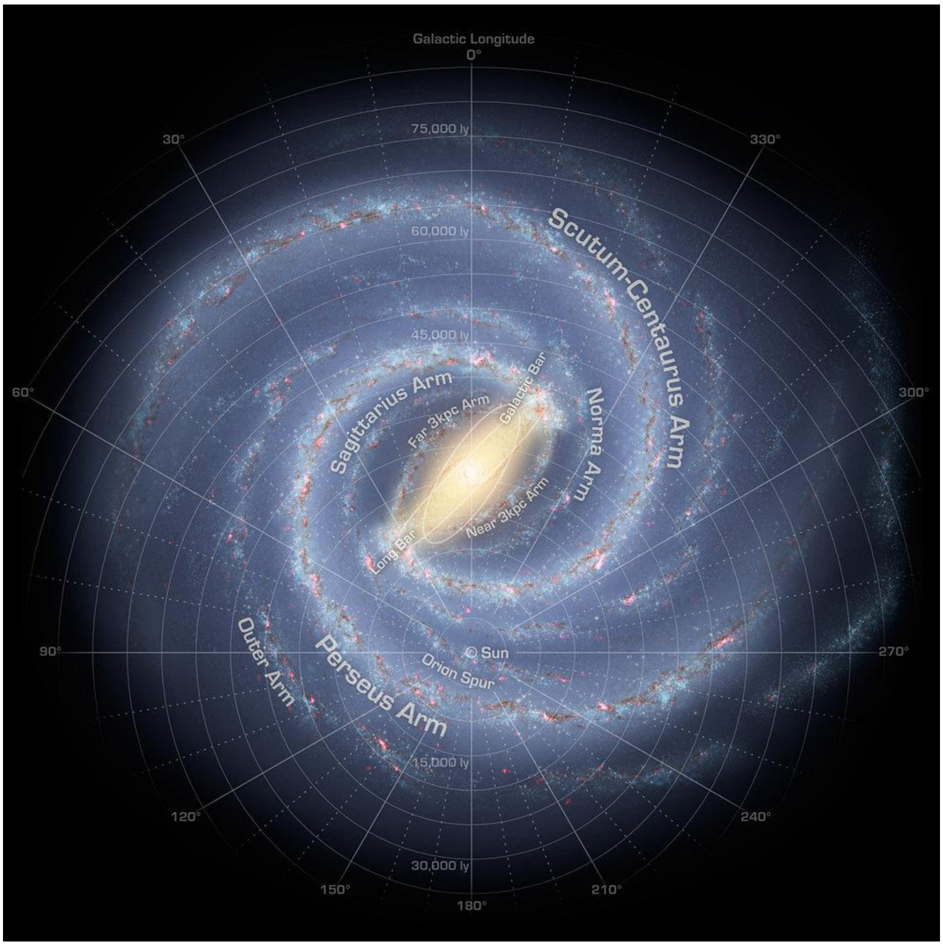
数学発展課題

三角関数・指数関数・対数関数



(　　)年(　　)組(　　)番 氏名(　　　　　　　　　　　　　)

三角関数　　平成 ＿＿ 年 ＿＿ 月 ＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，$y = 0$ であるような関数
$y = \sin\theta(k\sin\theta - 2\cos\theta) \cdots$ ①がある。
ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$，k は定数とする。
（1）定数 k の値を求めよ。
（2）$y = 0$ を満たすような θ をすべて求めよ。
（3）関数①の最大値と，そのときの θ の値を求めよ。

三角関数　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

2 θ の方程式 $\cos 2\theta - 3\cos\theta - a + 1 = 0 \cdots$ ①がある。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$，a は定数とする。

(1) $\cos\theta = x$ とおくとき，①の左辺を x と a で表せ。

(2) $a = 2$ のとき，方程式①を満たす θ の値を求めよ。

(3) 方程式①を満たす θ の値が4つあるような a の値の範囲を求めよ。

三角関数　平成＿＿年＿＿月＿＿日

3 関数 $y = 2\sin\theta\cos\theta + 2\cos^2\theta - 1$ がある。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，y の値を求めよ。

(2) y を $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を用いて表せ。さらに, $y = r\sin(2\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし，$r > 0$, $0 \leqq \alpha < 2\pi$ とする。

(3) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ とする。y の最大値，最小値と，そのときの θ の値を求めよ。

三角関数　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{4}$ 関数 $y=(2+\sin x)(2+\cos x)$ があり，$t=\sin x+\cos x$ とおく。ただし，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

（1）t を $r\sin(x+\alpha)$ の形で表せ。ただし, $r>0, 0 \leqq \alpha < 2\pi$ とする。

（2）t の値の範囲を求めよ。また，y を t の式で表せ。

（3）関数 y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

三角関数　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{5}$ 関数 $y = \sin 2\theta - 2(\sin\theta + \cos\theta) + a \ (0 \leqq \theta \leqq \pi$, a は定数) があり，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ のとき，$y = 2$ である。

(1) a の値を求めよ。

(2) $\sin\theta + \cos\theta = t$ とおくとき，$\sin 2\theta$ を t で表せ。
また，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 関数 y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

三角関数　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{6}$ 関数

$y = 2\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) - 4\sin\theta\cos\theta + 3 \ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

がある。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，y の値を求めよ。

(2) $2\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$ を $a\sin 2\theta + b\cos 2\theta$($a$，$b$ は定数) の形で表せ。また，y を $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$ で表せ。

(3) 関数 y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。

三角関数　平成＿＿年＿＿月＿＿日

7 原点を O とする座標平面上に，3 点 $A(1,\ 0)$, $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(2\cos 3\theta,\ 2\sin 3\theta)$ がある。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1) 線分 OQ の長さを求めよ。また，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときの線分 PQ の長さを求めよ。

(2) 三角形 OAP の面積が三角形 OPQ の 2 倍になるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) $PQ = \sqrt{2}$ のとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ 関数 $y_1 = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ がある。

（1）y_1 を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r > 0$，$0 \leqq \alpha < 2\pi$ とする。

（2）関数 y_1 の最大値，最小値と，そのときの θ の値をそれぞれ求めよ。

（3）関数 $y_2 = \cos\left(2\theta + \dfrac{2}{3}\pi\right)\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ がある。$y_1 + y_2$ のとりうる値の範囲を求めよ。

三角関数　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

9 関数 $y = 2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x \cdots$ ①がある。

(1) $x = \dfrac{\pi}{6}$ のとき，y の値を求めよ。

(2) ①を $y = r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ。また，$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，y の最小値とそのときの x の値を求めよ。ただし，r は正の定数とし，$-\pi \leqq \alpha < \pi$ とする。

(3) $0 \leqq x \leqq p$ において，$y = -2\sqrt{3}$ を満たす x の値がちょうど5個存在するとき，p のとりうる値の範囲を求めよ。

三角関数　平成＿＿年＿＿月＿＿日

10 $0 \leqq x < 2\pi$ で定義された関数

$y = \cos 2x + 2a \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} + 1$ (a は定数)

があり，$x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$y = 2$ である。

(1) a の値を求めよ。

(2) $\sin x = t$ とおく。このとき，y を t の式で表せ。また，y の最大値を求めよ。

(3) 方程式 $\cos 2x + 2a \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} + 1 = k$ (k は定数) の解が，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲にちょうど 2 個存在するとき，k の満たす条件を求めよ。

三角関数　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

11 θ の関数 $y = \sin\theta + k\cos\theta + 1$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ があり，$\theta = \dfrac{5}{6}\pi$ のとき $y = 0$ となる。ただし，k は定数である。

(1) k の値を求めよ。

(2) $y = 1$ となる θ の値を求めよ。

(3) y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{12}}$ 関数 $y = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ があり，$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおく。

（1）$\sin\theta\cos\theta$ を t を用いて表せ。

（2）t のとりうる値の範囲を求めよ。

（3）y の最大値と最小値を求めよ。

三角関数　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{13}}$ 関数 $y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+2\cos x \cdots$ ①がある。

(1) $x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ のときの y の値をそれぞれ求めよ。

(2) 関数①を $y=a\sin x+b\cos x$ ($a,\ b$ は定数) の形で表せ。また，関数①を $y=r\sin(x+\alpha)$ の形で表せ。ただし，$r>0,\ 0\leqq\alpha<2\pi$ とする。

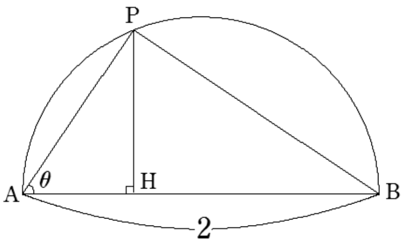
(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における y の最小値と $\beta\leqq x\leqq\beta+\dfrac{\pi}{2}$ における y の最大値が等しくなるような β の値を求めよ。ただし，$0\leqq\beta<2\pi$ とする。

14 右図のような長さ 2 の線分 AB を直径とする半円がある。円弧上の点 P に対して，$\angle \mathrm{PAB} = \theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とし，点 P から線分 AB に引いた垂線と線分 AB との交点を H とする。

(1) 線分 AP，PH の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とする。t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $\mathrm{AP} + \mathrm{BP} + \mathrm{PH}$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。



指数関数

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{15}}$ 関数 $y = 16^x + 4^{x+1} - a \cdot 4^x - 6$ がある。ただし，a は定数である。

（1）$4^x = t$ とおくとき，y を t の式で表せ。

（2）$a = 3$ のとき，$y = 0$ となる x の値を求めよ。

（3）$x \geqq 0$ のとき，y の最小値を求めよ。

指数関数　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

16 関数

$$f(x) = 4^x + \frac{1}{4^x} - 2k\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right) + 26$$

がある。ただし，k は定数である。また，$2^x + \dfrac{1}{2^x} = t$
とおく。

(1) $4^x + \dfrac{1}{4^x}$ を t を用いて表せ。

(2) $t \geqq 2$ であることを示せ。また，$k = 1$ のとき，$f(x)$ の最小値を求めよ。

(3) $f(x)$ の最小値が 16 であるとき，k の値を求めよ。

指数関数　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

17 関数 $y = 4^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 1$ がある。

(1) $x = 0$ のとき，y の値を求めよ。

(2) $t = 2^x$ とおくとき，y を t を用いて表せ。また，y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

(3) x についての方程式

$$4^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 1 = k \quad (k \text{ は定数}) \cdots\cdots ①$$

が異なる 2 つの実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。また，方程式①が正の解と負の解を 1 つずつもつような k の値の範囲を求めよ。

対数関数　平成＿＿年＿＿月＿＿日

18　2つの関数 $f(x)=\log_4(2x+k)$ と $g(x)=1+\log_2(x+1)$ がある。ただし，k は定数とする。

（1）$k=8$ のとき，$f(-2)$，$f(0)$ を求めよ。

（2）$k=8$ のとき，方程式 $f(x)=g(x)$ を解け。

（3）方程式 $f(x)=g(x)$ が $0 \leqq x \leqq 2$ の範囲に解をもつような k の値の範囲を求めよ。

対数関数　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{19}}$ 関数 $f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_4 ax^2$ がある。ただし，a は正の定数である。

(1) $a = 16$ のとき，$f(1)$，$f(4)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) $1 \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ の最大値が 5，最小値が $-\dfrac{5}{4}$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。ただし，$b \geqq 2$ とする。

対数関数　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

20 関数

$$y = (\log_3 x)^2 + 3k \log_{\frac{1}{3}} x^2 + 2 \quad (1 \leqq x \leqq 27)$$

がある。ただし，k は定数である。

(1) $t = \log_3 x$ $(1 \leqq x \leqq 27)$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) y を (1) の t を用いて表せ。また, $k = \dfrac{3}{4}$ のとき, $y = 0$ となるような x の値を求めよ。

(3) $y = 0$ となる実数 x が 2 個あるとき，k のとり得る値の範囲を求めよ。

対数関数　平成＿＿年＿＿月＿＿日

21 関数 $f(x) = \log_2(x-5) - \log_4(x-a)$ がある。ただし，a は定数とする。

（1）$a = 2$ のとき，$f(6)$，$f(11)$ の値を求めよ。

（2）$a = -3$ のとき，方程式 $f(x) = 1$ を解け。

（3）$a > 5$ とする。方程式 $f(x) = 1$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

対数関数　　平成______年______月______日

22 必要ならば，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，
$\log_{10} 7 = 0.8451$ を用いよ。

(1) 18^{70} は何桁の自然数か。また，最高位の数字は何か。

(2) $\left(\dfrac{1}{45}\right)^{54}$ について，小数点以下最初に 0 でない数字が現れるのは小数第何位か。また，その数字は何か。

(3) 3^{100} を 2 進数で表すと何桁の数になるか。