①

(1)

$$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+a^3$$

$$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a$$

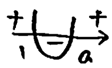
$$=6\{x^2-(a+1)x+a\}$$

$$=6(x-a)(x-1)$$

よって $f'(x)=0$ となる x は $x=a,\ 1$

(2) 問題文より $a>1$ であるから

増減表は



x	$\cdots$	1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

よって

$$M=f(1)$$
$$=2\cdot1^3-3(a+1)\cdot1^2+6a\cdot1+a^3$$
$$=2-3a-3+6a+a^3$$
$$=a^3+3a-1$$

$$m=f(a)$$
$$=2a^3-3(a+1)\cdot a^2+6a\cdot a+a^3$$
$$=2a^3-3a^3-3a^2+6a^2+a^3$$
$$=3a^2$$

ゆえに

$$M-m=(a^3+3a-1)-3a^2$$
$$=a^3-3a^2+3a-1$$

また、$M-m=8$ となる a の値は

$$a^3-3a^2+3a-1=8$$
$$a^3-3a^2+3a-9=0$$

ここで

$$P(a)=a^3-3a^2+3a-9$$

とおくと

$$P(3)=3^3-3\cdot3^2+3\cdot3-9$$
$$=27-27+9-9=0$$

よって $P(a)$ は $a-3$ で割り切れる

1	-3	3	-9	$\lfloor 3$
	3	0	9	
1	0	3	$\mid 0$	

$$P(a)=(a-3)(a^2+3)$$

よって

$$(a-3)(a^2+3)=0$$

a は実数より $a^2+3\neq0$

ゆえに $a=3$

余

$$M-m=a^3-3a^2+3a-1$$
$$=(a-1)^3$$

であることに気付くと

a は実数より

$$(a-1)^3=8\ \rightarrow\ (a-1)^3=2^3$$
$$\rightarrow\ a-1=2$$
$$\rightarrow\ a=3.$$

また、$(a-1)^3$ になる理由は

$$M-m=f(1)-f(a)$$
$$=\Big[f(x)\Big]_a^1$$
$$=\int_a^1 f'(x)\,dx$$
$$=\int_a^1 6(x-1)(x-a)\,dx$$
$$=-6\int_1^a (x-1)(x-a)\,dx$$
$$=-6\left(-\frac{1}{6}\right)(a-1)^3$$
$$=(a-1)^3$$

である。

(3)

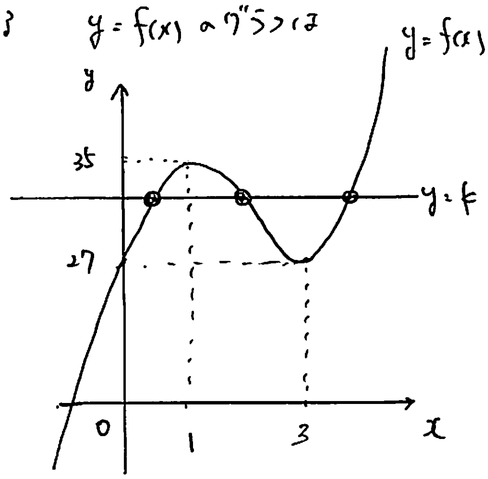
$a=3$ のとき

$$f(x)=2x^3-12x^2+18x+27$$

増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	35	$\searrow$	27	$\nearrow$

$y=f(x)$ のグラフは



方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は

2つのグラフ

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$$

の異なる交点の個数に等しい

グラフより

$k>35,\ k<27$ … 1個

$k=27,\ 35$ … 2個

$27<k<35$ … 3個

2

(1)

$f(x)=x^3-ax$ より

$f'(x)=3x^2-a$

問題文より $f'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=0$

よって

$f'\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=3\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2-a$

$=3\times\frac{6}{9}-a$

$=3\times\frac{2}{3}-a$

$=2-a$

ゆえに $2-a=0$ $\therefore a=2$

(2)

$f(x)=x^3-2x$

$f'(x)=3x^2-2$

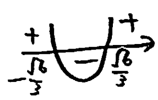
$=3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)$

$=3\left(x+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$=3\left(x+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(x-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$f'(x)=0$ となる x は

$x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$



増減表は

x	…	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	…	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	↘	$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	↗

ここで

$f\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3-2\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

$=-\frac{6\sqrt{6}}{27}+\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$=-\frac{2\sqrt{6}}{9}+\frac{6\sqrt{6}}{9}$

$=\frac{4}{9}\sqrt{6}$

$f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^3-2\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

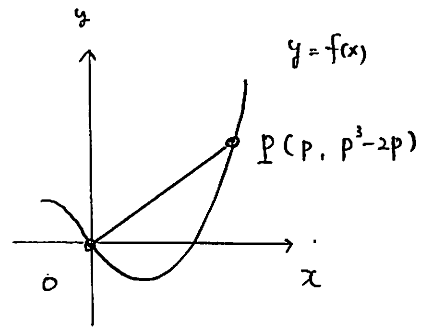
$=\frac{6\sqrt{6}}{27}-\frac{2}{3}\sqrt{6}=-\frac{4}{9}\sqrt{6}$

以上より

極大値 $\frac{4}{9}\sqrt{6}$ $\left(x=-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

極小値 $-\frac{4}{9}\sqrt{6}$ $\left(x=\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

(3)



$P(p, f(p))$ とするとき

$f(p)=p^3-2p$ より

$P(p, p^3-2p)$ となる。

よって

$OP^2=(p-0)^2+(p^3-2p-0)^2$

$=p^2+(p^3)^2-2\cdot p^3\cdot 2p+(2p)^2$

$=p^2+p^6-4p^4+4p^2$

$=p^6-4p^4+5p^2$

ここで $t=p^2$ とおくと

$OP^2=(p^2)^3-4(p^2)^2+5p^2$

$=t^3-4t^2+5t$

となる。$p\geqq 1$ より $p^2\geqq 1$

つまり $t\geqq 1$ である。

ゆえに

$g(t)=t^3-4t^2+5t$ $(t\geqq 1)$

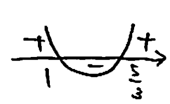
とおくと

$g'(t)=3t^2-8t+5$

$=(3t-5)(t-1)$

$g'(t)=0$ となる t は

$t=\frac{5}{3}, 1$



増減表は $t\geqq 1$ より

t	1	…	$\frac{5}{3}$	…
$g'(t)$	/	−	0	+
$g(t)$	/	↘	最小	↗

$g(t)=OP^2$ の最小値は

$t=\frac{5}{3}$ の時より

$g\left(\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^3-4\left(\frac{5}{3}\right)^2+5\cdot\frac{5}{3}$

$=\frac{125}{27}-\frac{100}{9}+\frac{25}{3}$

$=\frac{125}{27}-\frac{300}{27}+\frac{225}{27}$

$=\frac{50}{27}$

そのときの t は $t=\frac{5}{3}$

よって $p^2=\frac{5}{3}$

$p=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$

$p\geqq 1$ より $p=-\frac{\sqrt{15}}{3}$ は不適

点Pの座標は

$f\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{15}}{3}\right)^3-2\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}$

$=\frac{15\sqrt{15}}{27}-\frac{2}{3}\sqrt{15}$

$=\frac{5}{9}\sqrt{15}-\frac{6}{9}\sqrt{15}$

$=-\frac{1}{9}\sqrt{15}$

以上より

$P\left(\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{15}}{9}\right)$ の時

OP^2 は最小値 $\frac{50}{27}$

をとる。

3

(1)

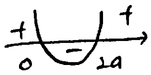
$f(x)=x^3-3ax^2+3a^2+2$

$f'(x)=3x^2-6ax$

$=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$ となるのは $x=0,\ 2a$

$a>0$ より $2a>0$



増減表より

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(0)$	↘	$f(2a)$	↗

$f(0)=0^3-3a\cdot 0^2+3a^2+2$

$=3a^2+2$

$f(2a)=(2a)^3-3a(2a)^2+3a^2+2$

$=8a^3-12a^3+3a^2+2$

$=-4a^3+3a^2+2$

以上より

極大値 $3a^2+2$ $(x=0)$

極小値 $-4a^3+3a^2+2$ $(x=2a)$

(2)

$a=1$ の時 $0\leqq x\leqq 4$ における増減表より

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	/	$-$	0	$+$	/
$f(x)$	5	↘	1	↗	21

$f(4)=4^3-3\cdot 4^2+3\cdot 1^2+2$

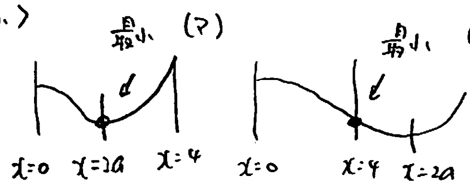
$=64-48+3+2$

$=21$

最大値 21 $(x=4)$

最小値 1 $(x=2)$

(3) 〈最小〉



極小値が定義域内に入るかどうかで場合分け。

(ア) $0<2a<4$ つまり $0<a<2$ の時

$x=2a$ で最小となる

最小値 $f(2a)=-4a^3+3a^2+2$

(イ) $4\leqq 2a$ つまり $2\leqq a$ の時

$x=4$ で最小となる

最小値 $f(4)=4^3-3a\cdot 4^2+3a^2+2$

$=64-48a+3a^2+2$

$=3a^2-48a+66$

〈最大〉

上記の(イ)の場合は $x=0$ で最大となる。(ア)の場合は $x=0$ か $x=4$ のどちらかであるので差をとって考える

$f(0)-f(4)$

$=(3a^2+2)-(3a^2-48a+66)$

$=48a-64$

よって

・$48a-64\geqq 0$ (つまり $a\geqq \frac{4}{3}$)

の時 $f(0)-f(4)\geqq 0$

よって $f(0)\geqq f(4)$ より 最大値は $f(0)$

・$48a-64<0$ (つまり $0<a<\frac{4}{3}$)

の時 $f(0)-f(4)<0$

よって $f(0)<f(4)$ より

最大値は $f(4)$ である。

以上より

・$0<a<\frac{4}{3}$ の時

最大値 $3a^2-48a+66$

最小値 $-4a^3+3a^2+2$

・$\frac{4}{3}\leqq a<2$ の時

最大値 $3a^2+2$

最小値 $-4a^3+3a^2+2$

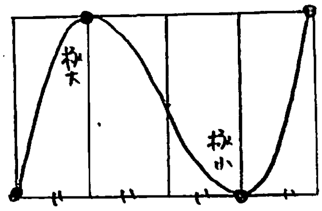
・$2\leqq a$ の時

最大値 $3a^2+2$

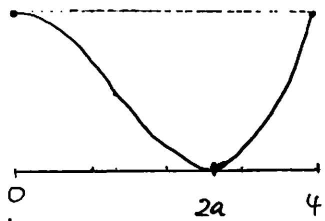
最小値 $3a^2-48a+66$

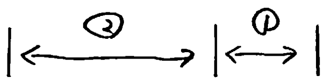
別

3次関数のグラフは下図のように4等分できる



よって〈最大〉について $f(0)=f(4)$ となる a の値についても、$f(0)$ が極大であることを考えると

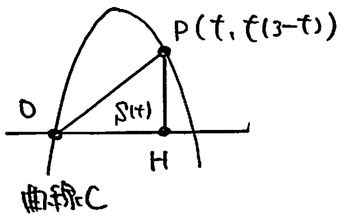




$x=0$ から $x=4$ までを $2:1$ に内分する点で極小 つまり $x=2a$ となるので

$2a=4\times\frac{2}{3}$ よって $a=\frac{4}{3}$.

4



(1)

△OHPの面積$S(t)$は

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot OH\cdot PH$$

によって計算される。

ここで、$H(t,0)$より

$$OH=t$$

であり、また$P(t,\ t(3-t))$より

$$PH=t(3-t)$$

である。したがって

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot t(3-t)$$

$$=\frac{1}{2}t^2(3-t)$$

(2)

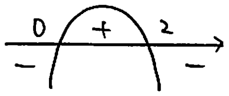
$$S(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}t^3$$

よって微分して

$$S'(t)=3t-\frac{3}{2}t^2$$

$$=-\frac{3}{2}t(t-2)$$

となる。$S'(t)$のグラフは下図



$S'(t)=0$となるのは$t=0,2$

よって$0<t<3$において増減表を書くと

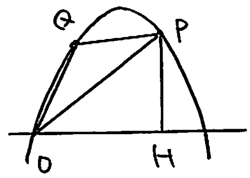
t	0	…	2	…	3
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	最大	↘	

よって、$S(t)$は$t=2$の時に最大

ここで、$t=2$の時の点Pの座標は

$$P(2,2)$$

(3)



四角形OHPQの面積をTとする。すると

$$T=\triangle OHP+\triangle OPQ$$

となる。ここで

△OHPの面積は

$H(2,0)$, $P(2,2)$より

$$\triangle OHP=\frac{1}{2}\cdot OH\cdot PH$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2$$

$$=2$$

ゆえにTが最大となるのは△OPQの面積が最大となるときである。 …(※)

ここで OPの長さは

$$OP=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

また、点Qのx座標をsとする。つまり$Q(s,\ s(3-s))$とする。ここで、点Qは点Oと点Pの間の放物線C上の点なので$0<s<2$が成り立つ。

そして、点Qから線分OPに下ろした垂線の長さをdとするとdは点Qと直線OPの距離に等しい。点$P(2,2)$より OPの式は

$$y=\frac{2}{2}x \quad \text{つまり}\quad x-y=0.$$

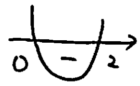
よって

$$d=\frac{|s-s(3-s)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|s-3s+s^2|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}|s^2-2s|$$

ここで$0<s<2$より$s(s-2)$は負の値をとる。



ゆえに

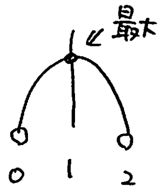
$$d=\frac{1}{\sqrt{2}}\{-(s^2-2s)\}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}(s^2-2s)$$

よって

$$\triangle OPQ=\frac{1}{2}\cdot OP\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(s^2-2s)$$



$$=-s^2+2s$$

$$=-(s^2-2s)$$

$$=-\{(s-1)^2-1\}$$

$$=-(s-1)^2+1$$

$0<s<2$より△OPQは$s=1$の時最大値1となる。

以上より 四角形OHPQの面積Tの最大値は

$$T=\triangle OHP+\triangle OPQ=2+1=3$$

(別) (※)まで同じ。

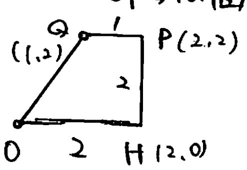
△OPQの面積が最大となる点Qは点Qにおける接線が直線OPと平行になるときである。点Qのx座標をsとすると 点Qにおける接線の傾きは$y=-x^2+3x$で$y'=-2x+3$より$y'=-2s+3$となる。

直線OPの傾きは1より

$$-2s+3=1$$

$$\therefore\ s=1$$

したがって、$Q(1,2)$の時△OPQは面積最大となる。



四角形は台形となるので面積は

$$\frac{1}{2}(1+2)\cdot 2=3$$

5

(1)

$f(x) = 2x^3 - 3(a-b)x^2 - 6ax + 2$

より

$f'(x) = 6x^2 - 6(a-b)x - 6a$

問題文より

$f'(-1) = 6(-1)^2 - 6(a-b)(-1) - 6a$

$= 6 + 6a - 6b - 6a$

$= 6 - 6b = 0$

よって $b = 1$

(2)

$f(x) = 2x^3 - 3(a-1)x^2 - 6ax + 2$

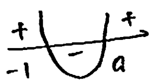
$f'(x) = 6x^2 - 6(a-1)x - 6a$

$= 6\{x^2 - (a-1)x - a\}$

$= 6(x+1)(x-a)$

よって $f'(x)=0$ となる x は

$x = -1,\ a$

ここで $0<a<1$ より 

増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	M	↘	m	↗
		極大		極小	

極大値 $M = f(-1)$

$= 2(-1)^3 - 3(a-1)(-1)^2 - 6a(-1) + 2$

$= -2 - 3a + 3 + 6a + 2$

$= 3a + 3$

極小値 $m = f(a)$

$= 2a^3 - 3(a-1)a^2 - 6a\cdot a + 2$

$= 2a^3 - 3a^3 + 3a^2 - 6a^2 + 2$

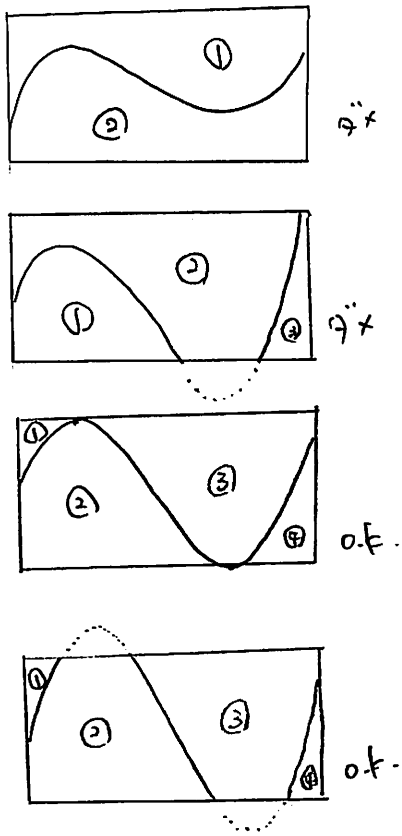
$= -a^3 - 3a^2 + 2$

以上より

$M = 3a + 3 \quad (x=-1)$

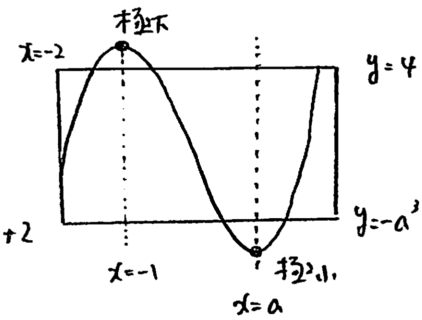
$m = -a^3 - 3a^2 + 2 \quad (x=a)$

(3)



長方形が4個の部分に分けられるためには.

長方形内に境界線が3本入ればいい。



極大値と極小値が長方形からはみ出せばいいので

極大値 ≧ 4 かつ 極小値 ≦ $-a^3$

つまり

$M \geqq 4$ かつ $m \leqq -a^3$

(2)の結果より

$$\begin{cases} 3a + 3 \geqq 4 & \cdots (ア) \\ -a^3 - 3a^2 + 2 \leqq -a^3 & \cdots (イ) \end{cases}$$

(ア)より

$3a \geqq 1 \quad \therefore a \geqq \frac{1}{3}$

(イ)より

$-3a^2 + 2 \leqq 0$

$3a^2 - 2 \geqq 0$

$a^2 - \frac{2}{3} \geqq 0$

$\left(a - \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\left(a + \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \geqq 0$

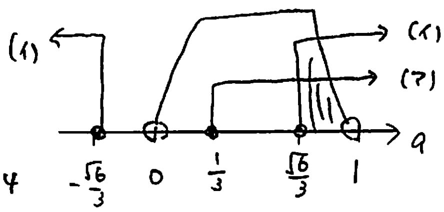
$\left(a - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\left(a - \frac{\sqrt{6}}{3}\right) \geqq 0$

よって $a \leqq -\frac{\sqrt{6}}{3},\ a \geqq \frac{\sqrt{6}}{3}$

また. 問題文より

$0<a<1$ であることも

あわせて. 共通部分より



$\frac{\sqrt{6}}{3} \leqq a < 1$

[6]

(1)

$f(x) = x^3 - ax^2 + ax - 3a$

より

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a$ //

また

$g(x) = f(x) - xf'(x)$

$= (x^3 - ax^2 + ax - 3a) - x(3x^2 - 2ax + a)$

$= x^3 - ax^2 + ax - 3a - 3x^3 + 2ax^2 - ax$

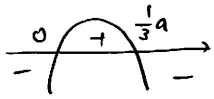
$= -2x^3 + ax^2 - 3a$ //

(2)

$g'(x) = -6x^2 + 2ax$

$= -6x(x - \frac{1}{3}a)$

$a > 0$ より $\frac{1}{3}a > 0$.



増減表は

x	…	0	…	$\frac{1}{3}a$	…
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

極大値 $g(\frac{1}{3}a) = -2(\frac{1}{3}a)^3 + a(\frac{1}{3}a)^2 - 3a$

$= -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - 3a$

$= \frac{1}{27}a^3 - 3a$

極小値 $g(0) = -2\cdot 0^3 + a\cdot 0^2 - 3a$

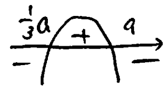
$= -3a$

以上より

極大値 $\frac{1}{27}a^3 - 3a$ $(x = \frac{1}{3}a)$ 極小値 $-3a$ $(x = 0)$ //

(3)

$a < 0$ の時は



x	…	$\frac{1}{3}a$	…	0	…
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって 極小値 $g(\frac{1}{3}a)$, 極大値 $g(0)$

したがって $a \neq 0$ の時は、極大値、極小値は

$g(\frac{1}{3}a)$, $g(0)$ のどちらかになる。

方程式 $g(x) = 0$ が実数解を 2つもつときは

極大値 × 極小値 = 0 となるので、

$(\frac{1}{27}a^3 - 3a) \times (-3a) = 0$

$\frac{1}{27}a(a^2 - 81) \times (-3a) = 0$

$\frac{1}{9}a^2(a^2 - 81) = 0$. $a \neq 0$ より $a^2 - 81 = 0$

よって $a = \pm 9$

・$a = 9$ の時.

x	…	0	…	3	…
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	↘	−27	↗	0	↘

($x = 3$ で $y = g(x)$ は x軸に接する.)

$$\begin{array}{r} 2x + 3 \\ x^2 - 6x + 9 \overline{)\, 2x^3 - 9x^2 \qquad + 27} \\ 2x^3 - 12x^2 + 18x \\ \hline 3x^2 - 18x + 27 \\ 3x^2 - 18x + 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

方程式 $g(x) = 0$ は

$-2x^3 + 9x^2 - 27 = 0$.

$2x^3 - 9x^2 + 27 = 0$

左辺は $(x-3)^2$ で割り切れるので

割り算して、因数分解すると

$(2x+3)(x-3)^2 = 0$ よって $x = -\frac{3}{2}, 3$

・$a = -9$ の時.

x	…	−3	…	0	…
$g'(x)$	−	0	+	0	−
$g(x)$	↘	0	↗	27	↘

($x = -3$ で $y = g(x)$ は x軸に接する)

$$\begin{array}{r} 2x - 3 \\ x^2 + 6x + 9 \overline{)\, 2x^3 + 9x^2 \qquad - 27} \\ 2x^3 + 12x^2 + 18x \\ \hline -3x^2 - 18x - 27 \\ -3x^2 - 18x - 27 \\ \hline 0 \end{array}$$

方程式 $g(x) = 0$ は

$-2x^3 - 9x^2 + 27 = 0$

$2x^3 + 9x^2 - 27 = 0$

左辺は $(x+3)^2$ で割り切れる.

$(2x-3)(x+3)^2 = 0$ よって $x = \frac{3}{2}, -3$

以上より

$a = 9$ の時 $x = -\frac{3}{2}, 3$, $a = -9$ の時 $x = \frac{3}{2}, -3$ //

7

(1)

$f(x)=ax^3+bx^2-9ax+9a+4$

より

$f'(x)=3ax^2+2bx-9a$

ここで問題文より $f'(1)=0$ より

$f'(1)=3a\cdot1^2+2b\cdot1-9a=0$

$3a+2b-9a=0$

$2b-6a=0$

$2b=6a$

よって $b=3a$

(2)

$f(x)=ax^3+3ax^2-9ax+9a+4$

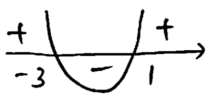
より

$f'(x)=3ax^2+6ax-9a$

$=3a(x^2+2x-3)$

$=3a(x-1)(x+3)$

$a>0$ より 下に凸 の放物線



増減表

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値

$f(-3)=a(-3)^3+3a(-3)^2-9a(-3)+9a+4$

$=-27a+27a+27a+9a+4$

$=36a+4$

問題文より 極大値が 16 より

$36a+4=16$

$36a=12$

$a=\frac{1}{3}$ ($a>0$を満たす)

このとき、極小値は $f(1)$ より

$f(1)=a+3a-9a+9a+4$

$=4a+4$

$a=\frac{1}{3}$ を代入して

$4\times\frac{1}{3}+4=\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$

(3)

・$a>0$ の時

極大値は $f(-3)$ より

$f(-3)=36a+4$

よって問題文より

$36a+4=-a^2$

$a^2+36a+4=0$

$a=-18\pm\sqrt{18^2-4}$

しかし、これらは

ともに $a>0$ を

満たさず不適。

・$a=0$ の時

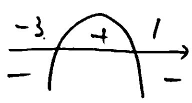
$f(x)=4$ となり

極値をもたず不適

・$a<0$ の時

$f'(x)=3a(x-1)(x+3)$

$a<0$ より上に凸 の放物線



増減表

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

極大値は $f(1)$ より

$f(1)=4a+4$

よって問題文より

$4a+4=-a^2$

$a^2+4a+4=0$

$(a+2)^2=0$ $a=-2$

これは $a<0$ を満たす

このとき、$f(x)=-2k$ が

異なる3つの実数解をもつような

kの範囲は 2つのグラフ

$\begin{cases} y=f(x) \\ y=-2k \end{cases}$

が異なる3つの交点をもつkの範囲を

考える。$f(x)$ について

$f(x)=-2x^3-6x^2+18x-14$

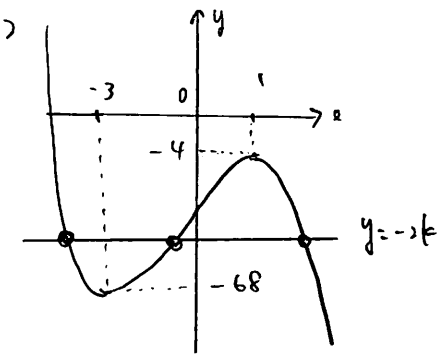
$f'(x)=-6x^2-12x+18$

$=-6(x+3)(x-1)$

増減表

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-68	↗	-4	↘

グラフ



よって

$-68<-2k<-4$

つまり

$34>k>2$

よって

$2<k<34$

ならばよい。

8

(1)

$f(x)=2x^3+bx^2-6ax+a^2+3a$

より

$f'(x)=6x^2+2bx-6a$

問題文より $f'(-1)=0$ より

$f'(-1)=6(-1)^2+2b(-1)-6a=0$

$6-2b-6a=0$

$-2b=6a-6$

よって $\underline{b=-3a+3}$

(2)

$f(x)=2x^3+(-3a+3)x^2-6ax+a^2+3a$

$=2x^3-3(a-1)x^2-6ax+a^2+3a$

よって

$f'(x)=6x^2-6(a-1)x-6a$

$=6\{x^2-(a-1)x-a\}$

$=6(x-a)(x+1)$

$f'(x)=0$ となる x は $x=a,-1$

条件より $a>-1$ より

増減表

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値

$f(-1)=2(-1)^3-3(a-1)(-1)^2-6a(-1)+a^2+3a$

$=-2-3a+3+6a+a^2+3a$

$=a^2+6a+1$

極小値

$f(a)=2a^3-3(a-1)a^2-6a\cdot a+a^2+3a$

$=2a^3-3a^3+3a^2-6a^2+a^2+3a$

$=-a^3-2a^2+3a$

以上より

極大値 a^2+6a+1 $(x=-1)$

極小値 $-a^3-2a^2+3a$ $(x=a)$

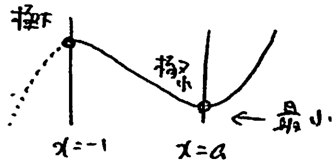
(3)

$x\geqq-1$ における最小値は

極小値の位置によって場合分け

・$a>-1$ のとき

$x=a$ の方が、$x=-1$ より右側にあるので



$x=a$ の時に最小となる。

最小値は $f(a)=-a^3-2a^2+3a$

よって 最小値が 0 になるので

$-a^3-2a^2+3a=0$

$-a(a^2+2a-3)=0$

$a(a+3)(a-1)=0$

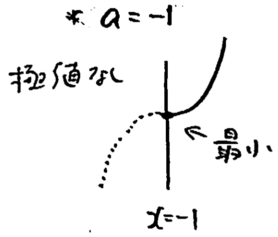
$a=0,-3,1$

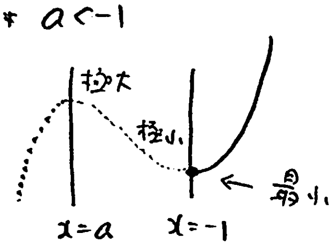
$a>-1$ を満たすのは $a=0,1$

・$a\leqq-1$ のとき

$x=a$ の方が $x=-1$ より左側にあるので

* $a=-1$ 　　* $a<-1$





$x=-1$ の時に最小になる。

最小値は $f(-1)=a^2+6a+1$

よって 最小値が 0 になるので

$a^2+6a+1=0$

$2b'=6$
$b'=3$

$a=-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot1}$

$=-3\pm2\sqrt{2}$

($\sqrt{2}\fallingdotseq1.4$ とすると
$-3-2\sqrt{2}\fallingdotseq-5.8$
$-3+2\sqrt{2}\fallingdotseq-0.2$)

$a\leqq-1$ を満たすのは

$a=-3-2\sqrt{2}$

以上より

$\underline{a=0,\ 1,\ -3-2\sqrt{2}}$

9

(1)

$f(x) = -2x^3 + 3ax^2 - 3a + 12$

より

$f'(x) = -6x^2 + 6ax$

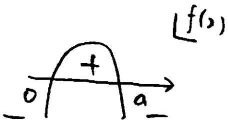
$= -6x(x-a)$

$f'(x)=0$ となる x は $x = 0, a$

問題文より a は正の定数より

$a>0$ であるから、

増減表は



x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって $x=a$ の時 極大 となるので

極小値は

$f(0) = -2\cdot 0^3 + 3a\cdot 0^2 - 3a + 12$

$= -3a + 12$

また、問題文より、極小値は正で

あるので、$x=0$ の時 極小より

$f(0) > 0$

$-3a + 12 > 0$ より $a < 4$

よって $a>0$ とあわせて $0<a<4$

(2)

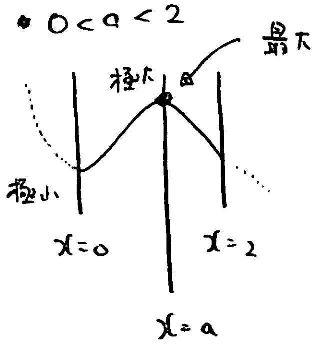
$x=0$ のときに極小である。

また $x=a$ の時に極大であるから、

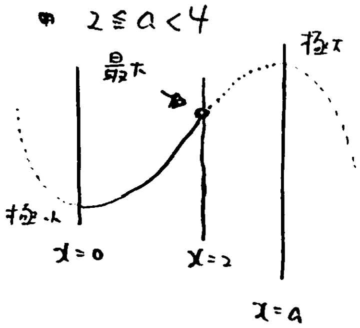
極大が定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ に入るかどうか

で場合分けをする

・$0<a<2$



・$2 \leqq a < 4$



・$0<a<2$ の時

図より $x=a$ で最大をとる。

最大値は $f(a) = -2a^3 + 3a\cdot a^2 - 3a + 12$

$= a^3 - 3a + 12$

・$2 \leqq a < 4$ の時

図より $x=2$ で最大をとる。

最大値は

$f(2) = -2\times 2^3 + 3a\times 2^2 - 3a + 12$

$= -16 + 12a - 3a + 12$

$= 9a - 4$

以上より

$$M(a) = \begin{cases} a^3 - 3a + 12 & (0<a<2) \\ 9a - 4 & (2 \leqq a < 4) \end{cases}$$

(3)

$M(a) = k$ となる k が

ただ1つ存在するのは

2つのグラフ

$$\begin{cases} y = M(a) \\ y = k \end{cases}$$

がただ1つの交点をもつとき

である。よって $y = M(a)$ のグラフ

を考える。

$y = M(a)$ のグラフは

$0<a<2$ の範囲での $y = a^3 - 3a + 12$

のグラフ

と

$2 \leqq a < 4$ の範囲での $y = 9a - 4$

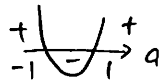
のグラフ

をくっつけたものである。

$y = a^3 - 3a + 12$ $(0<a<2)$ のグラフは

$y' = 3a^2 - 3$

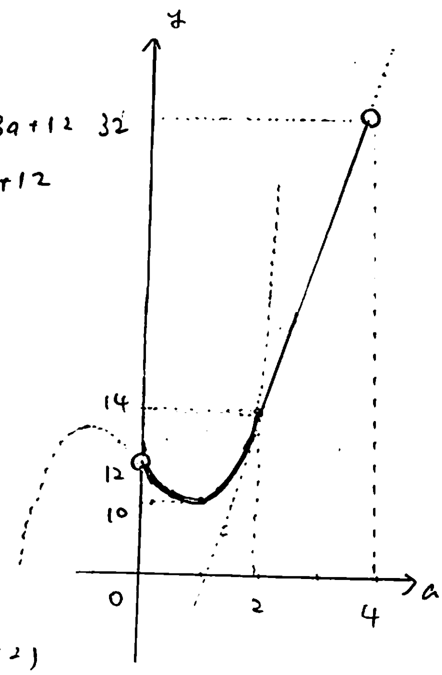
$= 3(a+1)(a-1)$



より $0<a<2$ の範囲で増減表

書くと

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'	／	$-$	0	$+$	／
y	12	$\searrow$	10	$\nearrow$	14



$y = 9a - 4$ は傾き9の直線

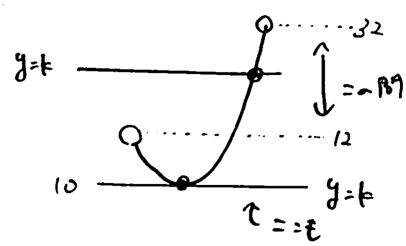
より 2つのグラフをくっつけて

$y = M(a)$ のグラフを書くと

上記の通りである。

このグラフと直線 $y=k$

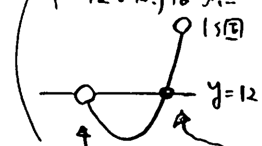
の交点が1つになるのは



$k = 10$,

$12 \leqq k < 32$

注 $k=12$ の時は交点



白丸(カウントしない)

黒丸(カウントする)

10

(1)

$f(x) = 2x^3 + (6a-3)x^2 + bx$

よって

$f'(x) = 6x^2 + 2(6a-3)x + b$

問題文より $f'(1)=0$ より

$f'(1) = 6\cdot 1^2 + 2(6a-3)\cdot 1 + b = 0$

$6 + 12a - 6 + b = 0$

$b = -12a$ //

(2)

$f(x) = 2x^3 + (6a-3)x^2 - 12ax$

よって

$f'(x) = 6x^2 + 2(6a-3)x - 12a$

$= 6x^2 + 6(2a-1)x - 12a$

$= 6\{x^2 + (2a-1)x - 2a\}$

$x=2$ で極値をとるので $f'(2)=0$ である。

よって $f'(2) = 6\{2^2 + (2a-1)\cdot 2 - 2a\} = 0$

$4 + 2(2a-1) - 2a = 0$

$4 + 4a - 2 - 2a = 0$

$2a + 2 = 0$　　$a = -1$

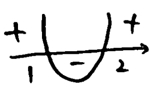
(注 増減表を書いて 必ず確かめること)

このとき

$f'(x) = 6\{x^2 + (-2-1)x + 2\}$

$= 6(x^2 - 3x + 2)$

$= 6(x-1)(x-2)$



$f'(x)=0$ となる x は $x=1, 2$

増減表

x	…	1	…	2	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって確かに $x=2$ で極小値をとる。

$f(x) = 2x^3 + (-6-3)x^2 + 12x$

$= 2x^3 - 9x^2 + 12x$

よって

$f(2) = 2\cdot 2^3 - 9\cdot 2^2 + 12\cdot 2$

$= 16 - 36 + 24$

$= 4$

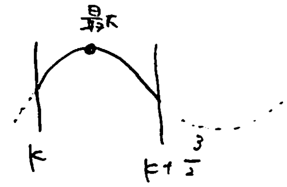
以上より

$a=-1$, 極小値 4 $(x=2)$ //

(3)

k の値が小さいときは

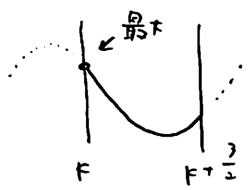
極大が定義域内に入る。



k の値が大きくなると

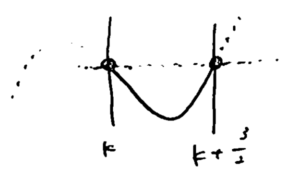
極大が見えなくなり

極小が見えてくる



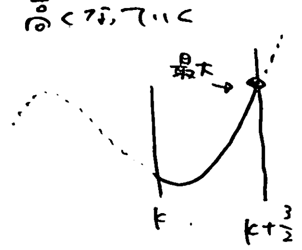
すると定義域の両端

が同じ高さになり



定義域の右端が

高くなっていく



よって同じ高さになる時を求める

つまり

$f(k) = f(k+\frac{3}{2})$

(2)より $a=-1$ より

$f(x) = 2x^3 + (-6-3)x^2 + 12x$

$= 2x^3 - 9x^2 + 12x$

より

$2k^3 - 9k^2 + 12k$

$= 2(k+\frac{3}{2})^3 - 9(k+\frac{3}{2})^2 + 12(k+\frac{3}{2})$

つまり

$2k^3 - 9k^2 + 12k$

$= 2(k^3 + \frac{9}{2}k^2 + \frac{27}{4}k + \frac{27}{8})$

$- 9(k^2 + 3k + \frac{9}{4}) + 12k + 18$

整理して

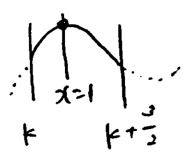
$2k^2 - 3k + 1 = 0$

$(2k-1)(k-1) = 0$ より $k = 1, \frac{3}{2}$

極小をはさんで、両端の高さが同じときなので $k=1$ である。

以上より

・$0 < k < 1$ の時

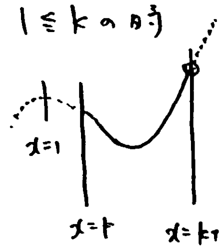


$x=1$ で最大

最大値

$f(1) = 2 - 9 + 12 = 5$

・$1 \leqq k$ の時



$x = k+\frac{3}{2}$ で最大

最大値

$f(k+\frac{3}{2})$

ここで

$f(k+\frac{3}{2}) = 2(k^3 + \frac{9}{2}k^2 + \frac{27}{4}k + \frac{27}{8})$

$- 9(k^2 + 3k + \frac{9}{4}) + 12k + 18$

$= 2k^3 + 9k^2 + \frac{27}{2}k + \frac{27}{4}$

$- 9k^2 - 27k - \frac{81}{4} + 12k + 18$

$= 2k^3 - \frac{3}{2}k + \frac{9}{2}$

以上より

$0 < k < 1$ の時

最大値 5

$1 \leqq k$ の時

最大値 $2k^3 - \frac{3}{2}k + \frac{9}{2}$ //

11

(1)

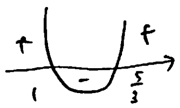
$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

$= (3x-5)(x-1)$

$f'(x) = 0$ となるのは $x = \frac{5}{3}, 1$

増減表は



x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

$f(1) = 1^3 - 4\cdot 1^2 + 5\cdot 1 = 1 - 4 + 5$
$= 2$

$f(\frac{5}{3}) = (\frac{5}{3})^3 - 4(\frac{5}{3})^2 + 5\cdot\frac{5}{3}$

$= \frac{125}{27} - \frac{100}{9} + \frac{25}{3}$

$= \frac{125 - 300 + 225}{27} = \frac{50}{27}$

極大値 2 $(x=1)$

極小値 $\frac{50}{27}$ $(x=\frac{5}{3})$

(2)

$y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$

つまり $(t, t^3 - 4t^2 + 5t)$ について

$y' = 3x^2 - 8x + 5$ より

点 $(t, t^3 - 4t^2 + 5t)$ における

接線の方程式は

$y - (t^3 - 4t^2 + 5t) = (3t^2 - 8t + 5)(x - t) \cdots (*)$

である。接線(*)が原点を通るので $x=0, y=0$ を

代入して

$0 - (t^3 - 4t^2 + 5t) = (3t^2 - 8t + 5)(0 - t)$

$t^3 - 4t^2 + 5t = 3t^3 - 8t^2 + 5t$

よって

$2t^3 - 4t^2 = 0$

$2t^2(t-2) = 0$

よって $t = 0, 2$

条件より $t \neq 0$ であるので $t = 2$

(*)に代入して

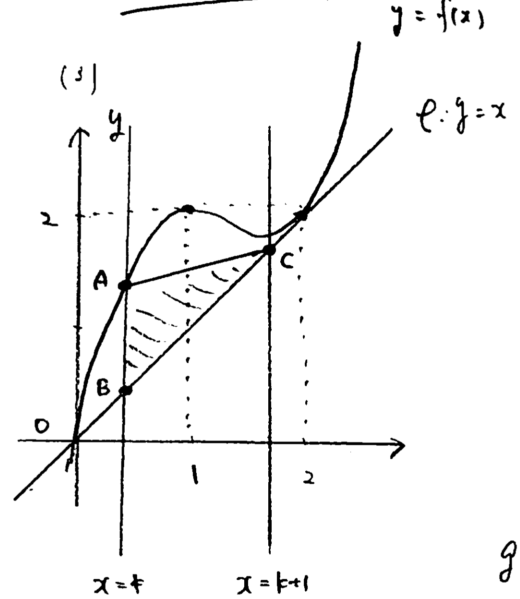
$y - (2^3 - 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2) = (3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 5)(x-2)$

$y - (8 - 16 + 10) = (12 - 16 + 5)(x - 2)$

$y - 2 = 1\cdot(x-2)$

$y = x$

(3)



(2)の結果より ℓ と $y = f(x)$

の接点の座標は $(2, 2)$

である。また $0 < k < 1$ で

あるので、$x = k+1$ は $1 < k+1 < 2$

を満たす。つまり直線 $x = k+1$ は

極大と接点の間に存在する

点Aも点Bも x座標は k

より

$A(k, k^3 - 4k^2 + 5k)$

$B(k, k)$

である。また点Aの方が

点Bよりも

上側に存在

するので

$AB = (k^3 - 4k^2 + 5k) - k$

$= k^3 - 4k^2 + 4k$

である。また AB を底辺

としたとき △ABC の高さ

は 2直線 $x = k$, $x = k+1$

の幅に等しいので

高さは 1 になる。

△OAB の面積 S は

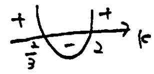
$S = \frac{1}{2} \times (k^3 - 4k^2 + 4k) \times 1$

$= \frac{1}{2}(k^3 - 4k^2 + 4k)$

$g(k) = \frac{1}{2}(k^3 - 4k^2 + 4k)$

として $0 < k < 1$ における

増減表は



$g'(k) = \frac{1}{2}(3k^2 - 8k + 4)$

$= \frac{1}{2}(3k-2)(k-2)$

$g'(k) = 0$ となる k は $k = \frac{2}{3}, 2$

k	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$g'(k)$		$+$	0	$-$	
$g(k)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$

$g(\frac{2}{3}) = \frac{1}{2}\{(\frac{2}{3})^3 - 4(\frac{2}{3})^2 + 4\cdot\frac{2}{3}\}$

$= \frac{1}{2}(\frac{8}{27} - \frac{16}{9} + \frac{8}{3})$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{27} = \frac{16}{27}$

S は $k = \frac{2}{3}$ の時最大値 $\frac{16}{27}$ をとる。

12

(1)

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 - 9a^2x + 12a^2$$

より

$$f'(x) = 3x^2 - 6ax - 9a^2$$
$$= 3(x^2 - 2ax - 3a^2)$$
$$= 3(x - 3a)(x + a)$$

よって $f'(x)=0$ となる x は

$$x = 3a,\ -a$$

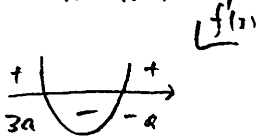
(2)

$a<0$ であるので $3a$ と $-a$ では

$-a$ の方が大きくなる。

($-a$ は正の数, $3a$ は負の数)

増減表は

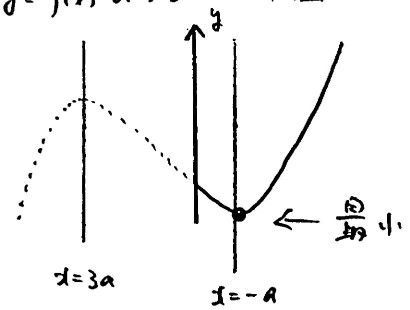


x	$\cdots$	$3a$	$\cdots$	$-a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

$$f(3a) = (3a)^3 - 3a(3a)^2 - 9a^2 \cdot 3a + 12a^2$$
$$= 27a^3 - 27a^3 - 27a^3 + 12a^2$$
$$= -27a^3 + 12a^2$$

$$f(-a) = (-a)^3 - 3a(-a)^2 - 9a^2(-a) + 12a^2$$
$$= -a^3 - 3a^3 + 9a^3 + 12a^2$$
$$= 5a^3 + 12a^2$$

$y=f(x)$ のグラフは下図の通り



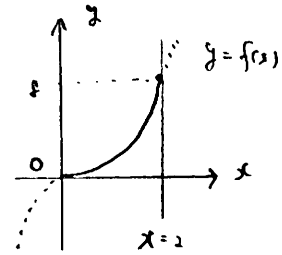
よって $x \geqq 0$ においては

最小値 $5a^3 + 12a^2$ $(x=-a)$

(3)

・$a=0$ とすると

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot 0x^2 - 9 \cdot 0 \cdot x + 12 \cdot 0$$
$$= x^3$$



となる。

すると図より

$0 \leqq x \leqq 2$

においては

$f(x) \geqq 0$ を満たしている。……①

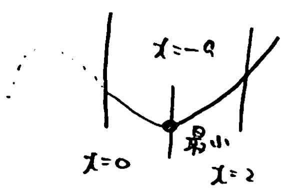
・$a<0$ のとき

$x=-a$ で極小となるので

極小が定義域に入るときと

入らないときで場合分け

○ $0 < -a < 2$ (つまり $-2<a<0$)



$x=-a$ で最小より

最小値 $f(-a) = 5a^3 + 12a^2$

よって 最小値 $\geqq 0$

であればいいので

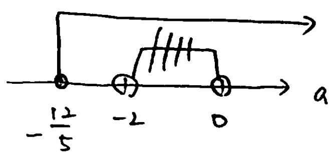
$$5a^3 + 12a^2 \geqq 0$$
$$a^2(5a+12) \geqq 0$$

a^2 は正の数より両辺 a^2

で割っても不等号は変わらない

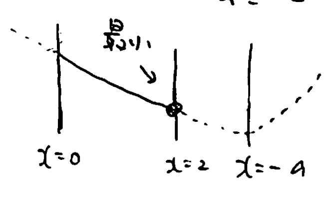
$$5a + 12 \geqq 0$$
$$a \geqq -\frac{12}{5}$$

これと $-2<a<0$ との共通範囲は



$-2<a<0$ …②

○ $2 \leqq -a$ (つまり $a \leqq -2$)



$x=2$ で最小より

最小値

$$f(2) = 2^3 - 3a \cdot 2^2 - 9a^2 \cdot 2 + 12a^2$$
$$= 8 - 12a - 18a^2 + 12a^2$$
$$= -6a^2 - 12a + 8$$

よって 最小値 $\geqq 0$ より

$$-6a^2 - 12a + 8 \geqq 0$$
$$3a^2 + 6a - 4 \leqq 0$$

$\left(3a^2 + 6a - 4 = 0 \text{ は } a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+12}}{3} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{3} \right)$

よって

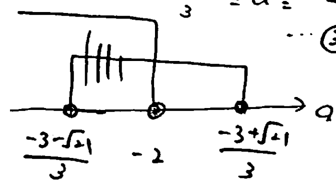
$$\frac{-3-\sqrt{21}}{3} \leqq a \leqq \frac{-3+\sqrt{21}}{3}$$

これと $a \leqq -2$ の

共通範囲は

$$\frac{-3-\sqrt{21}}{3} \leqq a \leqq -2$$

…③



($\sqrt{21}$ を 4 程度と考えると $\frac{-3-\sqrt{21}}{3}$ は $-\frac{7}{3}$ 程度)

以上 ①, ②, ③

をくっつけて

$$\frac{-3-\sqrt{21}}{3} \leqq a \leqq 0$$

13

(1)

$f(x) = 2x^3 + (a-3)x^2 - 2ax - a^2 + 3$

より

$f'(x) = 6x^2 + 2(a-3)x - 2a$

$= 2\{3x^2 + (a-3)x - a\}$

$= 2(3x+a)(x-1)$

$\left(\begin{array}{ccccc} 3 & \times & a & \to & a \\ 1 & & -1 & \to & -3 \\ & & & & a-3 \end{array}\right)$

よって $f'(x)=0$ となる x は

$x = -\frac{1}{3}a,\ 1$

(2) 条件より $a > -3$ より

両辺を3で割って

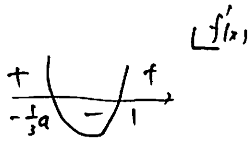
$\frac{1}{3}a > -1$

両辺に(-1)をかけて

$-\frac{1}{3}a < 1$

である。よって $x=-\frac{1}{3}a$ より $x=1$ の方が大きい。

増減表より



x	…	$-\frac{1}{3}a$	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって $x=-\frac{1}{3}a$ の時 極大となるので

$M = f(-\frac{1}{3}a)$

$= 2(-\frac{1}{3}a)^3 + (a-3)(-\frac{1}{3}a)^2 - 2a\cdot(-\frac{1}{3}a) - a^2 + 3$

$= -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}a^2 - a^2 + 3$

$= \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + 3$

以上より

$M = \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + 3 \quad (x = -\frac{1}{3}a)$

(3)

極小値をmとすると

(2)より

$m = f(1)$

$= 2\cdot 1^3 + (a-3)\cdot 1^2 - 2a\cdot 1 - a^2 + 3$

$= 2 + a - 3 - 2a - a^2 + 3$

$= -a^2 - a + 2$

である。極小値が0以上となるのは

$-a^2 - a + 2 \geqq 0$

(-1)倍して

$a^2 + a - 2 \leqq 0$

$(a+2)(a-1) \leqq 0$

$-2 \leqq a \leqq 1 \quad \cdots\cdots (*)$

(これは $a>-3$ を満たす)

となる時である。ゆえに(2)とあわせて

$M = \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + 3$

の$(*)$における値域を考える。

$g(a) = \frac{1}{27}a^3 - \frac{2}{3}a^2 + 3$

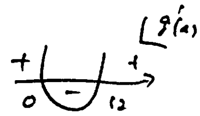
とおくと

$g'(a) = \frac{1}{9}a^2 - \frac{4}{3}a$

$= \frac{1}{9}a(a-12)$

$g'(a)=0$ となるaは $a=0,\ 12$

増減表は



a	-2	…	0	…	1
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	$\frac{1}{27}$	↗	3	↘	$\frac{64}{27}$

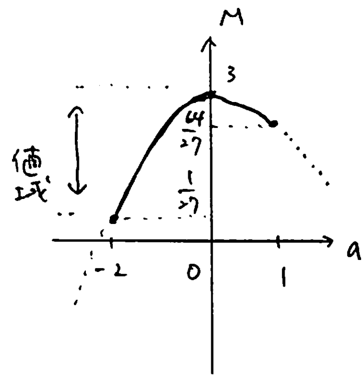
$g(-2) = \frac{1}{27}(-2)^3 - \frac{2}{3}(-2)^2 + 3$

$= -\frac{8}{27} - \frac{8}{3} + 3$

$= \frac{-8-72+81}{27} = \frac{1}{27}$

$g(1) = \frac{1}{27} - \frac{2}{3} + 3 = \frac{1-18+81}{27} = \frac{64}{27}$

$M = g(a)$ のグラフは下図



Mのとりうる値の範囲は

$\frac{1}{27} \leqq M \leqq 3$

14

(1) $y=x^3-3x^2+4$

上の点 $P(t,\ t^3-3t^2+4)$

における接線 ℓ について。

ℓ の傾きは

$y'=3x^2-6x$

に接点の x 座標 t を代入して

$y'=3t^2-6t$

となる。ゆえに ℓ は

点 $(t,\ t^3-3t^2+4)$ を通り

傾き $3t^2-6t$ より

$$y-(t^3-3t^2+4)=(3t^2-6t)(x-t)$$

$$\therefore\ y=(3t^2-6t)x-(3t^3-6t^2)+(t^3-3t^2+4)$$

$$=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+4 \quad \cdots(*)$$

これが $\ell: y=mx+n$ より

$$\begin{cases} m=3t^2-6t \\ n=-2t^3+3t^2+4 \end{cases}$$

(2) 点 $A(1,a)$ が ℓ 上にあるので、

$(*)$ に A の座標を代入すると

$$a=(3t^2-6t)\cdot 1-2t^3+3t^2+4$$

$$=3t^2-6t-2t^3+3t^2+4$$

$$=-2t^3+6t^2-6t+4 \quad \cdots(**)$$

ここで $f(t)=-2t^3+6t^2-6t+4$

とおくと、条件より $0<t<1$ であるので

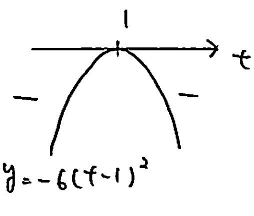
この定義域における $f(t)$ の増減を調べる。

$$f'(t)=-6t^2+12t-6$$

$$=-6(t^2-2t+1)$$

$$=-6(t-1)^2$$

$y=f'(t)$ のグラフ



増減表は

t	0	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	4	↘	2

となる。つまり増減表より

$$2<f(t)<4$$

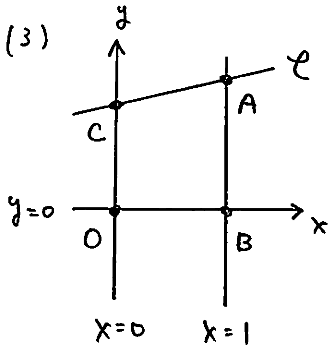
が成り立つので、

$(**)$ より

$$2<a<4$$

つまり $a>2$ が成り立つ。

(3)



図のように点に名前をつけると四角形 OBAC は

OC // AB である台形

であるから、面積 S は

$$S=\frac{1}{2}(\text{上底}+\text{下底})\cdot\text{高さ}$$

$$=\frac{1}{2}(OC+AB)\cdot OB$$

によって求められる。

ここで

$\ell: y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+4$

より、$x=0$ を代入して

$$y=-2t^3+3t^2+4$$

よって $C(0,\ -2t^3+3t^2+4)$

であるから

$$OC=-2t^3+3t^2+4 \quad \cdots(\text{エ})$$

また、$x=1$ を代入して、

$$y=(3t^2-6t)\cdot 1-2t^3+3t^2+4$$

$$=-2t^3+6t^2-6t+4$$

よって $A(1,\ -2t^3+6t^2-6t+4)$

より $AB=-2t^3+6t^2-6t+4$

そして、$OB=1$ であるから

$$S=\frac{1}{2}\{(-2t^3+3t^2+4)+(-2t^3+6t^2-6t+4)\}\cdot 1$$

$$=\frac{1}{2}(-4t^3+9t^2-6t+8)$$

となるので、微分すると

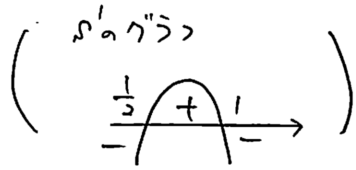
$$S'=\frac{1}{2}(-12t^2+18t-6)$$

$$=-6t^2+9t-3$$

$$=-3(2t^2-3t+1)$$

$$=-3(2t-1)(t-1)$$

(S' のグラフ)



したがって $S'=0$ となるのは

$t=\frac{1}{2},\ 1$

よって $0<t<1$ における

増減表は

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	最小	↗	

となる。ゆえに $t=\frac{1}{2}$ で

S は最小をとる。

$t=\frac{1}{2}$ のときの S は

$$S=\frac{1}{2}\left\{-4\left(\frac{1}{2}\right)^3+9\left(\frac{1}{2}\right)^2-6\cdot\frac{1}{2}+8\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{4}-3+8\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{27}{4}=\frac{27}{8}$$

15

(1)

$f(x)=2x^3+3(2-a)x^2-12ax-12a$

より

$f'(x)=6x^2+6(2-a)x-12a$

$=6\{x^2+(2-a)x-2a\}$

$=6(x-a)(x+2)$

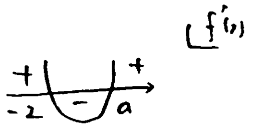
よって $f'(x)=0$ となる x の値は

$x=a,\ -2$

(2)

条件より a は正の数であるから

$a>-2$ である。



増減表より

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

極大値は $f(-2)$ より

$f(-2)=2(-2)^3+3(2-a)(-2)^2-12a(-2)-12a$

$=-16+24-12a+24a-12a$

$=8$

極小値は $f(a)$ より

$f(a)=2a^3+3(2-a)\cdot a^2-12a\cdot a-12a$

$=2a^3+6a^2-3a^3-12a^2-12a$

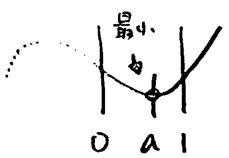
$=-a^3-6a^2-12a$

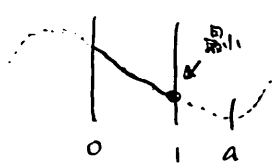
以上より

極大値 8 $(x=-2)$

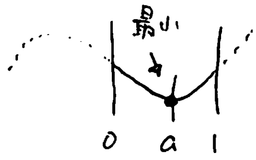
極小値 $-a^3-6a^2-12a$ $(x=a)$

(3) 極小値が定義域 $0\leqq x\leqq 1$ に入るか入らないかで場合分け





・$0<a<1$ の時

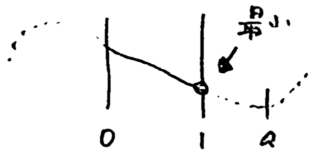


$x=a$ で最小より

最小値 $m=f(a)$

$=-a^3-6a^2-12a$

・$1\leqq a$ の時



$x=1$ で最小より

最小値 $m=f(1)$

$=2\cdot1^3+3(2-a)\cdot1^2-12a\cdot1-12a$

$=2+6-3a-12a-12a$

$=-27a+8$

以上より

$$m=\begin{cases}-a^3-6a^2-12a & (0<a<1)\\ -27a+8 & (1\leqq a)\end{cases}$$

また $0<a<2$ で a が変化するとき

$$m=\begin{cases}-a^3-6a^2-12a & (0<a<1)\\ -27a+8 & (1\leqq a<2)\end{cases}$$

のグラフを考える。

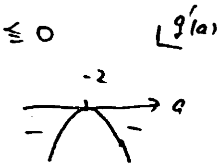
$g(a)=-a^3-6a^2-12a$

とおくと

$g'(a)=-3a^2-12a-12$

$=-3(a^2+4a+4)$

$=-3(a+2)^2\leqq 0$



増減表は

a	0	$\cdots$	1
$g'(a)$		$-$	
$g(a)$	0	↘	-19

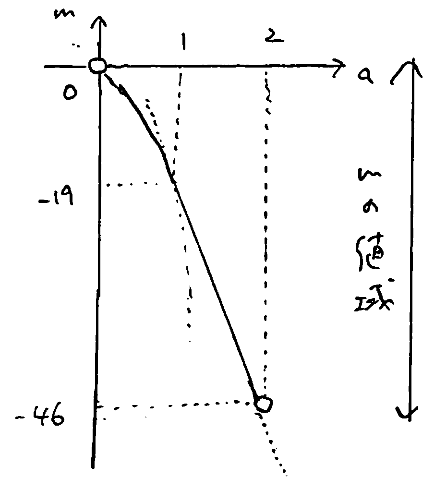
$1\leqq a<2$ において

$m=-27a+8$ は

傾きが負の直線で

あるので、$0<a<2$ において

グラフを書くと下図



よって m のとりうる値の範囲は

$-46<m<0$

16

(1)

点 $(7,\ k+14)$ は放物線 $y=x^2-5x+k$ 上の点であるので、$y'=2x-5$ であるから

この点における接線の方程式は

$$y-(k+14)=(2\times 7-5)(x-7)$$

よって

$$y-k-14=9x-63$$

つまり

$$y=9x-49+k$$

(2)

直線 ℓ と $y=f(x)$ が異なる3点で交わるので、連立した x の方程式

$$9x-49+k=x^3-3x^2-40$$

は異なる3つの実数解をもつ。

この式を変形すると

$$k=x^3-3x^2-40-(9x-49)$$

つまり

$$k=x^3-3x^2-9x+9 \quad \cdots(*)$$

とすると、方程式 $(*)$ が異なる3つの実数解をもつので2つのグラフ

$$\begin{cases} y=x^3-3x^2-9x+9 \\ y=k \end{cases}$$

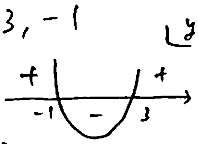
は異なる3つの交点をもつ

$y=x^3-3x^2-9x+9$ のグラフについて

$$y'=3x^2-6x-9$$
$$=3(x^2-2x-3)$$
$$=3(x-3)(x+1)$$

$y'=0$ となる x は $x=3,-1$

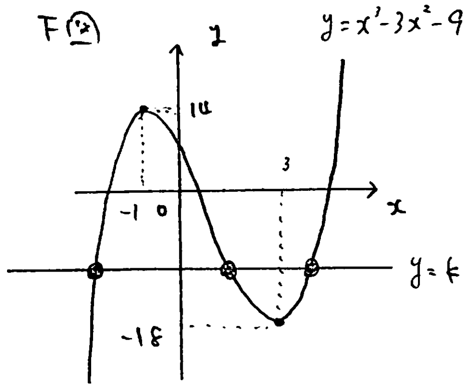
増減表は



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	14	$\searrow$	-18	$\nearrow$

$y=x^3-3x^2-9x+9$ のグラフは

下図



よって2つのグラフが異なる3つの交点をもつには

$$-18<k<14$$

ならばいい。

(別)

$(*)$ より

$$x^3-3x^2-9x+(9-k)=0$$

と変形して、左辺を $g(x)$ とおく。$g(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつので

(極大値)×(極小値)<0

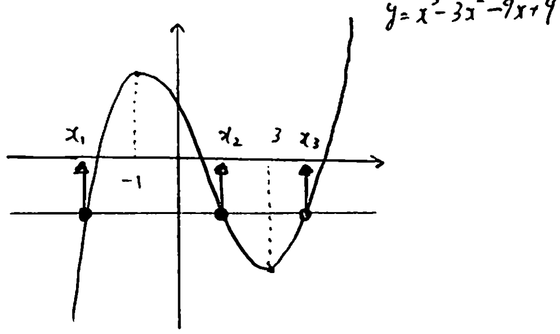
を解いてもいい。

(3)

直線 ℓ と $y=f(x)$ の交点の x 座標を

$x_1,\ x_2,\ x_3 \quad (x_1<x_2<x_3)$

とすると (2) のグラフより



$$x_1<-1,\ -1<x_2<3,\ 3<x_3 \quad \cdots(**)$$

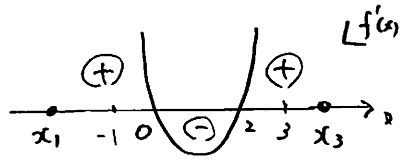
であることが分かる。

ここで $f(x)=x^3-3x^2-40$ より

$$f'(x)=3x^2-6x$$
$$=3x(x-2)$$

であるから

$f'(x)=0$ となる x は $x=0,2$



$y=f'(x)$ のグラフは下に凸の放物線であるので $(**)$ の範囲に $x_1,\ x_3$ が存在するときは $f'(x_1),\ f'(x_3)$ の値はともに正になる。

ゆえに

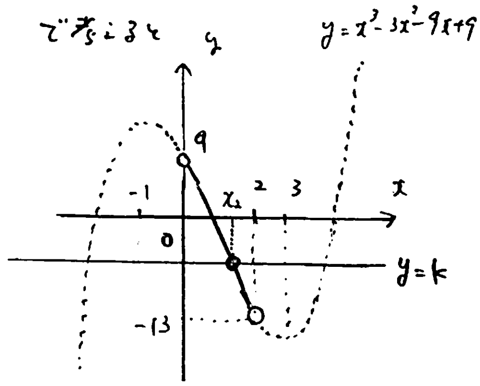
$$f'(x_1)>0,\ f'(x_3)>0$$

また $f'(x_2)<0$ となるには

$y=f'(x)$ のグラフより $0<x_2<2$

であればいいので

これを $y=x^3-3x^2-9x+9$ のグラフで考えると



直線 $y=k$ が

$y=9$ と $y=-13$ の間で交点をもてばいい。

したがって $f'(x_2)<0$ となる k の値の範囲は

$$-13<k<9$$

17

(1)

$y=(x-3)^2$
$=x^2-6x+9$

より

$y'=2x-6$

よって点 $(1,4)$ における接線の方程式は

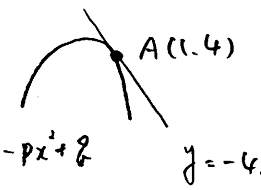
$y-4=(2\cdot1-6)(x-1)$

つまり

$y-4=-4(x-1)$

$\underline{y=-4x+8}$

(2)



放物線 $y=-px^2+q$ が点Aにおいて直線 $l: y=-4x+8$ に接する。

よって、放物線 $y=-px^2+q$ は $A(1,4)$ を通るので、代入して

$4=-p\cdot1^2+q$

よって

$-p+q=4 \cdots ①$

また、点Aにおける放物線 $y=-px^2+q$ の接線の傾きが l の傾きに等しいので

$y'=-2px$ より 点Aにおける $y=-px^2+q$ の接線の傾きは $y'=-2p\cdot1$

これが -4 に等しいので

$-2p\cdot1=-4 \cdots ②$

つまり $p=2$

①に代入して $-2+q=4$ $q=6$

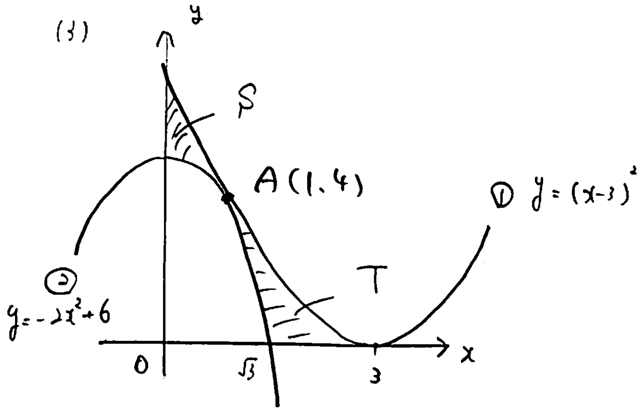
以上より $\underline{p=2,\ q=6}$

(別) ②のかわりに放物線と直線が接するから連立した方程式

$-4x+8=-px^2+q$

が重解をもつとして判別式 $D=0$ を考えてもよい

(3)



放物線②とx軸との交点の座標は

②: $y=-2x^2+6$ より

$-2x^2+6=0$

$x^2=3$ よって $x=\pm\sqrt{3}$

$x>0$ より $x=\sqrt{3}$ である。

まずSについて $0\leqq x\leqq1$ においては ①の方が②よりも上方にあるので

$S=\int_0^1\{(x-3)^2-(-2x^2+6)\}dx$

$=\int_0^1(x^2-6x+9+2x^2-6)dx$

$=\int_0^1(3x^2-6x+3)dx \cdots (*)$

$=\left[x^3-3x^2+3x\right]_0^1$

$=(1^3-3\cdot1^2+3\cdot1)-0$

$=\underline{1}$

Tについては、$1\leqq x\leqq\sqrt{3}$ では上側が①、下側が②

$\sqrt{3}\leqq x\leqq3$ については上側が①、下側がx軸

よって

$T=\int_1^{\sqrt{3}}\{(x-3)^2-(-2x^2+6)\}dx$

$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(x-3)^2-0\}dx$

$=\int_1^{\sqrt{3}}(3x^2-6x+3)dx$

$+\int_{\sqrt{3}}^3(x^2-6x+9)dx \cdots (**)$

$=\left[x^3-3x^2+3x\right]_1^{\sqrt{3}}$

$+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{\sqrt{3}}^3$

$=(3\sqrt{3}-9+3\sqrt{3})-(1-3+3)$

$+(9-27+27)-(\sqrt{3}-9+9\sqrt{3})$

$=\underline{8-4\sqrt{3}}$

(別)

$(*)=3\int_0^1(x^2-2x+1)dx$

$=3\int_0^1(x-1)^2dx$

$=3\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1$

$=(1-1)^3-(0-1)^3=1$

$(**)=3\int_1^{\sqrt{3}}(x-1)^2dx$

$+\int_{\sqrt{3}}^3(x-3)^2dx$

$=3\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{\sqrt{3}}$

$+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{\sqrt{3}}^3$

$=(\sqrt{3}-1)^3-(1-1)^3$

$+\frac{1}{3}(3-3)^3-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-3)^3$

$=(\sqrt{3}-1)^3-\frac{1}{3}(\sqrt{3}-3)^3$

と計算できる。

(ポ) $\int_\alpha^\beta(x+k)^2dx=\left[\frac{1}{3}(x+k)^3\right]_\alpha^\beta$

18

(1)

$y=-x^2-x+2$ について

x軸との交点のx座標は

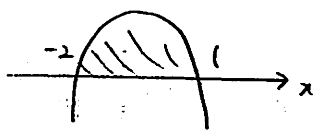
$-x^2-x+2=0$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$x=-2, 1$

また、$y=-x^2-x+2$ のグラフは上に凸の放物線であるので $-2\leqq x\leqq 1$ においては放物線が上側、x軸が下側



面積Sは

$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2-x+2)-0\}dx \quad \cdots(*)$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}$

$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)-\left(\frac{8}{3}-2-4\right)$

$=-3-\frac{1}{2}+2+2+4$

$=\frac{9}{2}$

別 $(*)=-\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)dx$

$=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)dx$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3$

$=\frac{1}{6}\times 27=\frac{9}{2}$

公式

$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

(2)

$C_1: y=-x^2-x+2$ 上の

点Pのx座標をtとすると

y座標は $y=-t^2-t+2$

となる。つまり $P(t, -t^2-t+2)$

よって $y=-x^2-x+2$ より

$y'=-2x-1$ であるから、

点Pにおける接線の方程式は

$y-(-t^2-t+2)=(-2t-1)(x-t)$

よって

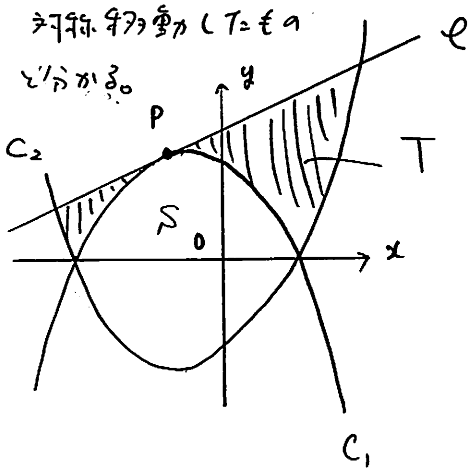
$y=(-2t-1)x-t(-2t-1)+(-t^2-t+2)$

より

$y=(-2t-1)x+t^2+2$

(3)

C_2 の式を見ると、C_2 のグラフは C_1 のグラフをx軸に関して対称移動したものと分かる。



よって $\ell: y=(-2t-1)x+t^2+2$ と $C_2: y=x^2+x-2$ の交点のx座標は、連立した方程式

$(-2t-1)x+t^2+2=x^2+x-2 \quad \cdots①$

の実数解である。よって、実数解を α, β とおくと、条件より

$\alpha+\beta=0 \quad \cdots②$

であればよい。

①を変形して、

$x^2+(2t+2)x-t^2-4=0 \quad \cdots③$

とすると、この2次方程式の解が α, β より解と係数の関係から

$\alpha+\beta=-\frac{2t+2}{1}$

である。②より

$0=-(2t+2)$

つまり $t=-1$ である。

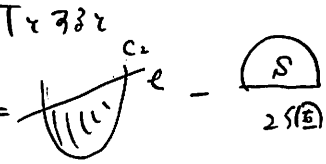
このとき③より

$x^2+(-2+2)x-1-4=0$

$x^2-5=0$

$x=\pm\sqrt{5}$

である。よって求める部分の面積をTとすると

T =  2個分

である。C_2 と ℓ で囲まれた部分は

$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\{(x+3)-(x^2+x-2)\}dx$

$=\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(-x^2+5)dx$

$=2\int_{0}^{\sqrt{5}}(-x^2+5)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+5x\right]_{0}^{\sqrt{5}}$

$=2\left(-\frac{1}{3}\cdot 5\sqrt{5}+5\sqrt{5}\right)=\frac{20}{3}\sqrt{5}$

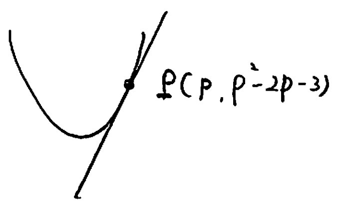
したがって

$T=\frac{20}{3}\sqrt{5}-\frac{9}{2}\times 2$

$=\frac{20}{3}\sqrt{5}-9$

19

(1)



$y=x^2-2x-3$ より $y'=2x-2$

よって 点P$(p,\ p^2-2p-3)$ における接線の方程式は

$y-(p^2-2p-3)=(2p-2)(x-p)$

よって

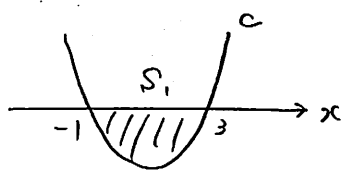
$y=(2p-2)x-p(2p-2)+(p^2-2p-3)$

$=(2p-2)x-2p^2+2p+p^2-2p-3$

ゆえに

$y=(2p-2)x-p^2-3$

(2)



C: $y=x^2-2x-3$ と x軸との交点は

$x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$

$x=-1,\ 3$

また $-1\leqq x\leqq 3$ において x軸が上側 Cが下側にある。ゆえに

$S=\int_{-1}^{3}\{0-(x^2-2x-3)\}dx$

$=-\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx$ …… (*)

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\right]_{-1}^{3}$

$=-(9-9-9)+(-\frac{1}{3}-1+3)$

$=9-\frac{1}{3}+2=\frac{32}{3}$

別

(*) $=-\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx$

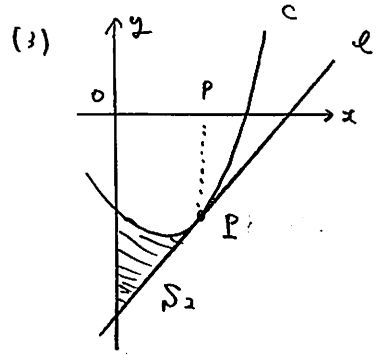
$=-(-\frac{1}{6})\{3-(-1)\}^3$

$=\frac{1}{6}\times 4^3=\frac{32}{3}$

公式

$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

(3)



点Pのx座標pについて、条件より $p>0$ であるから、点Pはy軸よりも右側に存在する。また $0\leqq x\leqq p$ において Cが上側、ℓが下側にあるので

$S_2=\int_{0}^{p}[(x^2-2x-3)-\{(2p-2)x-p^2-3\}]dx$

$=\int_{0}^{p}(x^2-2x-3-2px+2x+p^2+3)dx$

$=\int_{0}^{p}(x^2-2px+p^2)dx$ …… (**)

$=\left[\frac{1}{3}x^3-px^2+p^2x\right]_{0}^{p}$

$=\frac{1}{3}p^3-p\cdot p^2+p^2\cdot p-0$

$=\frac{1}{3}p^3$

したがって

$S_1:S_2=4:1$

より $\frac{32}{3}:\frac{1}{3}p^3=4:1$

$32:p^3=4:1$

よって $4p^3=32$

$p^3=8$ …… (※)

$p^3-8=0$

$(p-2)(p^2+2p+4)=0$

$p=2,\ -1\pm\sqrt{1-4}$

ここでpは実数より

$p=-1\pm\sqrt{3}i$ は不適

よって $p=2$

($p>0$を満たす)

別

(**) $=\int_{0}^{p}(x-p)^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-p)^3\right]_{0}^{p}$

$=\frac{1}{3}(p-p)^3-\frac{1}{3}(0-p)^3$

$=0-\frac{1}{3}(-p^3)=\frac{1}{3}p^3$

別

(※)について

$x^3=a^3$

を満たすxは実数解に限れば $x=a$ しかない。

20

(1)

$f(x)=x^3-3x$ において

$f'(x)=3x^2-3$

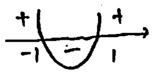
$=3(x^2-1)$

$=3(x+1)(x-1)$

よって $f'(x)=0$ となる x は

$x=1,-1$

増減表は



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

したがって、極大となる点Aの座標は

$A(-1,2)$

極小となる点Bの座標は

$B(1,-2)$

侖 問題文の「増減を調べよ。」とは「増減表を書け」ということ。

(2)

(1)より $A(-1,2)$ である。

放物線 C_2 は2点 $A(-1,2)$, $T(2,2)$ を通るので、代入をして

$2=a(-1)^2+b(-1)+c$

$2=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c$

つまり

$$\begin{cases} a-b+c=2 & \cdots ① \\ 4a+2b+c=2 & \cdots ② \end{cases}$$

が成り立つ。

また $T(2,2)$ における C_1, C_2 の接線が一致するので、この点における C_1 の接線の傾きと C_2 の接線の傾きは等しくなる。

$C_1: y=x^3-3x$ より $y'=3x^2-3$

$C_2: y=ax^2+bx+c$ より $y'=2ax+b$ である。

$T(2,2)$ において

C_1 の接線の傾きは

$y'=3\cdot 2^2-3$

C_2 の接線の傾きは

$y'=2a\times 2+b$

よって

$3\cdot 2^2-3=2a\times 2+b$

つまり

$4a+b=9 \cdots ③$

よって ①, ②, ③ の連立方程式を解く。

① − ② より

$$\begin{array}{rl} a-b+c=2 & \cdots ① \\ -)\ 4a+2b+c=2 & \cdots ② \\ \hline -3a-3b\quad=0 & \end{array}$$

よって $a+b=0 \cdots ④$

③, ④ において

$$\begin{array}{rl} 4a+b=9 & \cdots ③ \\ -)\ a+b=0 & \cdots ④ \\ \hline 3a\quad=9 & \end{array}$$

$a=3$

④より $b=-a=-3$

①に代入して

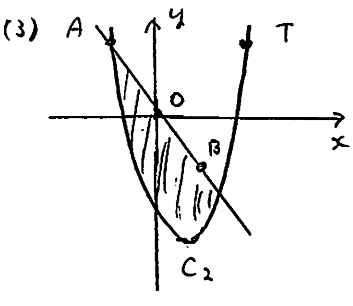
$3-(-3)+c=2$

$c=-4$

以上より

$a=3,\ b=-3,\ c=-4$

(3)



(2)より放物線 $C_2: y=3x^2-3x-4$ は2点 $A(-1,2)$, $T(2,2)$ を通る。

また下に凸な放物線である。

ここで $x=1$ の時 $y=3\cdot 1^2-3\cdot 1-4=-4$ であることから、グラフは上図

直線ABの方程式は

$A(-1,2)$, $B(1,-2)$ より

$y-2=\dfrac{-2-2}{1-(-1)}\{x-(-1)\}$

よって

$y-2=-2(x+1)$

より $y=-2x$ である。

直線ABと C_2 の交点の x 座標は

$3x^2-3x-4=-2x$

$3x^2-x-4=0$

$\left(\begin{array}{l} 3 \searrow -4 \to -4 \\ 1 \nearrow 1 \to 3 \\ \hline \quad\quad\quad\ -1 \end{array}\right)$

$(3x-4)(x+1)=0$

$x=\dfrac{4}{3},-1$

図より $-1\leqq x\leqq\dfrac{4}{3}$ において、直線ABが上側、C_2 が下側

よって面積 S は

$S=\displaystyle\int_{-1}^{\frac{4}{3}}\{(-2x)-(3x^2-3x-4)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^{\frac{4}{3}}(-3x^2+x+4)dx \cdots (*)$

$=\left[-x^3+\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-1}^{\frac{4}{3}}$

$=\left(-\frac{64}{27}+\frac{8}{9}+\frac{16}{3}\right)-\left(1+\frac{1}{2}-4\right)$

$=\dfrac{104}{27}+3-\dfrac{1}{2}=\dfrac{343}{54}$

侖

$(*)=-\displaystyle\int_{-1}^{\frac{4}{3}}(3x^2-x-4)dx$

$=-\displaystyle\int_{-1}^{\frac{4}{3}}(x+1)(3x-4)dx$

$=-3\displaystyle\int_{-1}^{\frac{4}{3}}(x+1)\left(x-\frac{4}{3}\right)dx$

$=-3\times\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{4}{3}-(-1)\right\}^3$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{7}{3}\right)^3=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{343}{27}=\dfrac{343}{54}$

21

(1)

放物線 $C: y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$

について，C と y 軸との交点は

$x=0$ を代入して $y=-\frac{1}{2}\cdot 0^2+\frac{1}{2}\cdot 0+1=1$

よって $A(0,1)$

また，x 軸との交点は

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1=0$$

$\times(-2)$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x-2)(x+1)=0$$

よって $x=2,-1$

C と x 軸との交点のうち

x 軸の正の部分との交点が B

であるので，

$$B(2,0)$$

よって $A(0,1)$，$B(2,0)$ を通る

直線の傾きは

$$\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$$

(2)

放物線 C 上の点を P とする。

P の x 座標を p とすると

$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$ より $y'=-x+\frac{1}{2}$

であるから 点 P における接線の

傾きは $y'=-p+\frac{1}{2}$ である。

点 P における接線と直線 AB が

平行であるので，傾きが等しくなるから

$$-p+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

よって $p=1$ であるから，

点 P の座標は $(1,-\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\cdot 1+1)$

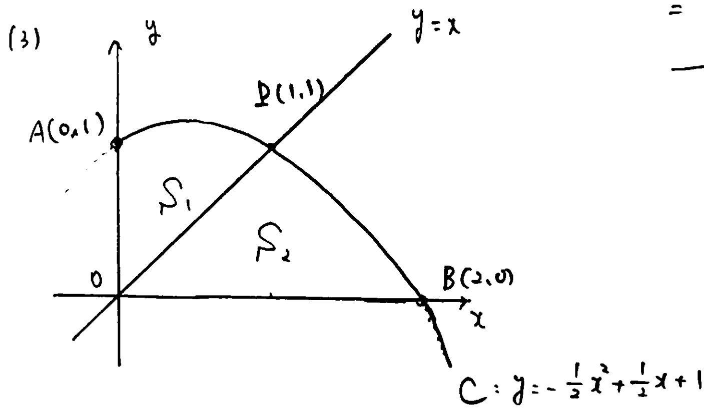
つまり $P(1,1)$ である。

したがって，直線 OP の方程式は

$$y=\frac{1}{1}x$$

つまり $y=x$

(3)



S_1 について

$0\leqq x\leqq 1$ において，

上側が放物線 C，下側が直線 OP

である。よって

$$S_1=\int_0^1\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)-x\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{4}x^2+x\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{1}{4}+1-0$$

$$=\frac{7}{12}\quad\cdots①$$

また S_1+S_2 は放物線 C

と x 軸，y 軸で囲まれた部分の

面積である。

$0\leqq x\leqq 2$ において 上側が C，

下側が x 軸であるから，

$$S_1+S_2=\int_0^2\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1\right)-0\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2+x\right]_0^2$$

$$=-\frac{1}{6}\times 8+\frac{1}{4}\times 4+2-0$$

$$=-\frac{4}{3}+1+2$$

$$=\frac{5}{3}\quad\cdots②$$

よって ①，② より S_2 を求めると

$$S_2=\frac{5}{3}-S_1=\frac{5}{3}-\frac{7}{12}=\frac{13}{12}$$

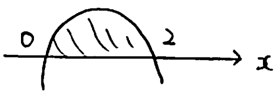
したがって

$$S_1:S_2=\frac{7}{12}:\frac{13}{12}$$

$$=7:13$$

22

(1)



$C: y=-x^2+2x$ より

上に凸の放物線である。

また x 軸との交点は

$x(2-x)=0$

より $x=0, 2$

である。$0 \leqq x \leqq 2$ において

上側が放物線 C で

下側が x 軸である。

したがって、囲まれた部分の

面積は

$$\int_0^2 \{(-x^2+2x)-0\}dx \quad \cdots (*)$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

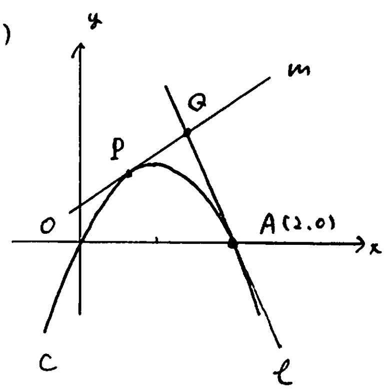
$$= -\frac{1}{3}\times 2^3+2^2 = -\frac{8}{3}+4 = \frac{4}{3}$$

別

$$(*) = -\int_0^2 x(x-2)dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 = \frac{1}{6}\times 8 = \frac{4}{3}$$

(2)



$C: y=-x^2+2x$ より $y'=-2x+2$

したがって 点 $A(2,0)$ における

接線の方程式は

$$y-0=(-2\times 2+2)(x-2)$$

よって $y=-2x+4$

また $P(t, -t^2+2t)$

であるから 点 P における

C の接線の方程式は

$$y-(-t^2+2t)=(-2t+2)(x-t)$$

よって

$$y=(-2t+2)x-t(-2t+2)+(-t^2+2t)$$

$$=(-2t+2)x+2t^2-2t-t^2+2t$$

$$=(-2t+2)x+t^2$$

ゆえに

$$m: y=(-2t+2)x+t^2$$

また、ℓ と m の交点の座標は

$$\begin{cases} y=-2x+4 \\ y=(-2t+2)x+t^2 \end{cases}$$

連立して

$$-2x+4=(-2t+2)x+t^2$$

$$-2x-(-2t+2)x=t^2-4$$

$$-2x+2tx-2x=t^2-4$$

$$2tx-4x=t^2-4$$

$$2(t-2)x=t^2-4$$

$$2(t-2)x=(t+2)(t-2)$$

条件より $0<t<2$ であるから

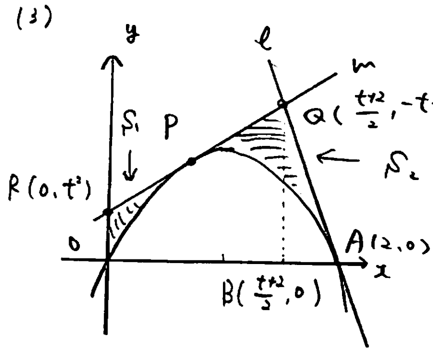
$t-2 \neq 0$ であるので、両辺 $(t-2)$ で

割ると

$$2x=t+2$$

よって $x=\dfrac{t+2}{2}$

(3)



直線 m と y 軸との交点を R

とする。$S=S_1+S_2$ について

四角形 $ORQA$ から

(1) で面積を求めた部分を

除けばいい。

点 Q の x 座標は (2) より $\dfrac{t+2}{2}$

であるから、y 座標は ℓ の式に

代入して

$$y=-2\times\frac{t+2}{2}+4$$

$$=-t-2+4=-t+2$$

点 Q から x 軸に垂線を下ろして

x 軸との交点を B とすると

(四角形 $ORQA$)

$$=(\text{台形 } ORQB)+\triangle ABQ$$

$$=\frac{1}{2}\times(OR+QB)\times OB+\frac{1}{2}\times AB\times QB$$

$$=\frac{1}{2}\times\{t^2+(-t+2)\}\times\frac{t+2}{2}+\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{t+2}{2}\right)\times(-t+2)$$

$$=\frac{1}{4}(t^3+2t^2-4t+8)$$

よって

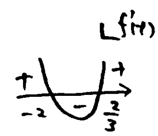
$$S=\frac{1}{4}(t^3+2t^2-4t+8)-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+\frac{2}{3}$$

ゆえに

$$f(t)=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{2}t^2-t+\frac{2}{3} \quad (0<t<2)$$

の最小値を考えると



$$f'(t)=\frac{3}{4}t^2+t-1$$

$$=\frac{1}{4}(3t-2)(t+2)$$

$f'(t)=0$ となる t は $t=\frac{2}{3}, -2$

増減表より

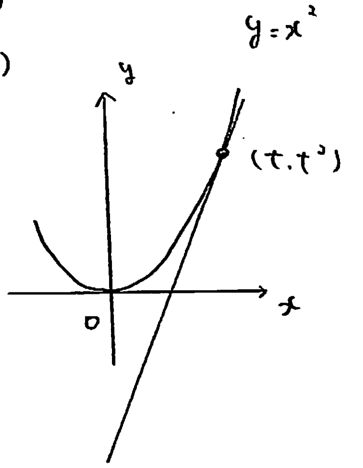
t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘	$\frac{8}{27}$	↗	

以上より S は

$t=\frac{2}{3}$ の時、最小値 $\frac{8}{27}$ をとる。

23

(1)



$y=x^2$ より $y'=2x$

よって接点(t, t^2)における接線の傾きは$y'=2t$

よって接線の方程式は

$y-t^2=2t(x-t)$

より

$y=2tx-t^2$

(別)

接線の方程式を $y=mx+n$ として、

方程式

$x^2=mx+n$

が $x=t$ を重解にもつ。

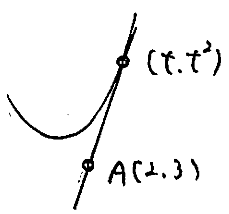
と考えると、解と係数の関係より

$$\begin{cases} -\dfrac{-m}{1}=t+t \\ \dfrac{-n}{1}=t\times t \end{cases}$$

よって $m=2t$, $n=-t^2$

となって、$y=2tx-t^2$ と求められる。

(2)



点(t, t^2)における接線が点A(2, 3)を通ると考えると

$3=2t\times2-t^2$

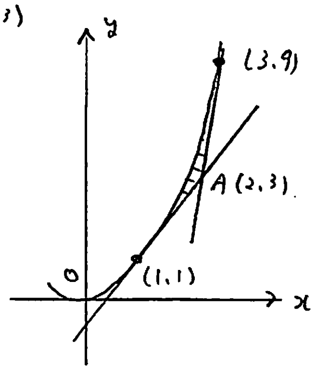
よって

$t^2-4t+3=0$

$(t-1)(t-3)=0$

$t=1,\ 3$

(3)



接線の方程式は

$t=1$の時 $y=2\times1\times x-1^2$

$y=2x-1$

$t=3$の時 $y=2\times3\times x-3^2$

$y=6x-9$

また、放物線$y=x^2$の方が接線よりも上側であるので

求める面積Sは

$$S=\int_1^2\{x^2-(2x-1)\}dx+\int_2^3\{x^2-(6x-9)\}dx$$

$$=\int_1^2(x^2-2x+1)dx+\int_2^3(x^2-6x+9)dx \quad\cdots(*)$$

$$=\left[\frac13x^3-x^2+x\right]_1^2+\left[\frac13x^3-3x^2+9x\right]_2^3$$

$$=\left(\frac83-4+2\right)-\left(\frac13-1+1\right)+(9-27+27)-\left(\frac83-12+18\right)$$

$$=\frac83-2-\frac13+9-\frac83-6$$

$$=1-\frac13=\frac23$$

(別) ((*)以降)

$$\int_1^2(x^2-2x+1)dx+\int_2^3(x^2-6x+9)dx$$

$$=\int_1^2(x-1)^2dx+\int_2^3(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac13(x-1)^3\right]_1^2+\left[\frac13(x-3)^3\right]_2^3$$

(まるごと積分)

$$=\frac13(2-1)^3-\frac13(1-1)^3+\frac13(3-3)^3-\frac13(2-3)^3$$

$$=\frac13-0+0-\frac13(-1)=\frac23$$

24

(1)

$\ell: y=-2x+4$ と $C: y=\frac{3}{2}x^2-x$

の交点の座標は、連立して

$-2x+4=\frac{3}{2}x^2-x$

$\times 2$

$-4x+8=3x^2-2x$

$3x^2+2x-8=0$

$\left(\begin{matrix} 3 & -4 & \to -4 \\ 1 & 2 & \to 6 \\ & & 2 \end{matrix}\right)$

$(3x-4)(x+2)=0$

$x=\frac{4}{3},\ -2$

Aのx座標はBのx座標より大きいので、

・Aについて

$x=\frac{4}{3}$ のとき $y=-2\times\frac{4}{3}+4=\frac{4}{3}$

・Bについて

$x=-2$ のとき $y=-2(-2)+4=8$

よって $A\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),\ B(-2,8)$

(2)

放物線Cとx軸との交点は

$\frac{3}{2}x^2-x=0$

$\times 2$

$3x^2-2x=0$

$x(3x-2)=0$ よって $x=0,\ \frac{2}{3}$

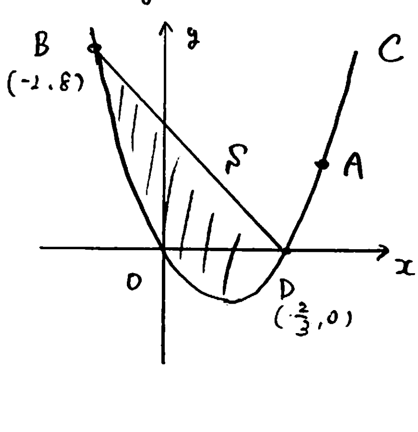
原点でない方がDであるので $D\left(\frac{2}{3},0\right)$

よって $B(-2,8),\ D\left(\frac{2}{3},0\right)$ を結ぶ直線の方程式は

$y-8=\frac{0-8}{\frac{2}{3}-(-2)}(x+2)$

よって $y-8=-3(x+2)$

より $y=-3x+2$ となる



また $-2\leqq x\leqq\frac{2}{3}$ において

上側がBD、下側がC

である。よって面積Sは

$S=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left\{(-3x+2)-\left(\frac{3}{2}x^2-x\right)\right\}dx$

$=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{2}x^2-2x+2\right)dx$ …(*)

$=\left[-\frac{1}{2}x^3-x^2+2x\right]_{-2}^{\frac{2}{3}}$

$=\left(-\frac{4}{27}-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\right)$

$-(4-4-4)$

$=-\frac{4}{27}-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}+4$

$=\frac{128}{27}$

別

$(*)=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}(3x^2+4x-4)dx$

$=-\frac{1}{2}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}(x+2)(3x-2)dx$

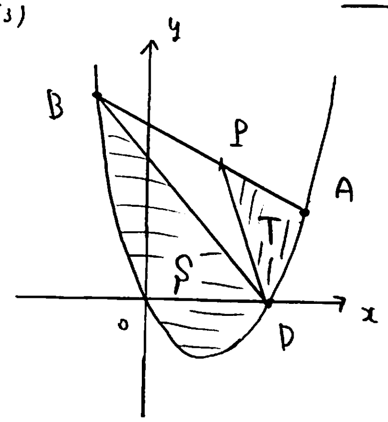
$=-\frac{3}{2}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}(x+2)\left(x-\frac{2}{3}\right)dx$

$=-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{2}{3}-(-2)\right\}^3$

$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{8}{3}\right)^3$

$=\frac{1}{4}\times\frac{8\times8\times8}{27}=\frac{2\times8\times8}{27}=\frac{128}{27}$

(3)



点Pは線分AB上に存在するので

直線ABの方程式が $y=-2x+4$

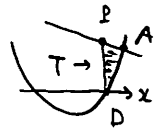
であるので

$P(t,-2t+4)$

$\left(-2<t<\frac{2}{3}\right)$

と表せる。

点Dを通りx軸に垂直な直線を境として、点Pが右側、左側にあるときで、Tを求める式が変わってくるので、点Pがこの直線上にあるときのTの値を求める。



つまり $P\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$

のときの T_0 は、上側が ℓ、下側がCより

$T_0=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left\{(-2x+4)-\left(\frac{3}{2}x^2-x\right)\right\}dx$

$=\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}\left(-\frac{3}{2}x^2-x+4\right)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{4}{3}}$

$=-\frac{32}{27}-\frac{8}{9}+\frac{16}{3}-\left(-\frac{4}{27}-\frac{2}{9}+\frac{8}{3}\right)=\frac{26}{27}$

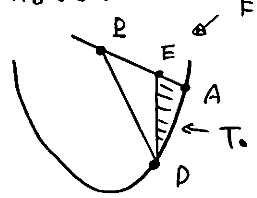
(2)より $S=\frac{128}{27}$ より

$4T_0=4\times\frac{26}{27}=\frac{104}{27}<\frac{128}{27}=S$

よって $S=4T$ となる点Pは

点Dを通りx軸に垂直な直線よりも左側にいるときである。

$E\left(\frac{2}{3},\frac{8}{3}\right)$ とする



$T=\triangle PED+T_0$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}-t\right)\times ED+\frac{26}{27}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}-t\right)\times\left(\frac{8}{3}-0\right)+\frac{26}{27}$

$=\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}-t\right)+\frac{26}{27}$

よって $S=4T$ より

$\frac{128}{27}=\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{2}{3}-t\right)+\frac{26}{27}\right\}\times4$

$\times 27$

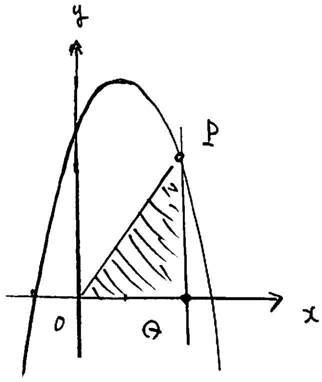
$32=24-36t+26$

$36t=18$ よって $t=\frac{1}{2}$

これは $-2<t<\frac{2}{3}$ を満たす。

よって $P\left(\frac{1}{2},3\right)$

25



$C : y = -x^2 + 2x + 15$

(1)

点Pのx座標がtであるので

$P(t, -t^2+2t+15)$ である。

また点P, Qのx座標は等しいので

$Q(t, 0)$ である。

よって

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \times OQ \times PQ$$

$$= \frac{1}{2} \times t \times (-t^2+2t+15)$$

$$= \frac{1}{2}(-t^3+2t^2+15t)$$

(2)

(1)より

$$f(t) = \frac{1}{2}(-t^3+2t^2+15t)$$

とおいて、$f(t)$ の $0<t<5$ における最大値を考える。

$$f'(t) = \frac{1}{2}(-3t^2+4t+15)$$

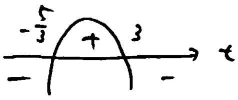
$$= -\frac{1}{2}(3t^2-4t-15)$$

$$= -\frac{1}{2}(3t+5)(t-3)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 3 & & 5 & \to & 5 \\ 1 & \times & -3 & \to & -9 \\ & & & & -4 \end{array} \right)$$

$f'(t)=0$ となるtは $t = -\frac{5}{3}, 3$

増減表は



t	0	…	3	…	5
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	最大	↘	

よって $f(t)$ は $t=3$ の時最大

最大値は

$$f(3) = \frac{1}{2}(-3^3+2\cdot 3^2+15\cdot 3)$$

$$= \frac{1}{2}(-27+18+45)$$

$$= \frac{1}{2} \times 36 = 18$$

以上より

最大値 18 $(t=3)$

(3)

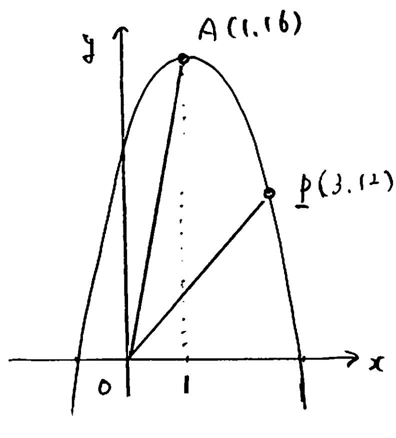
$$y = -x^2+2x+15$$

$$= -(x^2-2x)+15$$

$$= -\{(x-1)^2-1\}+15$$

$$= -(x-1)^2+16$$

頂点 $A(1, 16)$



ここで直線OAの方程式は

$$y = \frac{16}{1}x$$

よって $y = 16x$

直線OPの方程式は

$$y = \frac{12}{3}x$$

よって $y = 4x$

である。$0 \leqq x \leqq 1$, $1 \leqq x \leqq 3$ で分けて考えると

$0 \leqq x \leqq 1$ では

上側は直線OA, 下側は直線OP

$1 \leqq x \leqq 3$ では

上側が放物線C, 下側が直線OP

よって求める面積Sは

$$S = \int_0^1 (16x-4x)\,dx + \int_1^3 \{(-x^2+2x+15)-4x\}\,dx$$

$$= \int_0^1 12x\,dx + \int_1^3 (-x^2-2x+15)\,dx$$

$$= \left[6x^2\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+15x\right]_1^3$$

$$= 6+(-9-9+45)-\left(-\frac{1}{3}-1+15\right)$$

$$= 6+27+\frac{1}{3}-14$$

$$= 19+\frac{1}{3} = \frac{57+1}{3} = \frac{58}{3}$$

26

(1)

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x^2+4x+6 \end{cases}$$

連立して

$x^2 = -x^2+4x+6$

$2x^2-4x-6=0$

$\div 2$　$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

よって　$x=3,\ -1$

したがって

$A(3,9),\ B(-1,1)$

(2)

$y=x^2$ より　$y'=2x$

よって $A(3,9)$ における接線の方程式は

$y-9 = 2\times 3(x-3)$

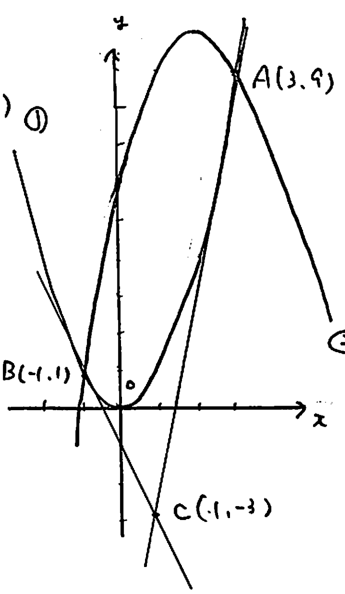
よって　$y=6x-9$

$B(-1,1)$ における接線の方程式は

$y-1 = 2\times(-1)(x+1)$

よって　$y=-2x-1$

(3)



接線の交点を求める。

(2)の結果を連立すると

$6x-9=-2x-1$

よって　$8x=8$ より　$x=1$

つまり 接線の交点Cは

$C(1,-3)$

となる。よって求める面積は

$-1 \leqq x \leqq 1$ では

上側が②, 下側がBC

$(y=-2x-1)$

$1 \leqq x \leqq 3$ では

上側が②, 下側がAC

$(y=6x-9)$

よってDの面積は

$$\int_{-1}^{1}\{(-x^2+4x+6)-(-2x-1)\}dx + \int_{1}^{3}\{(-x^2+4x+6)-(6x-9)\}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(-x^2+6x+7)dx + \int_{1}^{3}(-x^2-2x+15)dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+7x\right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{1}{3}x^3-x^2+15x\right]_{1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}+3+7\right)-\left(\frac{1}{3}+3-7\right) + (-9-9+45)-\left(-\frac{1}{3}-1+15\right)$$

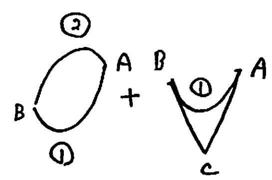
$$= -\frac{1}{3}+3+7-\frac{1}{3}-3+7 + 27+\frac{1}{3}-14$$

$$= -\frac{2}{3}+14+\frac{1}{3}+13$$

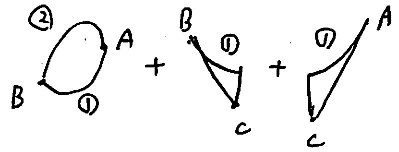
$$= 27-\frac{1}{3} = \frac{81-1}{3} = \frac{80}{3}$$

(3)別解

D =



=



$$= \int_{-1}^{3}\{(-x^2+4x+6)-x^2\}dx + \int_{-1}^{1}\{x^2-(-2x-1)\}dx + \int_{1}^{3}\{x^2-(6x-9)\}dx$$

$$= -2\int_{-1}^{3}(x^2-2x-3)dx + \int_{-1}^{1}(x^2+2x+1)dx + \int_{1}^{3}(x^2-6x+9)dx$$

$$= -2\int_{-1}^{3}(x+1)(x-3)dx + \int_{-1}^{1}(x+1)^2dx + \int_{1}^{3}(x-3)^2dx$$

$$= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3 + \left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_{1}^{3}$$

$$= \frac{1}{3}\times 4^3 + \frac{1}{3}(1+1)^3-\frac{1}{3}0^3 + \frac{1}{3}0^3-\frac{1}{3}(1-3)^3$$

$$= \frac{1}{3}\times 4^3+\frac{1}{3}\times 2^3+\frac{1}{3}\times 2^3$$

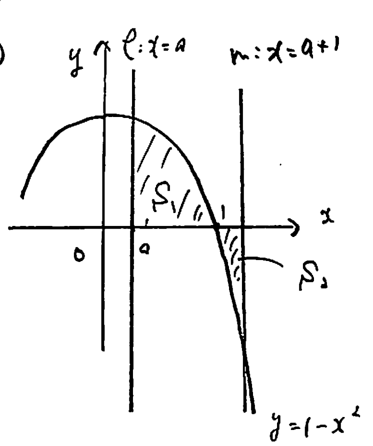
$$= \frac{4^3+2^3+2^3}{3}$$

$$= \frac{64+8+8}{3}$$

$$= \frac{80}{3}$$

27

(1)



$a \leqq x \leqq 1$ において,
上側は放物線 C
下側は x軸 であるので

$$S_1 = \int_a^1 \{(1-x^2)-0\}dx$$
$$= \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_a^1$$
$$= \left(1-\frac{1}{3}\right) - \left(a - \frac{1}{3}a^3\right)$$
$$= \frac{1}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}$$

(2)

$1 \leqq x \leqq a+1$ において
上側は x軸
下側は 放物線 C であるので

$$S_2 = \int_1^{a+1}\{0-(1-x^2)\}dx$$
$$= \int_1^{a+1}(x^2-1)dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_1^{a+1}$$
$$= \frac{1}{3}(a+1)^3 - (a+1) - \left(\frac{1}{3}-1\right)$$
$$= \frac{1}{3}(a^3+3a^2+3a+1) - a - 1 + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3}a^3 + a^2 + a + \frac{1}{3} - a - 1 + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{1}{3}a^3 + a^2$$

となる。

よって $S = S_1 + S_2$
$$= \left(\frac{1}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}a^3 + a^2\right)$$
$$= \frac{2}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{2}{3}$$

であるから、S の $0<a<1$ における最小値を考える。

$$f(a) = \frac{2}{3}a^3 + a^2 - a + \frac{2}{3}$$

とおくと

$$f'(a) = 2a^2 + 2a - 1$$

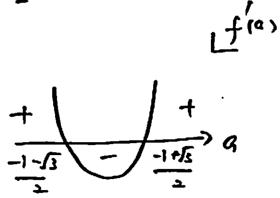
であるから $f'(a)=0$ となる a の値は解の公式より

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2\cdot(-1)}}{2}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

ここで $\sqrt{3}$ を 1.7 程度と考えると

$$\frac{-1+\sqrt{3}}{2} = \frac{-1+1.7}{2} = \frac{0.7}{2} = 0.35$$
$$\frac{-1-\sqrt{3}}{2} = \frac{-1-1.7}{2} = \frac{-2.7}{2} = -1.35$$

程度の数である。



増減表より

a	0	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

であるから、S は $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ の時最小となる。このときの $f(a)$ の値は

$$f(a) = \frac{1}{3}(2a^3+3a^2-3a+2)$$

として、$2a^3+3a^2-3a+2$ を $2a^2+2a-1$ で割ると

$$\begin{array}{r} a + \frac{1}{2} \\ 2a^2+2a-1 \,\big)\, \overline{2a^3+3a^2-3a+2} \\ \underline{2a^3+2a^2-a} \\ a^2-2a+2 \\ \underline{a^2+a-\frac{1}{2}} \\ -3a+\frac{5}{2} \end{array}$$

よって

$$f(a) = \frac{1}{3}(2a^3+3a^2-3a+2)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{(2a^2+2a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right) - 3a + \frac{5}{2}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}(2a^2+2a-1)\left(a+\frac{1}{2}\right) - a + \frac{5}{6}$$

ゆえに $a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき $2a^2+2a-1$ の値は 0 になるので

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{3} \times 0 \times \left(a+\frac{1}{2}\right) - \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6}$$
$$= \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{6}$$
$$= \frac{3(1-\sqrt{3})+5}{6}$$
$$= \frac{3-3\sqrt{3}+5}{6}$$
$$= \frac{8-3\sqrt{5}}{6}$$

以上より S は
最小値 $\frac{8-3\sqrt{5}}{6}$ $\left(a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$
をとる。

28

(1)

$f(x) = \int f'(x)dx$

$= \int(-3x^2+12kx-9k^2)dx$

$= -x^3+6kx^2-9k^2x+C$

（Cは積分定理）

ここで問題文より $f(0)=3$ であるから

$f(0) = -0^3+6k\cdot 0^2-9k^2\cdot 0+C$

$= C = 3$

以上より

$f(x) = -x^3+6kx^2-9k^2x+3$ //

(2)

$f(x) = -x^3+6kx^2-9k^2x+3$

より

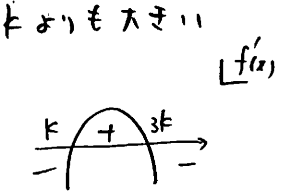
$f'(x) = -3x^2+12kx-9k^2$

$= -3(x^2-4kx+3k^2)$

$= -3(x-k)(x-3k)$

$f'(x)=0$ となる x は $x=k,\ 3k$

また条件より kは正の定数であるから、$3k$の方がkよりも大きい



増減表は

x	…	k	…	$3k$	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって $x=k$で極小　$x=3k$で極大

極小値は$f(k)$より

$f(k) = -k^3+6k\cdot k^2-9k^2\cdot k+3$

$= -k^3+6k^3-9k^3+3$

$= -4k^3+3$

極小値が-1であるから

$-4k^3+3=-1$

$-4k^3+4=0$

$\div(-4)$　$k^3-1=0$

$(k-1)(k^2+k+1)=0$

$k=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

kは正の定数であるので

$k=1$ //

このとき増減表より

x	…	1	…	3	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘		↗		↘

よって $x=3$で極大である。

$f(x) = -x^3+6x^2-9x+3$

より

$f(3) = -3^3+6\cdot 3^2-9\cdot 3+3$

$= -27+54-27+3$

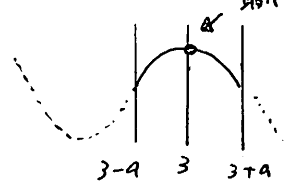
$= 3$

極大値 3　$(x=3)$ //

(3)

aの値が小さいときは

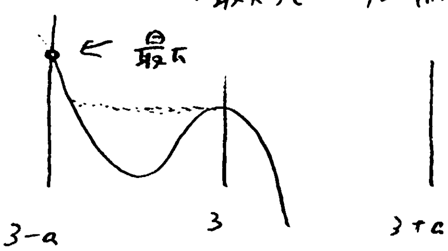
$x=3$で最大



aの値が大きくなっていき

$x=3$の時と同じ高さの場所

が見えてきたら最大値は左端



$x=3$と同じ高さになる点を考えると、$f(3)=3$であるので

$3=-x^3+6x^2-9x+3$

よって

$x^3-6x^2+9x=0$

$x(x^2-6x+9)=0$

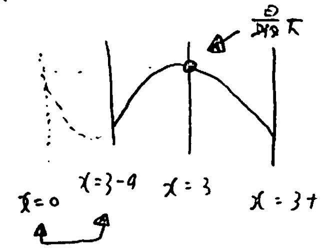
$x(x-3)^2=0$

よって $x=0,\ 3$.

・$0<3-a$

（つまり $0<a<3$ の時）

$x=0$よりも $x=3-a$ の方が右側

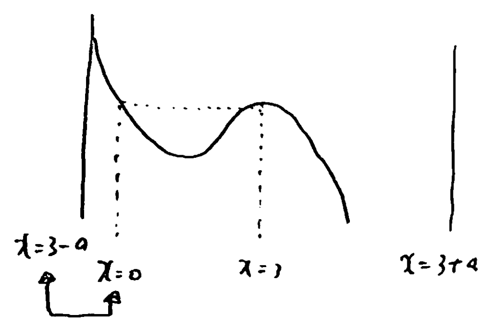


よって 最大値 3　$(x=3)$

・$3-a\leqq 0$

（つまり $a\geqq 3$ の時）

$x=3-a$の方が $x=0$よりも左側



よって 最大値 $f(3-a)$

$= a^3-3a^2+3$

$(x=3-a)$

以上より 最大値は

$0<a<3$ のとき

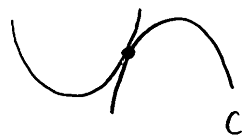
3

$3\leqq a$ のとき

a^3-3a^2+3 //

29

(1)



2つの放物線がただ1つの共有点をもつので連立した

xの2次方程式

$$ax^2=-b(x-1)^2+1$$

は重解をもつ。

$$ax^2=-b(x^2-2x+1)+1$$

$\left(\begin{array}{l} a>1,\ b>1 \\ より\ a+b\neq0 \end{array}\right)$

$$ax^2=-bx^2+2bx-b+1$$

$$(a+b)x^2-2bx+(b-1)=0 \cdots (*)$$

よって判別式 $D=0$ となるので

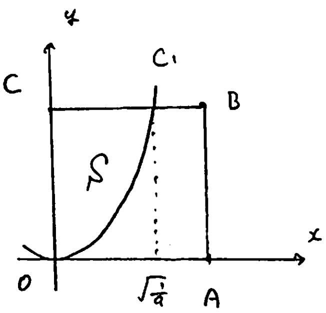
$$\frac{D}{4}=(-b)^2-(a+b)(b-1)=0$$

$$b^2-(ab-a+b^2-b)=0$$

$$b^2-ab+a-b^2+b=0$$

$$-ab+a+b=0$$ //

(2)



放物線C_1と直線BCの交点は、直線BCの方程式が$y=1$であるので

$$1=ax^2$$

よって $x=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

である。y軸よりも右側なので

$x=\sqrt{\frac{1}{a}}$であり、$a>1$であるから

$0<\sqrt{\frac{1}{a}}<1$ が成り立つ。

したがってSは

$0\le x\le\sqrt{\frac{1}{a}}$において

上側は直線BC

下側は放物線C_1であるので

$$S=\int_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}}(1-ax^2)dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{a}}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a}}-\frac{1}{3}a\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^3$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a}}-\frac{1}{3}a\times\frac{1}{a}\sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{a}}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}$$ //

(3)

(1)における2次方程式において重解は

$$x=\frac{2b\pm\sqrt{0}}{2(a+b)}=\frac{b}{a+b}$$

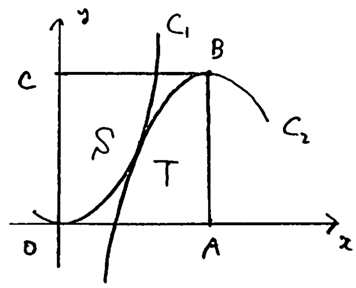
である。ここで $a>0$; $b>0$ であるので

$$0<b<a+b$$

が成り立つ。$a+b$で割ると

$$0<\frac{b}{a+b}<1$$

が成り立つので、2つの放物線C_1, C_2の接点は $0<x<1$ の範囲に存在する。



放物線$C_2: y=-b(x-1)^2+1$

より頂点は$(1,1)$であり

上に凸な放物線であるから

上図のようになる。

放物線C_2とx軸との交点は

$$0=-b(x-1)^2+1$$

$$b(x-1)^2=1$$

$(x-1)^2=\frac{1}{b}$ より

$x-1=\pm\sqrt{\frac{1}{b}}$ つまり $x=1\pm\sqrt{\frac{1}{b}}$

直線ABより左側なので

$x=1-\sqrt{\frac{1}{b}}$ である。

$1-\sqrt{\frac{1}{b}}\le x\le1$において

上側が放物線C_2

下側がx軸なので

$$T=\int_{1-\sqrt{\frac{1}{b}}}^{1}\left\{-b(x-1)^2+1-0\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}b(x-1)^3+x\right]_{1-\sqrt{\frac{1}{b}}}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}b(1-1)^3+1+\frac{1}{3}b\left(1-\sqrt{\frac{1}{b}}-1\right)^3-\left(1-\sqrt{\frac{1}{b}}\right)$$

$$=0+1+\frac{1}{3}b\left(-\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^3-1+\sqrt{\frac{1}{b}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{\frac{1}{b}}$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{b}}$$

よって $S:T=2:1$ より

$$\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{a}}:\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{b}}=2:1$$

$$\sqrt{\frac{1}{a}}:\sqrt{\frac{1}{b}}=2:1$$

$$2\sqrt{\frac{1}{b}}=\sqrt{\frac{1}{a}}$$

両辺2乗して $4\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a}$

よって両辺にabかけて $4a=b$

これを(1)の結果に代入して

$$-a\times4a+a+4a=0$$

$$-4a^2+5a=0$$

$$-a(4a-5)=0$$

$$a=0,\ \frac{5}{4}$$

$a>1$ より $a=\frac{5}{4}$

$b=4a=4\times\frac{5}{4}=5$

($b>1$を満たす)

以上より

$$a=\frac{5}{4},\ b=5$$ //

30 (1) 解答

6

解説

分母に $x=2$ を代入すると計算結果が 0 になる。分母が 0 になってしまうのは許されないので，そのまま代入することができないから代入する前に式変形をする。分子に $x=2$ を代入すると計算結果が 0 になるので，分子は $x-2$ を因数にもつ。つまり，約分ができる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x-2} &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x+4)}{1}\\
&= \lim_{x\to 2}(x+4)\\
&= 2+4\\
&= 6
\end{aligned}
$$

となる。

(2) 解答

$-\dfrac{18}{7}$

解説

分子に $x=-4$ を代入すると 0 になるので，分子は $x+4$ で割り切れる。ゆえに分子と分母を $x+4$ で約分できる。したがって，分子，分母を因数分解する。分子は 3 次式であるから，多項式の割り算をすると

$$
\begin{array}{r r}
 & x^2 \qquad +2 \\ \cline{2-2}
x+4 \,\big) & x^3+4x^2+2x+8 \\
 & x^3+4x^2 \qquad\qquad \\ \cline{2-2}
 & 2x+8 \\
 & 2x+8 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

より

$$x^3+4x^2+2x+8=(x+4)(x^2+2)$$

と因数分解できるので

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -4}\frac{x^3+4x^2+2x+8}{x^2+x-12} &= \lim_{x\to -4}\frac{(x+4)(x^2+2)}{(x+4)(x-3)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{x-3}\\
&= \frac{(-4)^2+2}{(-4)-3}\\
&= \frac{16+2}{-7}\\
&= -\frac{18}{7}
\end{aligned}
$$

となる。

(3) 解答

$\dfrac{1}{4}$

解説

$\dfrac{1}{x}$ に $x=0$ を代入すると分母が 0 になるので，代入する前に式変形する。まず，通分する。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2-x}-\frac{1}{2+x^2}\right) &= \frac{1}{x}\cdot\frac{(2+x^2)-(2-x)}{(2-x)(2+x^2)}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{2+x^2-2+x}{(2-x)(2+x^2)}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2+x}{(2-x)(2+x^2)}\\
&= \frac{x^2+x}{x(2-x)(2+x^2)}
\end{aligned}
$$

そして分子を因数分解すると，約分ができる。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x(2-x)(2+x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)}{x(2-x)(2+x^2)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{(2-x)(2+x^2)}\\
&= \frac{0+1}{(2-0)(2+0^2)}\\
&= \frac{1}{2\cdot 2}\\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

となる。

(4) 解答

$\dfrac{1}{4}$

解説

分母に $x=3$ を代入すると計算結果が 0 になる。分母が 0 になるのでそのまま代入することができないから，代入する前に式変形をする。分子に $x=3$ を代入すると計算結果が 0 になる。つまり分子に $x-3$ が隠れていると考えて，分子を変形する。分子が $(\sqrt{}-\text{数})$ の形なので，分子と分母に $(\sqrt{}+\text{数})$ をかけて有理化と同じような変形をする。

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} &= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1})^2-2^2}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{(x+1)-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}
\end{aligned}
$$

そして，約分する。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} &= \lim_{x\to3}\frac{1}{\sqrt{x+1}+2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3+1}+2}\\ &= \frac{1}{2+2}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

31 (1) 解答

$-3f'(a)$

公式

微分係数 $f'(a)$ の定義は

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a) \tag{1}$$

である。ここで注目すべきは，第 (1) 式の左辺において，３つの h の場所が揃えばいつでも右辺にできること。つまり

$$\lim_{☆\to0}\frac{f\,(a+☆)-f(a)}{☆}=f'(a) \tag{2}$$

が成り立つ。

解説

今，与式について $-3h=H$ とおくと $h=-\dfrac{1}{3}H$ であり、また $h\to0$ のとき $H\to0$ である (h に 0 を代入すると，$H=-3\cdot0$ より $H=0$ となる)。したがって

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{h} &= \lim_{H\to0}\frac{f\,(a+H)-f(a)}{-\frac{1}{3}H}\\ &= -3\cdot\lim_{H\to0}\frac{f\,(a+H)-f(a)}{H}\end{aligned}$$

ゆえに第 (2) 式より，この式は $-3f'(a)$ となる。

参考

m を実数とする。同様にして

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+mh)-f(a)}{h}=mf'(a) \tag{3}$$

が成り立つ。

(2) 解答

$6f'(a)$

解説

第 (3) 式がうまく使えるように与式を変形する。第 (3) 式には $f(a)$ があるが与式にはないので，無理矢理登場させる。つまり，$f(a)$ と $-f(a)$ を同時に登場させればよい。

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+2h)-f(a-4h)}{h}\\ =&\ \frac{f(a+2h)-f(a-4h)+f(a)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

と変形する。すると

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+2h)-f(a-4h)+f(a)-f(a)}{h}\\ =&\ \frac{f(a+2h)-f(a)-f(a-4h)+f(a)}{h}\\ =&\ \frac{\{f(a+2h)-f(a)\}-\{f(a-4h)-f(a)\}}{h}\\ =&\ \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}+\frac{-f(a-4h)+f(a)}{h}\\ =&\ \frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}\end{aligned}$$

ゆえに，第 (3) 式より

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a-4h)}{h}\\ =&\ \lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-4h)-f(a)}{h}\\ =&\ 2f'(a)-\{-4f'(a)\}\\ =&\ 6f'(a)\end{aligned}$$

(3) 解答

$2af(a)-a^2f'(a)$

公式

第 (1) 式で $a+h=x$ とおく。すると $h=x-a$ となる。また，$h\to0$ のとき $x\to a$ となるので第 (1) 式は

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a) \tag{4}$$

と書き表すことができる。

解説

与式について，第 (1) 式が現れるように変形する。ここで, (2) で用いた変形を使う。つまり, $a^2f(a)$ と $-a^2f(a)$ を同時に登場させる。

$$\begin{aligned}&\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}\\ =&\ \frac{x^2f(a)-a^2f(x)+a^2f(a)-a^2f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

と変形すると

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2f(a)-a^2f(x)+a^2f(a)-a^2f(a)}{x-a}\\
=&\frac{x^2f(a)-a^2f(a)-a^2f(x)+a^2f(a)}{x-a}\\
=&\frac{\{x^2f(a)-a^2f(a)\}-\{a^2f(x)-a^2f(a)\}}{x-a}\\
=&\frac{(x^2-a^2)f(a)-a^2(f(x)-f(a))}{x-a}\\
=&\frac{(x^2-a^2)f(a)}{x-a}-\frac{a^2\{f(x)-f(a)\}}{x-a}\\
=&\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}f(a)-a^2\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
=&(x+a)f(a)-a^2\frac{f(x)-f(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

ゆえに，第 (4) 式より

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{x^2f(a)-a^2f(x)}{x-a}\\
=&\lim_{x\to a}\left\{(x+a)f(a)-a^2\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}\\
=&(a+a)f(a)-a^2\cdot f'(a)\\
=&2af(a)-a^2f'(a)
\end{aligned}$$

(4) 解答

$$\frac{3}{2}af(a)-\frac{1}{2}a^2f'(a)$$

解説

(3) と同様に変形する。つまり，$a^3f(x)$ と $-a^3f(x)$ を同時に登場させる。

$$\begin{aligned}
&\frac{x^3f(x)-a^3f(a)}{x^2-a^2}\\
=&\frac{x^3f(x)-a^3f(a)+a^3f(x)-a^3f(x)}{x^2-a^2}\\
=&\frac{\{x^3f(x)-a^3f(x)\}-\{a^3f(x)-a^3f(a)\}}{(x-a)(x+a)}\\
=&\frac{(x^3-a^3)f(x)}{(x-a)(x+a)}-\frac{a^3\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)(x+a)}\\
=&\frac{(x-a)(x^2+xa+a^2)}{(x-a)(x+a)}f(x)-\frac{a^3}{x+a}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\
=&\frac{x^2+xa+a^2}{x+a}f(x)-\frac{a^3}{x+a}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}
\end{aligned}$$

ゆえに，第 (4) 式より

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{x^3f(x)-a^3f(a)}{x^2-a^2}\\
=&\lim_{x\to a}\left\{\frac{x^2+xa+a^2}{x+a}f(x)-\frac{a^3}{x+a}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}\\
=&\frac{a^2+a\cdot a+a^2}{a+a}f(a)-\frac{a^3}{a+a}\cdot f'(a)\\
=&\frac{3a^2}{2a}f(a)-\frac{a^3}{2a}\cdot f'(a)\\
=&\frac{3}{2}af(a)-\frac{1}{2}a^2f'(a)
\end{aligned}$$

32 解答

$a=1,\quad b=-2$

解説

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=3 \tag{5}$$

$x\to 1$ のとき，分母 $x-1$ は $x-1\to 0$ となる。したがって，そのままでは計算できないので，約分することを考える。分子と分母が $x-1$ で約分されるためには，分子が $x-1$ を因数にもたなければならない。つまり，分子は $x-1$ で割り切れるので，分子に $x=1$ を代入すると計算結果は 0 になる（剰余の定理）。
分子は x^2+ax+b より，$x=1$ を代入すると $1+a+b$ となる。これが 0 となるので

$$1+a+b=0$$

b について解いて

$$b=-a-1 \tag{6}$$

第 (6) 式を第 (5) 式に代入して

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=3$$

ここで，分子を因数分解すると

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & -1 & \to & -1\\
 & \times & & & \\
1 & & (a+1) & \to & a+1\\
\hline
1 & & -a-1 & & a
\end{array}$$

より

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{x+(a+1)\}}{x-1}=3 \tag{7}$$

となる。ここで第 (7) 式の左辺は

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\{x+(a+1)\}}{x-1}&=\lim_{x\to 1}(x+a+1)\\
&=1+a+1\\
&=a+2
\end{aligned}$$

より，第 (7) 式に代入して

$$a+2=3$$

よって

$$a=1$$

となる。そして第 (6) 式に代入して

$$b=-1-1$$

よって

$$b=-2$$

となる。以上より

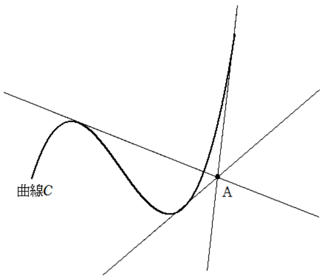
$$a=1,\ \ b=-2$$

である。

33 解答

$$-3<a<5$$

参考



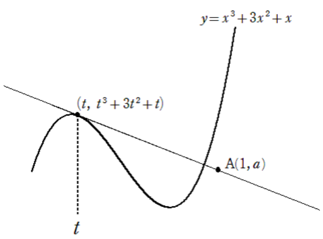
接線の問題は2種類ある。それは接点の座標が与えられているか、与えられていないか、の違いである。問題文が「点Aにおける接線」となっている場合は前者,「点Aを通る接線」「点Aから引いた接線」とある場合は後者であることが多い。本問の場合は，接線が点Aを通過しているだけであり，どこで接しているかわからないので，後者である。したがって，接点の座標を文字で表す。

解説

接点の x 座標を t とする。すると，接点は曲線 $C: y=x^3+3x^2+x$ 上の点なので

$$(t,\ t^3+3t^2+t) \tag{8}$$

とおける。



また，曲線 C の式を微分すると

$$y'=3x^2+6x+1 \tag{9}$$

であるから，第(8)式の点における接線の傾きは，第(9)式に接点の x 座標を代入して

$$y'=3t^2+6t+1 \tag{10}$$

となる。以上より接線の方程式は，第(8)式の点を通り，傾きが第(10)式で表されるので

$$y-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(x-t) \tag{11}$$

で表される。この接線は，問題文より点A$(1,\ a)$を通るので，第(11)式に$(1,\ a)$を代入して

$$a-(t^3+3t^2+t)=(3t^2+6t+1)(1-t) \tag{12}$$

が成り立つ。第(12)式を展開して整理すると

$$\begin{aligned} a-(t^3+3t^2+t) &= (3t^2+6t+1)(1-t) \\ a-(t^3+3t^2+t) &= 3t^2+6t+1-3t^3-6t^2-t \\ a-t^3-3t^2-t &= -3t^3-3t^2+5t+1 \\ a &= -2t^3+6t+1 \end{aligned}$$

より

$$a=-2t^3+6t+1 \tag{13}$$

が成り立つ。ここで第(13)式について考える。この t の方程式は，a の値を1つ決まれば，具体的に解くことができる。例えば，$a=1$ ならば第(13)式は $1=-2t^3+6t+1$ となるので，$t=0,\pm\sqrt{3}$ と解が求まる。この t の値は，第(8)式より，接点の x 座標である。したがって，$a=1$ のときは $t=0,\pm\sqrt{3}$ である点に向かって点Aから接線を引くことができるので，引ける接線の本数は3本である。つまり，**第(13)式の解の個数が引ける接線の本数に一致する**ので，第(13)式の解の個数を調べる。第(13)式は，2つのグラフ

$$\begin{cases} y=a \\ y=-2t^3+6t+1 \end{cases} \tag{14}$$

の交点の座標を求める式なので，第(13)式の解の個数は第(14)式の2つのグラフの交点の個数に一致する。ゆえに，第(14)式のグラフを書く。

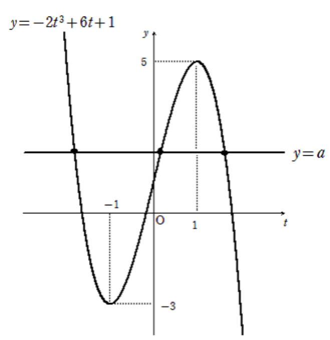
$y=-2t^3+6t+1$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= -6t^2+6 \\ &= -6(t^2-1) \\ &= -6(t+1)(t-1) \end{aligned}$$

となるので，$y'=0$ となる t の値は $t=1,\ -1$ である。増減表は

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5	$\searrow$

よりグラフは下図。

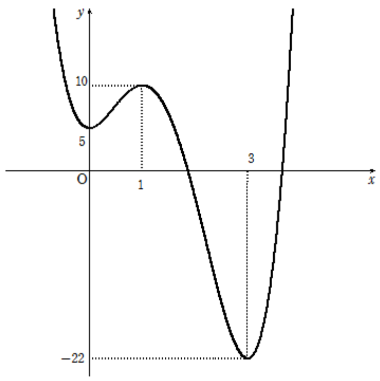


ここで問題文より，接線が３本引ける a の値の範囲を求めていたので，第 (14) 式の２つのグラフの交点が３点となるような a の値の範囲を求めればよい。それはグラフより

$$-3 < a < 5$$

であればよい。

34 解答



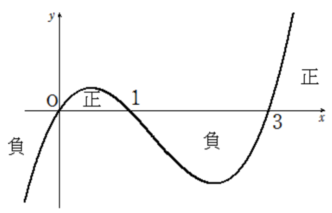
解説

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2 + 5$$

を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 48x^2 + 36x \\ &= 12x(x^2 - 4x + 3) \\ &= 12x(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

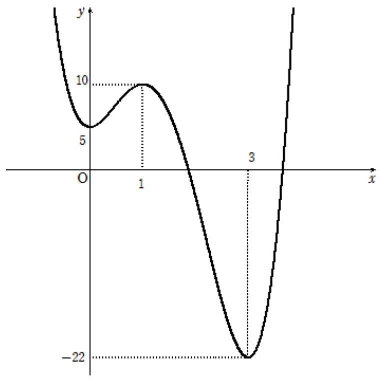
より，$f'(x) = 0$ となる x は $x = 0,\ 1,\ 3$ である。ここで，$f(x)$ の増減を調べるために，$f'(x)$ の正負を調べる。$f'(x)$ は x^3 の係数が正の３次関数であり，また $f'(x)$ のグラフは x 軸と $x = 0,\ 1,\ 3$ で交わるので，$f'(x)$ のグラフは下図の通りになる。



したがって，増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↗	10	↘	-22	↘

となるので，$y = f(x)$ のグラフは下図の通りである。



参考

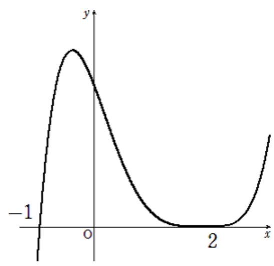
４次関数のグラフを書く手順は３次関数と同様である。$f(x)$ が４次関数のとき，$f'(x)$ は３次関数となる。ここで**大切なことは，$f'(x)$ の正負を調べることである**。つまり，$f'(x)$ が３次関数であるからといって，$f'(x)$ を微分してまでしてグラフを書く必要はない。**$f'(x)$ が 0 になる x と，x^3 の係数からグラフの概形を決定すればよい**。

35 解答

$$\frac{243}{10}$$

解説

曲線 $y = (x+1)(x-2)^4$ のグラフを考えると，グラフと x 軸との交点は $x = -1,\ 2$ であることは容易にわかるが，概形を書くのは難しい。実際，概形は下図のようになる。



しかし，本問で問われているのは，曲線と x 軸で囲まれた部分の面積である。それは，**曲線が x 軸よりも上側にあるのか下側にあるかさえ分かればよく、グラフの概形は必要ない**。したがって，曲線が x 軸よりも上側か下側か、つまり，y の正負について考える。

$y = (x+1)(x-2)^4$ において，$(x-2)^4$ は $x-2$ という数を４乗しているので，x が 2 でなければ，計算結果は必ず正の数となる。よって，

$$\begin{aligned} &y\text{ が正} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1) \times (\text{正の数}) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 > 0 \\ &y\text{ が負} \quad \Leftrightarrow \quad (x+1) \times (\text{正の数}) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 < 0 \end{aligned}$$

となる。つまり y の正負は $x+1$ の正負と一致するので

$$\begin{aligned} &y\text{ が正} \quad \Leftrightarrow \quad x+1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1 \\ &y\text{ が負} \quad \Leftrightarrow \quad x+1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \end{aligned}$$

となる。したがって，y の正負を表にまとめると

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y	$-$	0	$+$	0	$+$

となる。よって，曲線と x 軸で囲まれた部分は曲線の $-1 \leqq x \leqq 2$ の部分であり，またこの部分は上表より x 軸よりも上にある。ゆえに面積 S は公式より

$$S = \int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)^4 dx \tag{15}$$

で求められる。しかし第 (15) 式において，$\int$ の中を展開して積分の計算をするのは面倒である。よって，$\int$ の中の $(x-2)^4$ を大切にしながら変形をする。$x+1$ について

$$x + 1 = (x-2) + 3$$

と変形する。つまり，$x+1$ から無理矢理 $x-2$ を作り出す。すると分配法則より

$$\begin{aligned} (x+1)(x-2)^4 &= \{(x-2)+3\}(x-2)^4 \\ &= (x-2)(x-2)^4 + 3(x-2)^4 \\ &= (x-2)^5 + 3(x-2)^4 \end{aligned}$$

となる。

分配法則

$$\{(x-2)+3\}(x-2)^4 = (x-2)(x-2)^4 + 3(x-2)^4$$

したがって，第 (15) 式は

$$S = \int_{-1}^{2} \{(x-2)^5 + 3(x-2)^4\} dx \tag{16}$$

となる。$(x+a)^n$ の形の積分は，まるごと積分できるので，第 (16) 式は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \left\{(x-2)^5 + 3(x-2)^4\right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{6}(x-2)^6 + \frac{3}{5}(x-2)^5\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(\frac{1}{6}\cdot 0^6 + \frac{3}{5}\cdot 0^5\right) - \left\{\frac{1}{6}(-3)^6 + \frac{3}{5}(-3)^5\right\} \\ &= -\left(\frac{1}{6}\cdot 3^6 - \frac{3}{5}\cdot 3^5\right) \\ &= -\left(\frac{1}{6}\cdot 3^6 - \frac{1}{5}\cdot 3^6\right) \end{aligned}$$

そして 3^6 でくくって計算していくと

$$\begin{aligned} S &= -\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right)3^6 \\ &= -\left(-\frac{1}{30}\right)3^6 \\ &= \frac{3^5}{10} \\ &= \frac{243}{10} \end{aligned}$$

となる。

参考

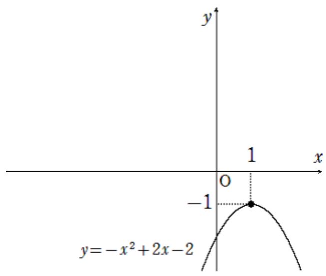
$(x+a)^n$ の形の積分は，まるごと積分できる。例えば

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x+4)^{100} dx = \left[\frac{1}{101}(x+4)^{101}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

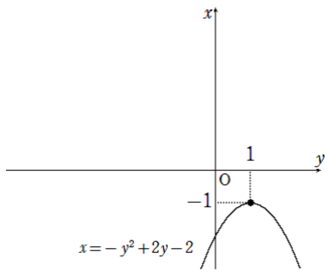
などである。次数が高い場合，展開して積分計算するよりも計算が容易になる場合が多い。

36 参考

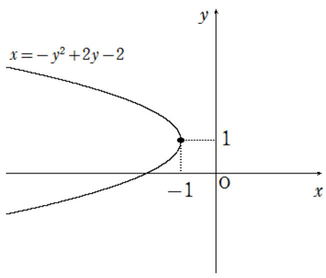
$x = f(y)$ のグラフの書き方の手順を紹介する。具体例として，$x = -y^2 + 2y - 2$ のグラフを書く。まず，x と y を入れ替えた $y = -x^2 + 2x - 2$ のグラフを xy 平面上に書く（図①)。次に，書いたグラフの x と y を入れ替える (図②)。すると，横軸が y 軸，縦軸が x 軸となっているので，これを本来のように横軸が x 軸，縦軸が y 軸となるように，グラフも一緒に書き直すと出来上がる (図③)。



図①

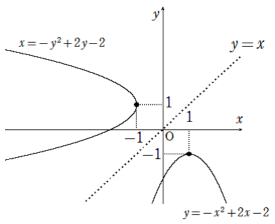


図②

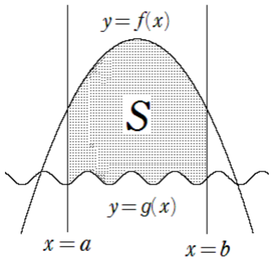


図③

ここで，図②から図③を書く手順において，**x と y を入れ替える操作はグラフを直線 $y = x$ に関して対称移動する操作に等しい**ので，この操作を行ってもよい。



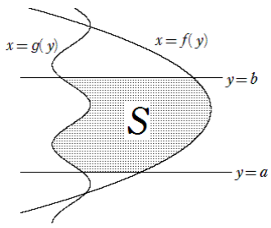
公式



2 曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 2 直線 $x=a$, $x=b$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx \tag{17}$$

によって与えられる。この公式は有名である。今，2 曲線 $x=f(y)$, $x=g(y)$ と 2 直線 $y=a$, $y=b$ で囲まれた部分の面積 S を考えたい。



それは，上述したように，$y=f(x)$ のグラフの x を y を入れ替えたものが $x=f(y)$ であるから，面積の公式も x と y を入れ替えればよい。つまり，第 (17) 式は

$$S=\int_{左}^{右}(上-下)dx$$

であったが，これの x と y を入れ替える、つまり上下の関係と左右の関係を入れ替えればいいので

$$S=\int_{下}^{上}(右-左)dy$$

つまり

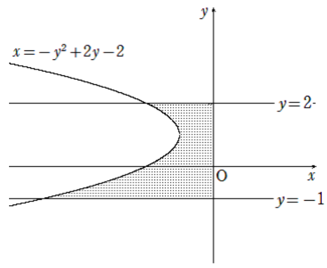
$$S=\int_a^b \{f(y)-g(y)\}dy \tag{18}$$

によって与えられる。ただし $a \leqq y \leqq b$ において，$x=f(y)$ の方が $x=g(y)$ よりも右側にあるとする。

(1) 解答

$$S=6$$

解説



図より $-1 \leqq y \leqq 2$ において，曲線 $x=-y^2+2y-2$ は y 軸 (つまり，直線 $x=0$) よりも左側にある。したがって，求める面積 S は第 (18) 式より

$$S=\int_{-1}^{2}\{0-(-y^2+2y-2)\}dy \tag{19}$$

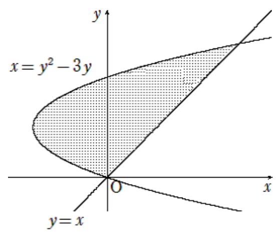
によって求められる。第 (19) 式を計算すると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{2}(y^2-2y+2)dy\\
&= \left[\frac{1}{3}y^3-y^2+2y\right]_{-1}^{2}\\
&= \left(\frac{2^3}{3}-2^2+2\cdot 2\right)-\left\{\frac{(-1)^3}{3}-(-1)^2+2(-1)\right\}\\
&= \frac{8}{3}-\left(-\frac{10}{3}\right)=6
\end{aligned}$$

(2) 解答

$$S=\frac{32}{3}$$

解説



曲線 $x=y^2-3y$ と直線 $y=x$ の交点の y 座標を求める。2 つの式から x を消去して

$$\begin{aligned}
y^2-3y &= y\\
y^2-4y &= 0\\
y(y-4) &= 0
\end{aligned}$$

より，$y=0$, 4 である。また図より $0 \leqq y \leqq 4$ において，曲線 $x=y^2-3y$ は直線 $y=x$ よりも左側にある。したがって，求める面積 S は第 (18) 式より

$$S=\int_0^4\{y-(y^2-3y)\}dy \tag{20}$$

によって求められる。(直線 $y=x$ は $x=y$ として第 (18) 式を用いる)。第 (20) 式を計算すると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^4(-y^2+4y)dy\\
&= -\int_0^4(y^2-4y)dy\\
&= -\int_0^4 y(y-4)dy
\end{aligned}$$

そして，$\frac{1}{6}$ の公式を用いると

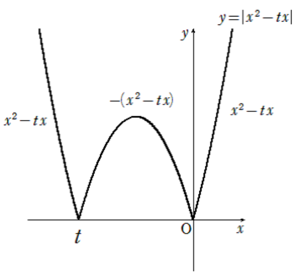
$$\begin{aligned} S &= -\int_0^4 y(y-4)dy \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3 \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

37 解答

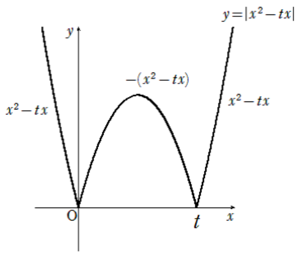
$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$

解説

$f(t)=\displaystyle\int_0^1 |x^2-tx|dx$ において，$f(t)$ は $y=|x^2-tx|$ のグラフと 3 直線 x 軸,$x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積である。ここで $y=|x^2-tx|$ のグラフを考える。
書き方は，まず絶対値の中身である $y=x^2-tx$ のグラフを書いて，x 軸よりも下側にある部分を x 軸に関して折り返せばよい。
ここで，折り返す必要のない部分（元々 x 軸の上にあった部分）を表す式は $y=x^2-tx$ であり，折り返した部分を表す式は $y=-(x^2-tx)$ である (x 軸に関して対称移動したため，y 座標が -1 倍された)。

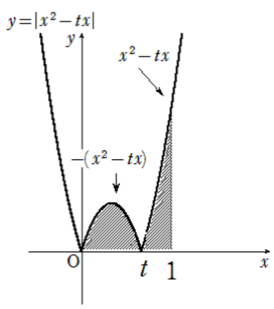


$t<0$ のとき

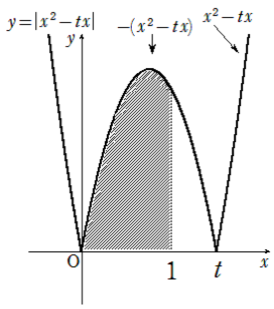


$t>0$ のとき

しかし，$x^2-tx=x(x-t)$ より，$y=x^2-tx$ と x 軸との交点は $x=0$，t のときであるから，グラフの形状について t の正負での場合分けが必要になる。
また，$t>0$ のときについて，$x=t$ を境目としてグラフを表す式が $-(x^2-tx)$ から x^2-tx に替わるので，$x=t$ が $0\leqq x\leqq 1$ の中に入るかどうかで場合分けをする。

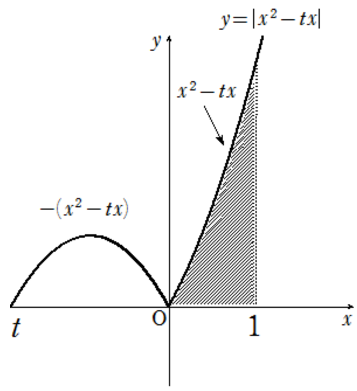


$0\leqq t\leqq 1$ のとき



$1<t$ のとき

- $t<0$ のとき



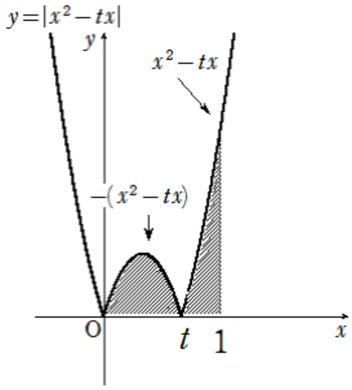
図より $0\leqq x\leqq 1$ において，曲線 $y=|x^2-tx|$ を表す式は $y=x^2-tx$ であるから $f(t)$ は

$$f(t)=\int_0^1 (x^2-tx)dx$$

となる。計算すると

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{2}t\cdot 1^2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{1}{2}t\cdot 0^2\right) \\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{2}t \end{aligned}$$

- $0\leqq t\leqq 1$ のとき



図より $0\leqq x\leqq 1$ において，曲線 $y=|x^2-tx|$ を表す式は，

$$y=\begin{cases} -(x^2-tx) & (0\leqq x\leqq t) \\ x^2-tx & (t\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

である。ゆえに $f(t)$ は $0\leqq x\leqq t$ と $t\leqq x\leqq 1$ の 2 つの部分の面積の和である。したがって

$$f(t)=\int_0^t \{-(x^2-tx)\}dx+\int_t^1 (x^2-tx)dx \quad (21)$$

である。ここで

$$\begin{aligned}
\int_0^t \{-(x^2-tx)\}dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2\right]_0^t \\
&= -\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t\cdot t^2 \\
&= \frac{1}{6}t^3 \\
\int_t^1 (x^2-tx)dx &= \left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}tx^2\right]_t^1 \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t\right)-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t\cdot t^2\right) \\
&= \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}t\right)-\left(-\frac{1}{6}t^3\right) \\
&= \frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

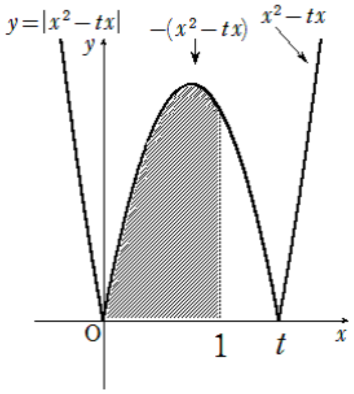
を第 (21) 式に代入して

$$f(t)=\frac{1}{6}t^3+\left(\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}\right)$$

より

$$f(t)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3} \tag{22}$$

- $1<t$ のとき



図より $0 \leqq x \leqq 1$ において，曲線 $y=|x^2-tx|$ を表す式は $y=-(x^2-tx)$ であるから $f(t)$ は

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^1 \{-(x^2-tx)\}dx \\
&= \int_0^1 (-x^2+tx)dx
\end{aligned}$$

となる。計算すると

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}tx^2\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}t
\end{aligned}$$

ここで，$t<0$ において，$f(t)$ のグラフは傾きが負の直線なので単調減少である。また，$1<t$ において，$f(t)$ のグラフは傾きが正の直線なので単調増加である。$0 \leqq t \leqq 1$ において，$f(t)$ を微分すると

$$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

となるので，増減表は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	↘		↘	最小	↗		↘

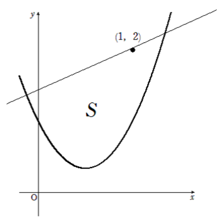
となる。つまり，$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で最小。また最小値は第 (22) 式に代入して

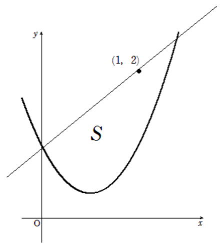
$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{12}-\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}$$

38 解答

$y=x+1$ のとき，最小値 $\dfrac{4}{3}$

解説





点 (1, 2) を通る直線を 1 つ決めると，放物線と直線で囲まれる部分の面積 S が計算できる。直線をいろいろと変化させたとき，S が最も小さい値をとるような直線を求める。

求める部分は，直線と放物線で囲まれた部分であるから，面積を求める際に $\frac{1}{6}$ の公式が使えないかと見越して計算していく。

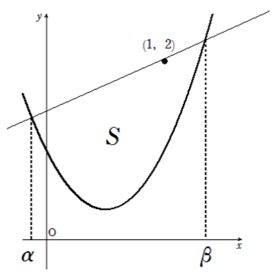
点 (1, 2) を通る直線の傾きを m とする。すると，この直線の方程式は

$$y-2=m(x-1) \tag{23}$$

と表すことができる。第 (23) 式を変形して

$$y=mx-m+2 \tag{24}$$

とする。また第 (24) 式の直線と放物線 $y=x^2-x+1$ の交点の x 座標を α, β とする。ただし $\alpha<\beta$ とする。



すると，この α, β は直線と放物線の式を連立して y を消去した

$$x^2 - x + 1 = mx - m + 2 \tag{25}$$

の 2 解である。第 (25) 式を整理して

$$x^2 - (m+1)x + m - 1 = 0 \tag{26}$$

となるので，解と係数の関係から第 (26) 式より

$$\alpha + \beta = -\frac{-(m+1)}{1},\ \alpha\beta = \frac{m-1}{1}$$

つまり

$$\alpha + \beta = m + 1,\ \alpha\beta = m - 1 \tag{27}$$

が成り立つ。実際，α, β は第 (26) 式に解の公式を用いることにより

$$x = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-1)}}{2 \cdot 1}$$

つまり

$$x = \frac{m + 1 \pm \sqrt{m^2 - 2m + 5}}{2}$$

と求めることができる。ここで $\alpha < \beta$ より，

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{m + 1 - \sqrt{m^2 - 2m + 5}}{2} \\ \beta = \dfrac{m + 1 + \sqrt{m^2 - 2m + 5}}{2} \end{cases} \tag{28}$$

と具体的に求めることができるが，ここでは α, β のまま扱う（しかし、解答後半でこの第 (28) 式を使う）。図より，求める面積 S は，$\alpha \leqq x \leqq \beta$ において直線が上側で放物線が下側であるから

$$S = \int_\alpha^\beta \{(mx - m + 2) - (x^2 - x + 1)\}dx$$

と計算される。$\int$ の中を整理すると

$$\begin{aligned} S &= \int_\alpha^\beta \{(mx - m + 2) - (x^2 - x + 1)\}dx \\ &= \int_\alpha^\beta (-x^2 + mx + x - m + 1)dx \\ &= -\int_\alpha^\beta (x^2 - mx - x + m - 1)dx \\ &= -\int_\alpha^\beta \{x^2 - (m+1)x + (m-1)\}dx \end{aligned}$$

より

$$S = -\int_\alpha^\beta \{x^2 - (m+1)x + (m-1)\}dx \tag{29}$$

ここで，第 (27) 式より

$$m + 1 = \alpha + \beta,\ m - 1 = \alpha\beta$$

として第 (29) 式に代入すると

$$S = -\int_\alpha^\beta \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\}dx \tag{30}$$

となる。第 (30) 式の $\int$ の中を因数分解して

$$S = -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)dx \tag{31}$$

となり，第 (31) 式に $\frac{1}{6}$ の公式を適用すると

$$S = -\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 \tag{32}$$

となる。第 (32) 式に，先ほど求めた α, β の値を代入する。つまり，第 (28) 式を代入して

$$S = \frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2 - 2m + 5}\right)^3 \tag{33}$$

となる。第 (33) 式が最小となる場合を考える。それは $m^2 - 2m + 5$ が最小となる場合である。2 次式の最小を考えるには平方完成する。ゆえに第 (33) 式において，根号内を平方完成すると

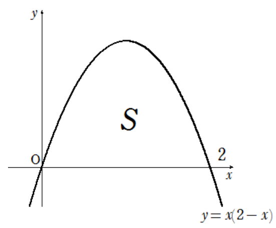
$$S = \frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-1)^2 + 4}\right)^3 \tag{34}$$

となる。ゆえに S は $m = 1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{4}\right)^3$ つまり $\dfrac{4}{3}$ をとる。またこのときの直線の方程式は，$m = 1$ を第 (24) 式に代入して $y = x + 1$ となる。

39 解答

$$a = 2 - \sqrt[3]{4}$$

解説



放物線 $y = x(2 - x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求める。放物線と x 軸との交点の x 座標は，y に 0 を代入して

$$x(2 - x) = 0$$

より，$x = 0,\ 2$ である。また，$0 \leqq x \leqq 2$ において，放物線は x 軸よりも上にあるので，面積 S は

$$S = \int_0^2 x(2 - x)dx \tag{35}$$

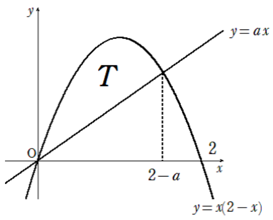
によって求められる。第 (35) 式を計算すると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 x(2 - x)dx \\ &= -\int_0^2 x(x - 2)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2 - 0)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

より

$$S = \frac{4}{3} \tag{36}$$

が成り立つ。



問題文より，直線 $y = ax$ が S を二等分するときの条件について考える。等分された面積について，放物線 $y = x(2-x)$ と直線 $y = ax$ で囲まれた部分の面積は $\frac{1}{6}$ の公式から簡単に求められる。この面積を T とすると，**S が二等分され，その片方が T であるならば，T 2 個分で S になる**。つまり $S = 2T$ が成り立つ。

放物線 $y = x(2-x)$ と直線 $y = ax$ で囲まれた部分の面積 T を求める。放物線と直線との交点の x 座標は，連立して y を消去して

$$x(2-x) = ax$$

より

$$\begin{aligned} x(2-x) &= ax \\ x(2-x) - ax &= 0 \\ x(2-x-a) &= 0 \\ -x(x-2+a) &= 0 \end{aligned}$$

両辺を -1 倍して

$$x\{x-(2-a)\} = 0$$

より $x = 0,\ 2-a$ である。また，$0 \leqq x \leqq 2-a$ において，放物線は直線よりも上にあるので，面積 T は

$$T = \int_0^{2-a} \{x(2-x) - ax\}dx \tag{37}$$

によって求められる。第 (37) 式を計算すると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2-a} \{x(2-x) - ax\}dx \\ &= \int_0^{2-a} x\{(2-x) - a\}dx \\ &= -\int_0^{2-a} x(x-2+a)dx \\ &= -\int_0^{2-a} x\{x-(2-a)\}dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{(2-a)-0\}^3 = \frac{1}{6}(2-a)^3 \end{aligned}$$

より

$$T = \frac{1}{6}(2-a)^3 \tag{38}$$

が成り立つ。

ここで直線 $y = ax$ が S を二等分するためには，直線 $y = ax$ が S の中を通過しなければならない。そのためには，放物線と直線の交点について，$2-a$ が 0 と 2 の間になければならない。したがって $0 < 2-a < 2$ から

$$0 < a < 2 \tag{39}$$

でなければならない。また $S = 2T$ という関係が成り立つので，第 (36) 式と第 (38) 式を代入して

$$\frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6}(2-a)^3 \tag{40}$$

となる。第 (40) 式の両辺を 3 倍して

$$(2-a)^3 = 4 \tag{41}$$

となる。つまり，$2-a$ は 3 乗すると 4 になる数であるから

$$2 - a = \sqrt[3]{4} \tag{42}$$

である。第 (42) 式を a について解くと

$$a = 2 - \sqrt[3]{4}$$

となる。これは第 (39) 式を満たす。

参考

第 (41) 式以降の解法は独特である。第 (41) 式を展開して a の 3 次方程式を作ってはいけない。作ってしまうと、そこから a の値を求めることが非常に難しい（というか無理)。

この問題は $X^3 = \alpha$ ならば，$X = \sqrt[3]{\alpha}$ であることを用いた。ここで注意することは，X も α も実数ならば，この解法で構わないということであり，実数でなければ（つまり，X が虚数になってもいいのならば）この解法は使えない。例えば，$X^3 = 8$ ならば

$$X^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (X-2)(X^2+2X+4) = 0$$

より，解の公式も用いると $X = 2,\ -1 \pm \sqrt{3}i$ という 3 つの解が求まる。

40 (1) 解答

$$x = 0,\ 1-k,\ 1+k$$

解説

曲線 C と直線 l の交点の x 座標も求めるために，連立して y を消去する。

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 + x &= k^2x \\ x^3 - 2x^2 + x - k^2x &= 0 \\ x\{x^2 - 2x + (1-k^2)\} &= 0 \\ x\{x^2 - 2x + (1-k)(1+k)\} &= 0 \end{aligned}$$

因数分解して

$$\begin{array}{cccc} 1 & -(1-k) & \rightarrow & -1+k \\ \times & & & \\ 1 & -(1+k) & \rightarrow & -1-k \\ \hline 1 & (1-k)(1+k) & & -2 \end{array}$$

より

$$x\{x-(1-k)\}\{x-(1+k)\}=0$$

となるので，交点の x 座標は

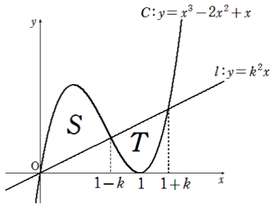
$$x=0,\ 1-k,\ 1+k$$

となる。

(2) 解答

$$k=\frac{1}{3}$$

解説



図のように，曲線 C と曲線 l で囲まれた部分の面積について，左側 (つまり $0 \leqq x \leqq 1-k$) の部分の面積を S，右側 (つまり $1-k \leqq x \leqq 1+k$) の部分の面積を T とする。すると，S については曲線 C の方が直線 l よりも上にあるので

$$S=\int_0^{1-k}(C-l)\,dx \tag{43}$$

である。また，T については直線 l の方が曲線 C よりも上にあるので

$$T=\int_{1-k}^{1+k}(l-C)\,dx \tag{44}$$

である。条件より，$S=T$ であるから，第 (43) 式と第 (44) 式を代入して

$$\int_0^{1-k}(C-l)\,dx=\int_{1-k}^{1+k}(l-C)\,dx \tag{45}$$

が成り立つ。第 (45) 式の右辺を以降して

$$\int_0^{1-k}(C-l)\,dx-\int_{1-k}^{1+k}(l-C)\,dx=0 \tag{46}$$

第 (46) 式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int_0^{1-k}(C-l)\,dx-\int_{1-k}^{1+k}(l-C)\,dx\\ &= \int_0^{1-k}(C-l)\,dx+\int_{1-k}^{1+k}(C-l)\,dx\end{aligned} \tag{47}$$

となる。ここで定積分の性質で

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

が成り立つ。ゆえに第 (47) 式の結果は

$$\int_0^{1-k}(C-l)dx+\int_{1-k}^{1+k}(C-l)dx=\int_0^{1+k}(C-l)dx$$

と簡単にできるので，第 (46) 式は

$$\int_0^{1+k}(C-l)\,dx=0 \tag{48}$$

となる。この第 (48) 式を具体的に計算していく。曲線 C と直線 l の式を第 (48) 式に代入すると

$$\int_0^{1+k}\left\{(x^3-2x^2+x)-k^2x\right\}dx=0 \tag{49}$$

ゆえに，第 (49) 式の左辺は

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \int_0^{1+k}\{x^3-2x^2+(1-k^2)x\}dx\\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1-k^2}{2}x^2\right]_0^{1+k}\\ &= \frac{1}{4}(1+k)^4-\frac{2}{3}(1+k)^3+\frac{1-k^2}{2}(1+k)^2\end{aligned}$$

となる。$1-k^2=(1+k)(1-k)$ であることに注意すると第 (49) 式は

$$\frac{1}{4}(1+k)^4-\frac{2}{3}(1+k)^3+\frac{1-k}{2}(1+k)^3=0 \tag{50}$$

となる。条件より $0<k<1$ であるから，$1+k$ は 0 にはならない。したがって，第 (50) 式の両辺を $(1+k)^3$ で割ると

$$\frac{1}{4}(1+k)-\frac{2}{3}+\frac{1-k}{2}=0 \tag{51}$$

となる。第 (51) 式を解くと

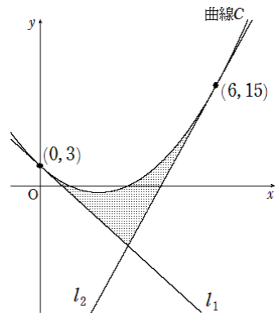
$$k=\frac{1}{3}$$

となる。これは $0<k<1$ を満たす。

41 解答

18

解説



$y=x^2-4x+3$ を微分すると

$$y'=2x-4 \tag{52}$$

である。よって，l_1 の方程式について，曲線 C 上の x 座標が 0 である点における接線であるから，第 (52) 式に $x=0$ を代入すると，l_1 の傾きが求められる。よって，接線の傾きは $2\cdot 0-4$ より -4 であるから，l_1 は点 $(0,\ 3)$ を通るので

$$y-3=-4(x-0)$$

すなわち

$$l_1: y=-4x+3 \tag{53}$$

である。同様に，l_2 の方程式について，曲線 C 上の x 座標が 6 である点における接線であるから，第 (52) 式に $x=6$ を代入すると，$2\cdot 6-4$ より接線の傾きは 8 である。l_2 は点 $(6,\ 15)$ を通るので

$$y-15=8(x-6)$$

すなわち

$$l_2: y=8x-33 \tag{54}$$

である。

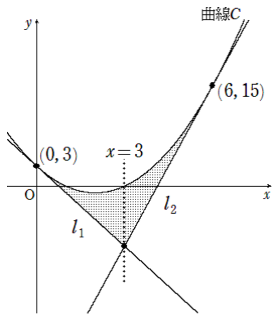
l_1 と l_2 の交点の x 座標を求める。第 (53) 式と第 (54) 式から

$$-4x+3=8x-33$$

を解くと

$$x=3$$

となる。



求める面積を S とするとき，$0\leqq x\leqq 3$ においては上側が曲線 C で下側が接線 l_1 である。また $3\leqq x\leqq 6$ においては上側が曲線 C で下側が接線 l_2 であるから，S を 2 つの部分の面積の和として表すと

$$S=\int_0^3 (C-l_1)dx+\int_3^6 (C-l_2)dx \tag{55}$$

となる。ここで第 (55) 式において，それぞれの定積分を計算すると

$$\begin{aligned}\int_0^3 (C-l_1)dx &= \int_0^3 \{(x^2-4x+3)-(-4x+3)\}dx\\ &= \int_0^3 x^2dx\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}\int_3^6 (C-l_2)dx &= \int_3^6 \{(x^2-4x+3)-(8x-33)\}dx\\ &= \int_3^6 (x^2-12x+36)dx\\ &= \int_3^6 (x-6)^2dx\end{aligned}$$

であるから，第 (55) 式は

$$S=\int_0^3 x^2dx+\int_3^6 (x-6)^2dx \tag{56}$$

となる。$\int$ の中身が $(x+a)^n$ の形である定積分はまるごと積分できたので, 第 (56) 式は

$$\begin{aligned}S &= \int_0^3 x^2dx+\int_3^6 (x-6)^2dx\\ &= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}(x-6)^3\right]_3^6\\ &= \left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-\frac{1}{3}\cdot 0^3\right)+\left\{\frac{1}{3}\cdot 0^3-\frac{1}{3}(-3)^3\right\}\\ &= 9+9=18\end{aligned}$$

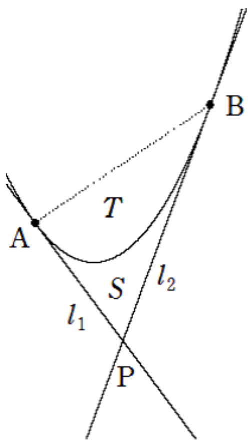
となる。

参考

任意の放物線 C において，C 上の異なる 2 点 A, B における接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。すると l_1 と l_2 の交点の x 座標は必ず A, B の x 座標の中央となる。また，C と 2 直線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積 S と，直線 AB と曲線 C で囲まれた部分の面積 T について，必ず

$$S:T=1:2$$

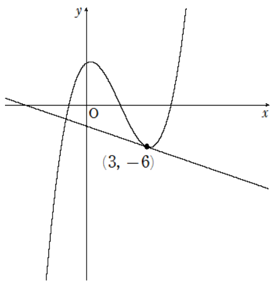
が成り立つ。



42 解答

$$\frac{64}{3}$$

解説



$y = x^3 - 5x^2 + 2x + 6$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 10x + 2 \tag{57}$$

である。よって，接線の方程式について，曲線上の x 座標が 3 である点における接線であるから，第 (57) 式に $x = 3$ を代入すると，接線の傾きが求められる。よって，接線の傾きは

$$y' = 3 \cdot 3^2 - 10 \cdot 3 + 2$$

より -1 であり，また接線は点 $(3,\ -6)$ を通るので

$$y - (-6) = -1 \cdot (x - 3)$$

すなわち

$$y = -x - 3 \tag{58}$$

である。ここで，第 (58) 式の接線は，接点 $(3,\ -6)$ の他にもう 1 点だけ曲線と交点をもつので，その点の x 座標を求める。
曲線 $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 6$ と第 (58) 式の接線の交点は，連立して y を消去した

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = -x - 3 \tag{59}$$

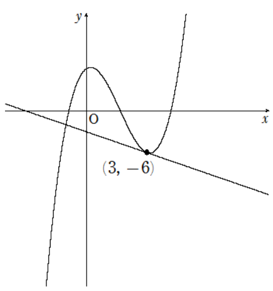
の解である。移項すると

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = 0 \tag{60}$$

となる。ここで，曲線と第 (58) 式の接線は点 $(3,\ -6)$ で接しているので，第 (60) 式の解の 1 つは $x = 3$ が現れるはずである。実際に第 (60) 式の左辺に $x = 3$ を代入すると

$$3^3 - 5 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 9 = 27 - 45 + 9 + 9$$

より計算結果は 0 となる。ゆえに第 (60) 式の左辺は $x - 3$ で割り切れる。実際に割り算すると，



商が $x^2 - 2x - 3$ で余りが 0 となる。したがって，第 (60) 式の左辺は

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x - 3)(x^2 - 2x - 3) \tag{61}$$

と変形できる。また，$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ であるから，第 (61) 式は

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 9 = (x - 3)^2(x + 1) \tag{62}$$

となる。したがって, 第 (60) 式の解は $x = 3,\ -1$ であることがわかるので，接点以外の交点の x 座標は $x = -1$ である。
ゆえに曲線と接線で囲まれた部分の面積 S は，$-1 \leqq x \leqq 3$ において曲線が上側で接線が下側なので

$$S = \int_{-1}^{3} \{(x^3 - 5x^2 + 2x + 6) - (-x - 3)\}dx \tag{63}$$

となる。第 (63) 式の $\int$ の中を計算すると

$$S = \int_{-1}^{3} (x^3 - 5x^2 + 3x + 9)dx$$

となり，第 (62) 式を用いると

$$S = \int_{-1}^{3} (x - 3)^2(x + 1)dx \tag{64}$$

となる。$(x - 3)^2$ を活かすため，$x + 1$ を

$$x + 1 = (x - 3) + 4$$

として，第 (64) 式を計算していくと

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} (x - 3)^2\{(x - 3) + 4\}dx \\ &= \int_{-1}^{3} \{(x - 3)^3 + 4(x - 3)^2\}dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x - 3)^4 + \frac{4}{3}(x - 3)^3\right]_{-1}^{3} \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 + \frac{4}{3} \cdot 0^3\right) - \left\{\frac{1}{4}(-4)^4 + \frac{4}{3}(-4)^3\right\} \\ &= \frac{64}{3} \end{aligned}$$

参考

曲線と接線は $x = 3$ **で接している**ので，第 (60) 式の解は $x = 3$ を**重解**としてもつ。ゆえに，第 (60) 式の左辺を $(x - 3)^2$ で割ってもよい。また，$x = 3$ を重解としてもつことまで分かったならば，第 (60) 式の解を $x = 3,\ 3,\ \alpha$ とすると，**3 次方程式の解と係数の関係**から

$$3 + 3 + \alpha = -\frac{(x^2\text{の係数})}{(x^3\text{の係数})} = -\frac{(-5)}{1} \tag{65}$$

より $\alpha = -1$ と簡単に求められる。突き詰めて考えると，曲線と接線の交点を求める方程式は第 (59) 式より，接線の方程式を $y = mx + n$ とすると

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 6 = mx + n \tag{66}$$

となるはずである。すると，接線の方程式がどんな式であったとしても (つまり，m，n の値にかかわらず) 第 (66) 式の x^3 の係数と x^2 の係数は影響を受けない。したがって，別に接線の方程式を求めなくても第 (65) 式を用いることで，曲線の式を見ただけで α を求めることが可能である。

なお，曲線と接線の位置関係（上下関係）について，曲線のグラフを書かなくても，第 (59) 式と第 (60) 式と第 (62) 式から

$$x^3-5x^2+2x+6-(-x-3)=(x-3)^2(x+1) \quad (67)$$

であるので，$-1 \leqq x \leqq 2$ において，第 (67) 式の右辺が正であるから，左辺も正，つまり曲線の方が接線よりも上にあることがわかる。