフを書け。

積分法　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{35}}$ 曲線 $y=(x+1)(x-2)^4$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

積分法　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

36 次の直線や曲線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=-y^2+2y-2$, y 軸, $y=-1$, $y=2$

(2) $x=y^2-3y$, $y=x$

積分法　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

37 $f(t) = \int_0^1 |x^2 - tx|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

38 点 $(1,\ 2)$ を通る直線 l と放物線 $y=x^2-x+1$ で囲まれる部分の面積を S とする。S の最小値とそのときの直線 l の方程式を求めよ。

$\boxed{\mathbf{39}}$ a を定数とする。放物線 $y = x(2-x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が，直線 $y = ax$ によって 2 等分されるときの a の値を求めよ。

40 k は定数 $0 < k < 1$ を満たす定数とする。曲線 $C : y = x^3 - 2x^2 + x$ と直線 $l : y = k^2 x$ について，以下の問いに答えよ。

（1）曲線 C と直線 l の交点の x 座標を求めよ。

（2）曲線 C と直線 l で囲まれた部分は２つ存在する。これら２つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{41}}$ 放物線 $y=x^2-4x+3$ を C とする。C 上の点 $(0,\ 3)$, $(6,\ 15)$ における接線をそれぞれ $l_1,\ l_2$ とする。このとき，放物線 C と 2 直線 $l_1,\ l_2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。

積分法

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{42}}$ 曲線 $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 6$ とその曲線上の点 $(3,\ -6)$ における接線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。