

①

(1)

$$y = \sin \theta (k \sin \theta - 2 \cos \theta)$$

$$1 = 2117. \theta = \frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{5\pi}{4}. y = 0$$

$\therefore$ 5 1 1 2

$$0 = \sin \frac{\pi}{4} (k \sin \frac{\pi}{4} - 2 \cos \frac{\pi}{4})$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (k \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\therefore \theta = \frac{1}{2}k - 1$$

$$\therefore k = 2$$

(2)

$$(1) \text{ or } k = 2$$

$$y = \sin \theta (2 \sin \theta - 2 \cos \theta)$$

$$= 2 \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

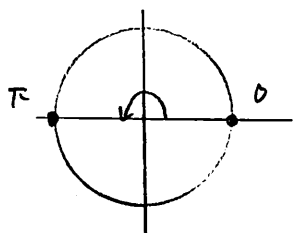
$$\text{or } y = 0 \text{ is given.}$$

$$2 \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta) = 0$$

$\therefore$

$$\sin \theta = 0 \text{ or } \sin \theta - \cos \theta = 0$$

$$[1] \sin \theta = 0 \text{ or } \theta = 0, \pi$$



$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ or } \sin \theta = 0$$

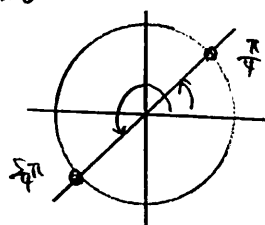
$$\therefore \sin \theta = 0 \text{ or } \theta = 0, \pi$$

$$[2] \sin \theta - \cos \theta = 0 \text{ or } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \text{ or } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \text{ or } \theta = 0, \pi$$

or

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1 \therefore \tan \theta = 1 \text{ or } -\sin 2\theta - \cos 2\theta \text{ is given}$$



or

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ or } \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$$

$$[1] \text{ or } [2] \text{ or } \theta = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}$$

(3)

$$y = 2 \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$\text{or } 0 \leq \theta < 2\pi \text{ or } \theta = 0, \pi$$

or

$$y = 2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \text{ or } (1)$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \text{ or } (1)$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\text{or } (1) \text{ or } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$(ii) \text{ or } 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) - 2 \cdot \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$= -\sin 2\theta - \cos 2\theta + 1$$

$$- \sin 2\theta - \cos 2\theta = \sqrt{2} \sin (2\theta - \frac{3\pi}{4})$$

$$y = \sqrt{2} \sin (2\theta - \frac{3\pi}{4}) + 1$$

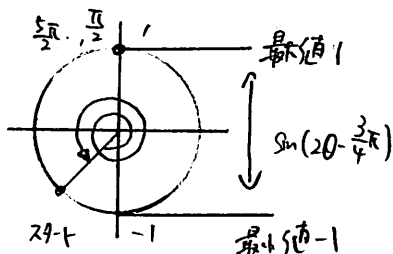
$$\therefore 0 \leq \theta < 2\pi \text{ or } 0 \leq 2\theta < 4\pi$$

$$0 \leq 2\theta < 4\pi$$

$$\therefore \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4} \text{ or } (1)$$

$$\therefore \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$



$$\sin (2\theta - \frac{3\pi}{4}) \text{ or } 2\theta - \frac{3\pi}{4} \text{ or } \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$

or

$$2\theta - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \text{ or } (2)$$

$$\text{or } \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$(2) \text{ or } \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}$$

$$2\theta = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$$

$$\text{or } \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta - \frac{3\pi}{4} < 4\pi - \frac{3\pi}{4}$$

$$(\theta = \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8})$$

2

(1)

$$\begin{aligned} (\textcircled{1} \text{ の } \angle \text{ について }) &= \cos 2\theta - 3\cos\theta - a + 1 \\ &= (2\cos^2\theta - 1) - 3\cos\theta - a + 1 \\ &= 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - a \end{aligned}$$

よして $\cos\theta = x$ とおくと

$$(\textcircled{1} \text{ の } \angle \text{ について }) = 2x^2 - 3x - a$$

(2)

$a = 2$ のとき (1) より

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

と解くと

$$(2x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}, 2$$

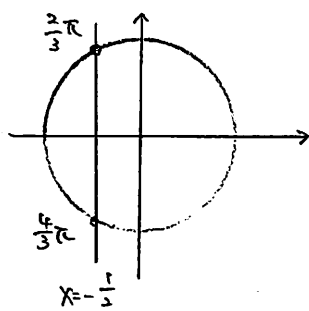
(1) より $\cos\theta = x$ より

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, 2$$

よして $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

より $\cos\theta = 2$ は不適当である。

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$ と置けるのは



$0 \leq \theta < 2\pi$ より

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

(3)

(1) にあいて $\cos\theta = x$ とおくと

$$\begin{cases} x = 1 \text{ のとき } \cos\theta = x \text{ を満たす } \theta \text{ は } \theta = 0 \text{ の } 1 \text{ 個} \\ x = -1 \text{ のとき } \cos\theta = x \text{ を満たす } \theta \text{ は } \theta = \pi \text{ の } 1 \text{ 個} \\ -1 < x < 1 \text{ を満たす } x \text{ については} \\ \cos\theta = x \text{ となる } \theta \text{ は } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

よして 方程式 $\textcircled{1}$ (つまり $\cos\theta = x$ とおくと

x の方程式

$$2x^2 - 3x - a = 0$$

が何個の解を持つかを言いたい。

よして x の解が x の範囲にある

出てくることを考える。

(x の範囲が $\textcircled{1}$ の解が 2 個ある)

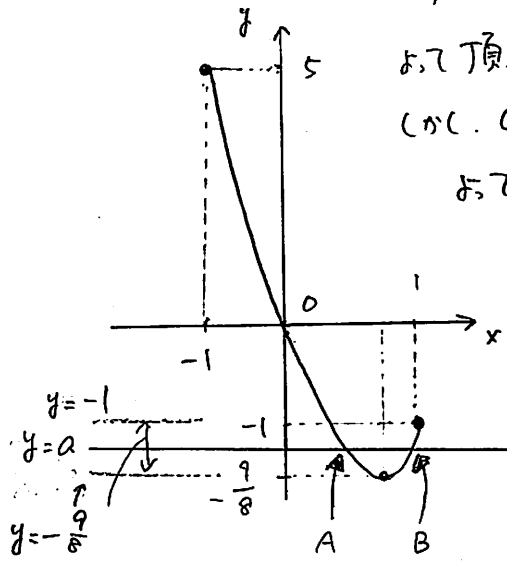
方程式を

$$2x^2 - 3x = a$$

とすると x の二次方程式 $y = 2x^2 - 3x$ と直線 $y = a$

の交点を求める方程式である。 $y = 2x^2 - 3x$ のグラフをかく

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 3x = 2(x^2 - \frac{3}{2}x) \\ &= 2\left\{(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{16}\right\} \\ &= 2(x - \frac{3}{4})^2 - \frac{9}{8} \end{aligned}$$



よして頂点 $(\frac{3}{4}, -\frac{9}{8})$ で $F = \frac{1}{4}$

($\because 0 \leq \theta < 2\pi$ より) $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

よして $\cos\theta = x$ とおくと

$-1 \leq x \leq 1$ の範囲 (x)

グラフが $y = a$ と交わる。

よして $y = a$ との交点を考える。

$$-\frac{9}{8} < a < -1 \text{ のとき}$$

(2 直線 $y = -1$ と $y = -\frac{9}{8}$ の間を通過する)

放物線 $y = 2x^2 - 3x$ と直線 $y = a$ の交点を A, B とすると

A, B の x 座標が $-1 < x < 1$ を満たす。このとき

$x = \cos\theta$ であるので、それだけの点の x 座標を与える

$\textcircled{1}$ は、各 2 個ずつ存在する。これは、方程式 $\textcircled{1}$ の解 θ が

点 A より 2 個、点 B より 2 個の計 4 個

存在するといえる。

以上より、方程式 $\textcircled{1}$ の解 θ が

4 個存在する a の範囲の範囲は

$$-\frac{9}{8} < a < -1$$

が成り立つ。

3

$$(1) \theta = \frac{\pi}{4} \text{ or } \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 1$$

$$= 1$$

(2)

$$2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta$$

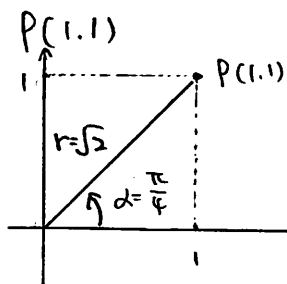
$\therefore$

$$y = 2 \sin \theta \cos \theta + (2 \cos^2 \theta - 1) \quad \text{この点の } y \text{ 座標の値を求めよう。}$$

$$= \sin 2\theta + \cos 2\theta$$

合成可能

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta$$



$\therefore$

$$\sin 2\theta + \cos 2\theta = \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$(3) y = \sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{すなわち } -\frac{3\pi}{4} \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq 2\theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{すなわち } \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

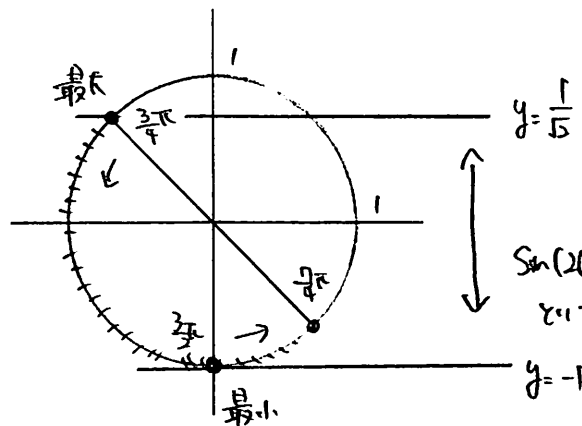
$$\therefore \frac{3\pi}{4} \leq 2\theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4} \dots (*)$$

よって $\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ の値を求めよう。

単位円上の点 (1,0) を (4) の点と見做す。

(5) の点と見做す。単位円上の点

の値を求めよう。この点の y 座標の値を求めよう。



よって $\sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ の値

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \text{ のとき、最大値 } \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4} \text{ のとき、最小値 } -1$$

よって、 $\sqrt{2} \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{4} \right)$ は、上記の値をとり、

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ と } -1$$

すなわち、最大値は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、最小値は -1 。

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore 2\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち } \theta = \frac{\pi}{4}$$

すなわち、最大値は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 、最小値は -1 。

$$2\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore 2\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{すなわち } \theta = \frac{3\pi}{4}$$

よって、

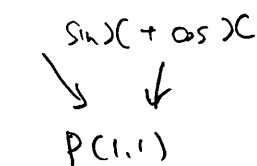
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ と } -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ と } -1$$

4

(1) $f = \sin x + \cos x$ ($x \geq 0$)

合成する。



$$\begin{aligned} f &= \sin x + \cos x \\ &= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

(2) 条件より

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

より、 $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ と $\frac{3\pi}{4}$ まで

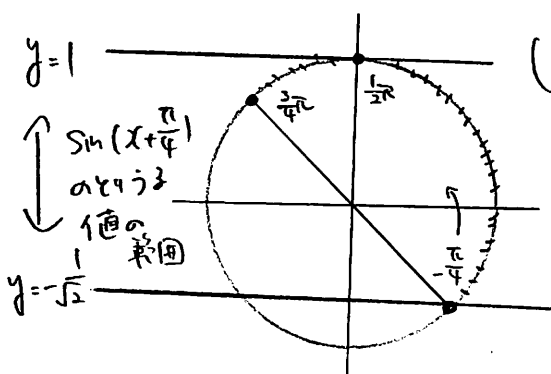
$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore -\frac{1}{4}\pi \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi \quad \dots (*)$$

(f = 1) のとき、 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ となる。

このとき、 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ となる。(*) の範囲

で、 $\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ となる点の y 座標は、



$$\text{よって、} -\frac{1}{2} \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$f = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \cdot \sqrt{2}$$

$$\therefore -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

また、(1) の結果より

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

より、 $y = t^2 + 2t + \frac{7}{2}$

$$y = (2 + \sin x)(2 + \cos x)$$

$$= 4 + 2\sin x + 2\cos x + \sin x \cos x$$

$$= \sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) + 4 \quad \dots (**)$$

$$\therefore f = \sin x + \cos x \text{ より}$$

$$f^2 = (\sin x + \cos x)^2$$

$$= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + 2\sin x \cos x$$

$$= 1 + 2\sin x \cos x$$

より

$$f^2 - 1 = 2\sin x \cos x$$

より

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(f^2 - 1)$$

(f = 1) のとき、(**) 式より

$$(**) \text{より } y = \frac{1}{2}(f^2 - 1) + 2f + 4$$

$$= \frac{1}{2}f^2 + 2f + \frac{7}{2}$$

(3) (2) の結果より

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

最大値、最小値を考察する。

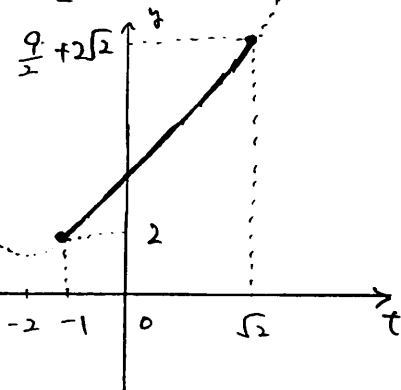
$$y = \frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(t^2 + 4t) + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\{(t+2)^2 - 4\} + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(t+2)^2 - 2 + \frac{7}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(t+2)^2 + \frac{3}{2}$$



$$f = -1 \text{ のとき、最小値 } 2$$

$$f = \sqrt{2} \text{ のとき、最大値 } \frac{9}{2} + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore f = -1 \text{ と } f = \sqrt{2} \text{ のとき}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(*) より

$$x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} \quad \therefore x = -\frac{\pi}{2}$$

$$f = \sqrt{2} \text{ のとき、} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\therefore x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{4}$$

(*) より

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{4}$$

よって

$$\text{最小値 } 2 \quad (x = -\frac{\pi}{2})$$

$$\text{最大値 } \frac{9}{2} + 2\sqrt{2}$$

$$(x = \frac{\pi}{4})$$

5

(1)

$$y = \sin 2\theta - 2(\sin \theta + \cos \theta) + a$$

$$1 = 2 \text{ かつ } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき } y = 2$$

また $\theta = \frac{5}{4}\pi$ のとき

$$2 = \sin(2 \cdot \frac{3}{4}\pi) - 2(\sin \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{3}{4}\pi) + a$$

$$2 = \sin \frac{3}{2}\pi - 2(\sin \frac{3}{4}\pi + \cos \frac{3}{4}\pi) + a$$

$$2 = -1 - 2\left\{\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} + a$$

$$2 = -1 - 2 \cdot 0 + a$$

$$\therefore a = 3$$

(2)

$$\sin \theta + \cos \theta = t \text{ とおす}$$

両辺を2乗して

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = t^2$$

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = t^2$$

$$(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2\sin \theta \cos \theta = t^2$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

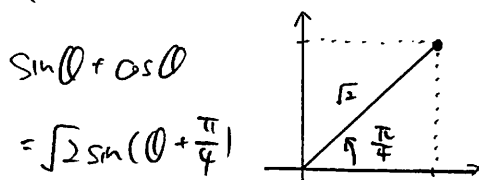
$$\text{よって } 2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta \text{ より}$$

$$1 + \sin 2\theta = t^2$$

$$\therefore \sin 2\theta = t^2 - 1$$

よって $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき t のとりうる値の範囲を調べる。

$$t = \sin \theta + \cos \theta \text{ を合成すると}$$

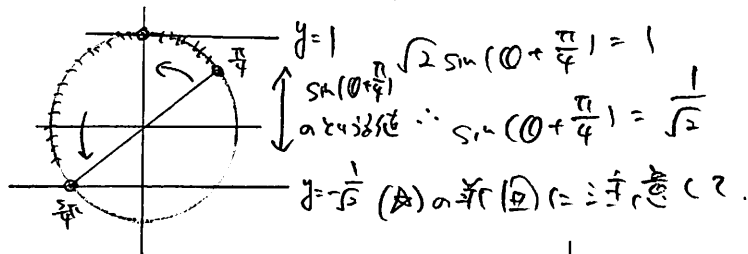


$$\text{よって } 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より}$$

$$\text{また } t = \frac{\pi}{4} \text{ かつ } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \dots (A)$$

$$\text{よって } \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \text{ の範囲は}$$



(A) の範囲は $\frac{3}{4}\pi$ まで

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \text{ の最大値は}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ かつ } \theta = \frac{3}{4}\pi$$

よって

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

$$\text{また } t = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$$

$$-1 \leq \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

$$\text{よって } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$(3) (2) \text{ より } \sin 2\theta = t^2 - 1 \text{ より}$$

$$y = t^2 - 1 - 2t + 3$$

$$= t^2 - 2t + 2$$

$$\therefore \text{関数の } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

$$\text{における最大値・最小値を}$$

調べる。

$$y = t^2 - 2t + 2$$

$$= (t-1)^2 + 1$$

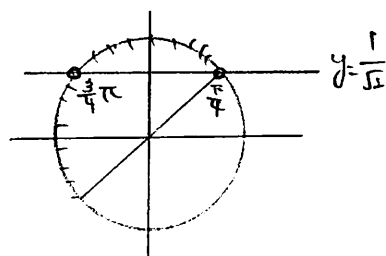
$$\text{よって } -1 \leq t \leq \sqrt{2} \text{ より}$$

$$t = 1 \text{ かつ } \theta = \frac{3}{4}\pi \text{ のとき } y = 1$$

$$t = -1 \text{ かつ } \theta = \frac{5}{4}\pi \text{ のとき } y = 5$$

$$\therefore t = 1 \text{ と } t = -1 \text{ のとき}$$

$$y = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \text{ より}$$



$$\therefore \theta + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$$

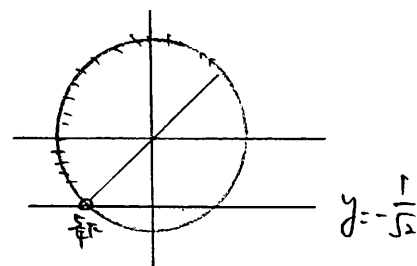
$$\text{よって } \theta = 0, \frac{1}{2}\pi$$

$$\text{また } t = -1 \text{ と } t = \sqrt{2} \text{ のとき}$$

$$\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$\therefore \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(A) の範囲は $\frac{3}{4}\pi$ まで



$$\theta + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$

$$\text{よって } \theta = \pi$$

以上より

$$\text{最大値 } 5 \text{ (} \theta = \pi \text{)}$$

$$\text{最小値 } 1 \text{ (} \theta = 0, \frac{1}{2}\pi \text{)}$$

6

(1) $\theta = \frac{\pi}{4}$ とき

$$\begin{aligned} y &= 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + 3 \\ &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + 3 \\ &= 2\sin\frac{5\pi}{6} - 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + 3 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 3 \\ &= 1 - 2 + 3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

(2) 加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

より

$$\begin{aligned} 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) &= 2\left(\sin 2\theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos 2\theta \sin \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(\sin 2\theta \cdot \frac{1}{2} + \cos 2\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\right) \\ &= \sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} y &= 2\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 4\sin\theta\cos\theta + 3 \\ &= (\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta) - 4\sin\theta\cos\theta + 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta \text{ より}$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} y &= \sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta - 4 \cdot \frac{1}{2}\sin 2\theta + 3 \\ &= \sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta - 2\sin 2\theta + 3 \\ &= -\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta + 3 \end{aligned}$$

13) (2) とき

$$y = -\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta + 3$$

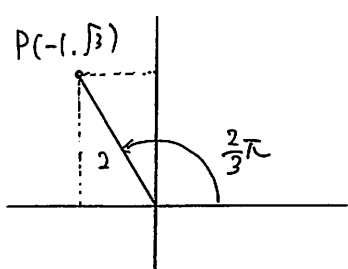
$$\Rightarrow -\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta$$

合成すると

$$-\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta$$

↓ ↓

$$P(-1, \sqrt{3})$$



よって

$$y = -\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta + 3$$

$$= 2\sin\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + 3$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ とき}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

また 2θ として

$$0 \leq 2\theta \leq \pi$$

$$\text{また } 2\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ とき}$$

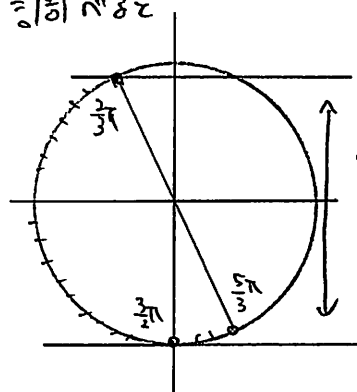
$$\frac{2\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{2\pi}{3} \leq \pi + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3} \leq 2\theta + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3}$$

よって $2\theta + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ とき

$$\sin\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって



よって

$$\begin{aligned} y &= \frac{5}{2} \\ \sin\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{よって } 2\theta + \frac{2\pi}{3} &= \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\sin\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = 1$$

より

$$2\theta + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \text{ とき}$$

$$\frac{5}{2}\pi \text{ とき}$$

$$2\theta + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{2} \text{ とき}$$

$$\frac{5}{2}\pi \text{ とき}$$

よって

$$2\sin\left(2\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + 3$$

より

$$\frac{5}{2}\pi \text{ とき } 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3$$

$$3 + \sqrt{3}$$

$$\frac{5}{2}\pi \text{ とき } 2 \cdot (-1) + 3$$

$$1$$

$$\text{よって } \theta = 0 \text{ とき}$$

また 2θ として

$$2\theta + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = 0$$

よって $2\theta + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ とき

$$2\theta + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\Rightarrow 2\theta = \frac{5\pi}{6}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{5}{2}\pi \text{ とき } 3 + \sqrt{3}$$

$$(\theta = 0)$$

$$\frac{5}{2}\pi \text{ とき } 1$$

$$(\theta = \frac{5\pi}{12})$$

7

(1) $Q(2\cos 30, 2\sin 30)$

解. $OQ = \sqrt{(2\cos 30)^2 + (2\sin 30)^2}$
 $= \sqrt{4(\cos^2 30 + \sin^2 30)}$
 $= \sqrt{4 \cdot 1} = 2$ 円

解. $\theta = \frac{\pi}{6}$ の時

$Q(2\cos(3 \cdot \frac{\pi}{6}), 2\sin(3 \cdot \frac{\pi}{6}))$

$\therefore Q(2\cos \frac{\pi}{2}, 2\sin \frac{\pi}{2})$

よって Q の座標は $(0, 2)$ である。

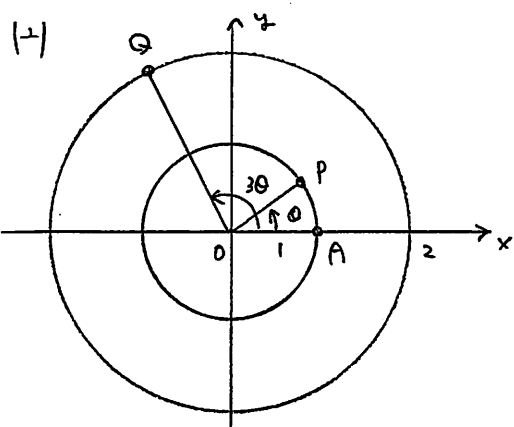
解. $P(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6})$

よって $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

これから、線分 PQ の長さは

$PQ^2 = (\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2 + (\frac{1}{2} - 2)^2$
 $= \frac{3}{4} + \frac{9}{4}$
 $= \frac{12}{4} = 3$

$PQ > 0$ より $PQ = \sqrt{3}$ 円



$P(\cos \theta, \sin \theta)$ は原点中心

半径 1 の円上にて。

x 軸と正の角度が θ である。

ある点である。解. $Q(2\cos 3\theta, 2\sin 3\theta)$

は原点中心 半径 2 の円上にて。

x 軸と正の角度が 3θ である点である。

よって $\angle AOP = \theta, \angle AOQ = 3\theta$

である。 $\angle POQ = \angle AOQ - \angle AOP$

から $\angle POQ = 3\theta - \theta = 2\theta$

である。 $\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$0 < 2\theta < \pi$ であり $0^\circ < \angle POQ < 180^\circ$

である。

よって $\Delta OAP = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OP \cdot \sin \angle AOP$
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \theta$
 $= \frac{1}{2} \sin \theta$

$\Delta OPQ = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ \cdot \sin \angle POQ$
 $= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sin 2\theta$
 $= \sin 2\theta$

ΔOAP の面積が ΔOPQ の $\frac{2}{5}$

より $\Delta OAP = 2\Delta OPQ$

$\therefore \frac{1}{2} \sin \theta = 2 \sin 2\theta$

$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ 円

$\frac{1}{2} \sin \theta = 2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$

$\frac{1}{2} \sin \theta = 4 \sin \theta \cos \theta \dots (*)$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $\sin \theta \neq 0$

(*) の両辺を $\sin \theta$ で割ると

$\frac{1}{2} = 4 \cos \theta$

$\therefore \cos \theta = \frac{1}{8}$ 円

(2) ΔOPQ へ余弦定理より

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos \angle POQ$

が成り立つ。解. 円

$PQ = \sqrt{2}$ である。

$OP = 1, OQ = 2, \angle POQ = 2\theta$

より

$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 2\theta$

$\therefore$

$2 = 1 + 4 - 4 \cos 2\theta$

$\therefore$

$\cos 2\theta = \frac{1 - 2 \sin^2 \theta}{2}$

より

$2 = 5 - 4(1 - 2 \sin^2 \theta)$

$2 = 5 - 4 + 8 \sin^2 \theta$

$\therefore$

$8 \sin^2 \theta = 1$

$\sin^2 \theta = \frac{1}{8}$

$\therefore$

$\sin \theta = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\therefore 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より

$\sin \theta > 0$

$\therefore$

$\sin \theta = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

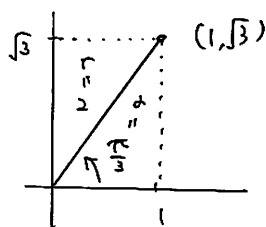
$= \frac{\sqrt{2}}{4}$ 円

8

(1)

$$y_1 = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

合成する



$$y_1 = 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$$

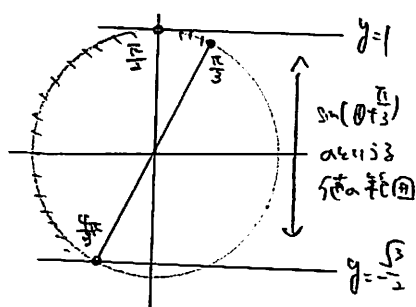
(2)

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ であり, } \theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

と仮定する

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$$

と仮定する



$$\text{よって, } \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1 \text{ となる}$$

(3) である。

$$\text{最大の値 } 1 \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{最小の値 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3})$$

$$\text{と仮定する。このとき } 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1 \text{ となる}$$

$$\text{最大の値 } 2 \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{最小の値 } -\sqrt{3} \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3})$$

よって

$$\text{最大の値 } 2 \quad (\theta = \frac{\pi}{6})$$

$$\text{最小の値 } -\sqrt{3} \quad (\theta = \pi)$$

(3)

$$y_2 = \cos(2\theta + \frac{2\pi}{3}) \text{ となる}$$

$$2\theta + \frac{2\pi}{3} = 2(\theta + \frac{\pi}{3}) \text{ である}$$

よって

$$\theta + \frac{\pi}{3} = t$$

と仮定する

$$y_2 = \cos 2t \dots (i)$$

と仮定する

$$y_1 = 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$$

$$= 2 \sin t \dots (ii)$$

と仮定する。よって (i)(ii) より

$$y_1 + y_2 = \cos 2t + 2 \sin t$$

と仮定する。よって、このとき $f(t)$ とおく

$$f(t) = \cos 2t + 2 \sin t$$

$$\text{と仮定する。} \cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t \text{ である}$$

$$f(t) = 1 - 2 \sin^2 t + 2 \sin t$$

$$= -2 \sin^2 t + 2 \sin t + 1$$

$$= -2(\sin^2 t - \sin t) + 1$$

$$= -2 \left\{ \left(\sin t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\} + 1$$

$$= -2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} + 1$$

$$= -2 \left(\sin t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \dots (*)$$

$$(2) \text{ より, } \sin t \text{ の範囲は } \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$$

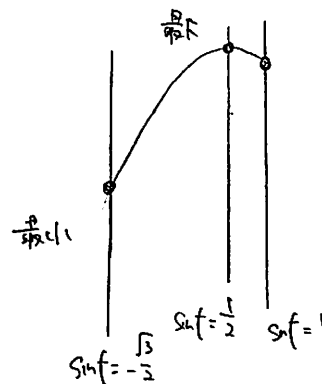
$$\text{となる。最大の値 } 1, \text{ 最小の値 } -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

である。よって

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin t \leq 1$$

と仮定する。よって、このとき (3) である

(*) 式 (*) の $\sin t$ の範囲



$$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } f(t) \text{ は最大の値 } \frac{1}{2}$$

$$\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } f(t) \text{ は最大の値 } \frac{1}{2}$$

$$-2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} + 1$$

$$= -2 \cdot \frac{3}{4} - \sqrt{3} + 1$$

$$= -\frac{3}{2} - \sqrt{3} + 1 = -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \sin t \text{ の範囲は } -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

よって

$$-\sqrt{3} - \frac{1}{2} \leq f(t) \leq \frac{3}{2}$$

$$\therefore -\sqrt{3} - \frac{1}{2} \leq y_1 + y_2 \leq \frac{3}{2}$$

9

(1)

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ かつ } \pi$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{6} + 2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}$$

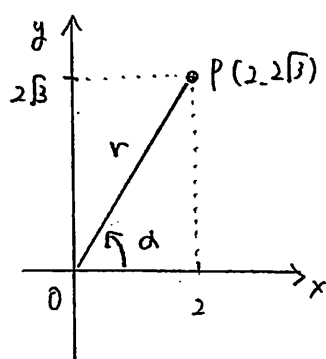
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1 + 3 = 4$$

(2)

$$y = 2\sin x + 2\sqrt{3}\cos x$$

1=2117. 合成可能と.



$$OP = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{4 + 12}$$

$$= \sqrt{16} = 4 = r$$

また、図の α は

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi \text{ かつ}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

1x上51

$$y = 4\sin(x + \frac{\pi}{3})$$

また、 $0 \leq x \leq \pi$ 1=2117.

y の最小値は.

$$y = 4\sin(x + \frac{\pi}{3}) \text{ であるから}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ かつ}$$

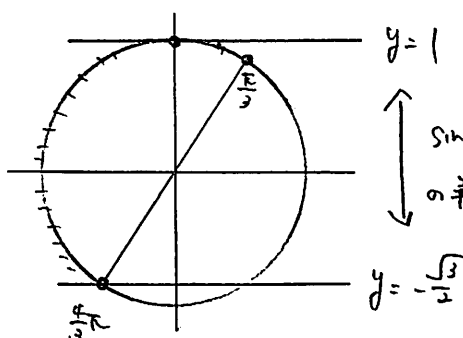
$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$$

2x上51 1=2117.

$$\sin(x + \frac{\pi}{3}) \text{ は}$$



$$\text{最大値 } 1 \quad (x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{最小値 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3})$$

$$\text{よって } 4\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1 \text{ 1=2117.}$$

$$\text{最小値 } 4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$\text{つまり } -2\sqrt{3} \text{ である.}$$

2x上51 の x は

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore x = \pi$$

$$(3) \quad y = -2\sqrt{3} \text{ である } x \text{ 1=2117.}$$

$$y = 4\sin(x + \frac{\pi}{3}) \text{ かつ}$$

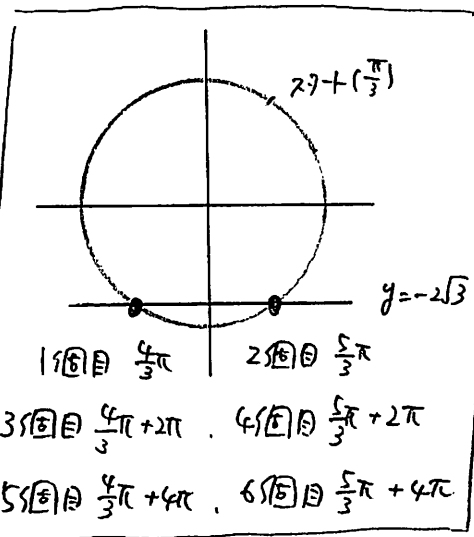
$$4\sin(x + \frac{\pi}{3}) = -2\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin(x + \frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (*)}$$

また、 $0 \leq x \leq \pi$ かつ

$$\text{よって } 0 \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \pi + \frac{\pi}{3}$$



$$1 \text{ 個目 } \frac{4\pi}{3}$$

$$2 \text{ 個目 } \frac{5\pi}{3}$$

$$3 \text{ 個目 } \frac{4\pi}{3} + 2\pi, \quad 4 \text{ 個目 } \frac{5\pi}{3} + 2\pi$$

$$5 \text{ 個目 } \frac{4\pi}{3} + 4\pi, \quad 6 \text{ 個目 } \frac{5\pi}{3} + 4\pi$$

$$\therefore p + \frac{\pi}{3} \text{ の } 5 \text{ 個目 } 1=2117.$$

方程式 (*) かつ

$$5 \text{ 個目の解を } x = \frac{4\pi}{3} + 4\pi$$

$$\text{と } 6 \text{ 個目の解を } x = \frac{5\pi}{3} + 4\pi$$

の解であることがわかる.

$$\therefore p + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 4\pi \text{ かつ}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq p \text{ の範囲 } 1=2117. (*) \text{ かつ}$$

$$x = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + 2\pi, \frac{5\pi}{3} + 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 4\pi$$

という 5 個の解があることがわかる. 問題文の条件に合う.

$$\text{また、 } p + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 4\pi \text{ かつ}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq p \text{ の範囲 } 1=2117. (*) \text{ かつ}$$

$$x = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} + 2\pi, \frac{5\pi}{3} + 2\pi,$$

$$\frac{4\pi}{3} + 4\pi, \frac{5\pi}{3} + 4\pi$$

という 6 個の解があることがわかる. 問題文の条件に合うことがわかる.

$$1x上51. \quad p + \frac{\pi}{3} \text{ 1=2117.}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 4\pi \leq p + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} + 4\pi$$

$$\frac{\pi}{3} \text{ かつ}$$

$$5\pi \leq p < \frac{16\pi}{3}$$

(10)

(1)

$$y = \cos 2x + 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1$$

==>

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

==> $\theta = \frac{x}{2}$ とおくと

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin (2 \cdot \frac{x}{2})$$

==>

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$$

==> y は

$$y = \cos 2x + 2a \cdot \frac{1}{2} \sin x + 1$$

$$= \cos 2x + a \sin x + 1$$

==> $x = \frac{\pi}{2}$ のとき $y = 2$ である。

==> 代入して

$$2 = \cos (2 \cdot \frac{\pi}{2}) + a \sin \frac{\pi}{2} + 1$$

$$2 = \cos \pi + a \sin \frac{\pi}{2} + 1$$

$$2 = (-1) + a \cdot 1 + 1$$

$$\therefore a = 2$$

(2)

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

==>

$$y = \cos 2x + 2\sin x + 1$$

$$= (1 - 2\sin^2 x) + 2\sin x + 1$$

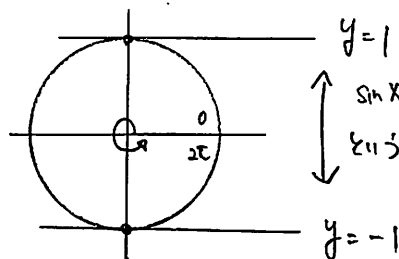
==> $\sin x = t$ とおくと

$$y = (1 - 2t^2) + 2t + 1$$

$$= -2t^2 + 2t + 2$$

==> $0 \leq x < 2\pi$ である。

$\sin x$ のとりうる値の範囲は



$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

==> $-1 \leq t \leq 1$ である。

$$\therefore y = -2t^2 + 2t + 2$$

$-1 \leq t \leq 1$ である。==> 最大値は

$$y = -2t^2 + 2t + 2$$

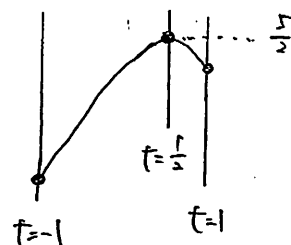
$$= -2(t^2 - t) + 2$$

$$= -2 \left\{ \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\} + 2$$

$$= -2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} + 2$$

$$= -2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{5}{2}$$

頂点 $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ である。



==> $t = \frac{1}{2}$ のとき最大値 $\frac{5}{2}$

(3) 方程式

$$\cos 2x + 2a \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 1 = k \dots (*)$$

==> (1) と (2) を用いて $\sin x = t$

とおくと

$$-2t^2 + 2t + 2 = k$$

==> t の範囲は $-1 \leq t \leq 1$

$$\begin{cases} y = -2t^2 + 2t + 2 \\ y = k \end{cases}$$

==> 交点の位置は

==> $t = -1, 1$ のとき

$$t = -1, 1 \text{ のとき}$$

$$t = \sin x \text{ のとき } x \text{ は } 1 \text{ のとき}$$

$$-1 < t < 1 \text{ のとき}$$

$$t = \sin x \text{ のとき } x \text{ は } 2 \text{ のとき}$$

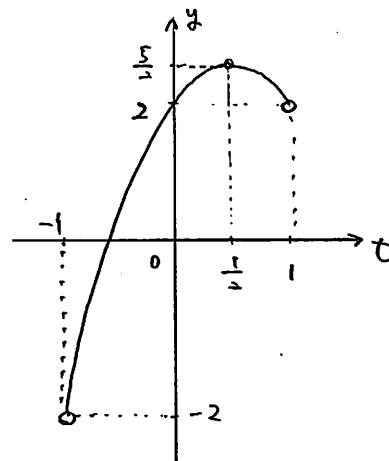
==> 方程式 (*) の解は x が 2 のとき

である。==> $y = -2t^2 + 2t + 2$

$$\text{の } -1 < t < 1 \text{ の範囲}$$

==> $y = k$ のとき $t = \frac{1}{2}$ のとき

交点の位置は



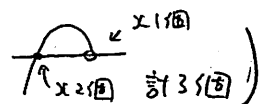
$$\therefore k = \frac{5}{2}$$

==>

$$-2 < k < 2$$

==> $k = 2$ のとき

$$k = 2 \text{ のとき}$$



==> $k = 2$

$$-2 < k < 2, k = \frac{5}{2}$$

11

$$(1) 0 = \frac{5}{6}\pi \text{ とき, } y = 0 \text{ とき?}$$

$$y = \sin \theta + k \cos \theta + 1$$

1 = 代入して

$$0 = \sin \frac{5}{6}\pi + k \cos \frac{5}{6}\pi + 1$$

$$0 = \frac{1}{2} + k(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}k + \frac{3}{2} = 0$$

$$-\sqrt{3}k = -3$$

$$\therefore k = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$$(2) (1) \text{ より } k = \sqrt{3} \text{ とき?}$$

$$y = \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + 1$$

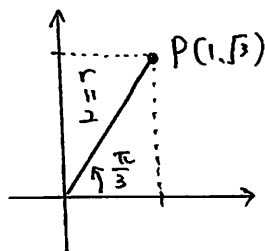
$$\text{とき? } \therefore \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

合成すると

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

↓ ↓

$$P(1, \sqrt{3})$$



よって

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$$

$$= 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3})$$

ゆえに

$$y = 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + 1$$

$$\text{とき? } y = 1 \text{ とき?}$$

代入して

$$1 = 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + 1$$

$$2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\therefore \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 0$$

$$\therefore 0 \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \pi$$

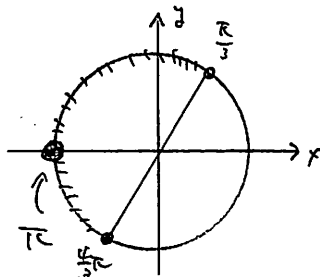
$$\text{よって } \theta + \frac{\pi}{3} = \pi$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

よって答えは



$$\theta + \frac{\pi}{3} = \pi$$

よって答えは

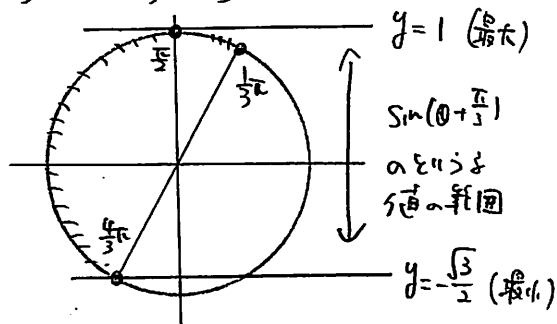
$$\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$(3) (2) \text{ より}$$

$$y = 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + 1$$

$$\therefore \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta + \frac{\pi}{3} \leq \frac{4\pi}{3}$$



$$\sin(\theta + \frac{\pi}{3}) \text{ の最大値, 最小値}$$

よって

$$\text{最大値 } 1 \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{最小値 } -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3})$$

$$\therefore 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) + 1$$

$$\text{最大値 } 2 \cdot 1 + 1 \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2})$$

$$\text{最小値 } 2(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 1 \quad (\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3})$$

よって

$$\text{最大値 } 3 \quad (\theta = \frac{\pi}{6})$$

$$\text{最小値 } -\sqrt{3} + 1 \quad (\theta = \pi)$$

2

(1)
 $t = \sin \theta + \cos \theta$

両辺を2乗して

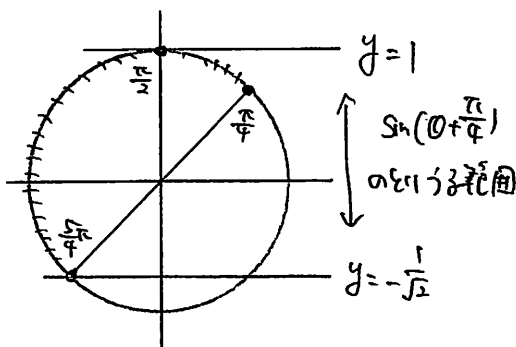
$$\begin{aligned} t^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\therefore t^2 = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = t^2 - 1$$

よって

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$



$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq 1$$

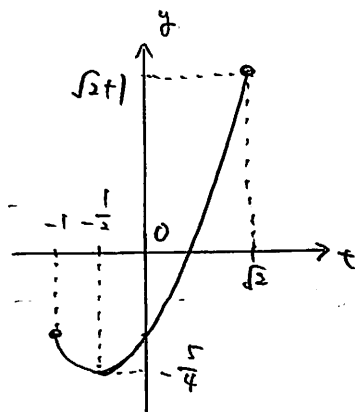
$$\text{よって } \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \leq \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2} \cdot 1$$

$$\therefore -1 \leq \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$$

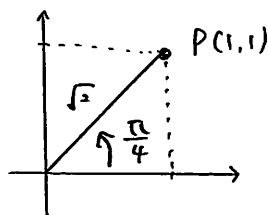
よって

$$-1 \leq t \leq \sqrt{2}$$



(2)
 $t = \sin \theta + \cos \theta$

合成すると



$$\begin{aligned} \sin \theta + \cos \theta &= \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

$$\therefore 0 \leq \theta \leq \pi \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5\pi}{4}$$

よって、sin(theta + pi/4)の値の範囲は

$$\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \text{ の値の範囲は}$$

sin(theta + pi/4)は

(3)
 $y = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \cos \theta$

$$(1) \text{より } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

代入して

$$y = 2 \cdot \frac{1}{2}(t^2 - 1) + t$$

$$= t^2 - 1 + t$$

$$= t^2 + t - 1$$

$$= (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 1$$

$$= (t + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

$$\text{よって (2) より } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

よって、yの範囲は

$$\frac{13}{12} \leq y \leq \sqrt{2} + 1 \quad (t = \sqrt{2})$$

$$\frac{13}{12} \leq y \leq -\frac{5}{4} \quad (t = -\frac{1}{2})$$

[3]

(1) $x=0$ のとき、代入すると

$$\begin{aligned} y &= 2\sin(0 + \frac{\pi}{6}) + 2\cos 0 \\ &= 2\sin \frac{\pi}{6} + 2\cos 0 \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 1 \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ のとき、代入すると

$$\begin{aligned} y &= 2\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) + 2\cos \frac{\pi}{2} \\ &= 2\sin \frac{2\pi}{3} + 2\cos \frac{\pi}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot 0 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

(2)

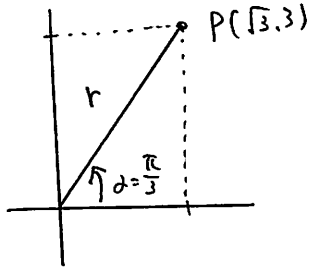
$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$ となる。加法定理より

$$\begin{aligned} \sin(x + \frac{\pi}{6}) &= \sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} y &= 2(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x) + 2\cos x \\ &= \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2\cos x \\ &= \sqrt{3} \sin x + 3\cos x \end{aligned}$$

また、合成すると



$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(3)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{3 + 9} \\ &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって

$$y = 2\sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

(3) 条件: $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において

y の最大値、最小値を求めよ。

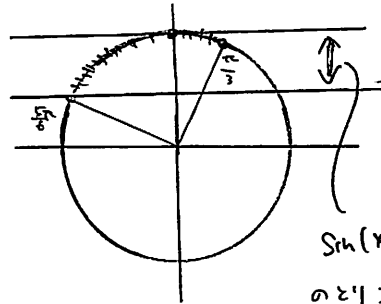
$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より、 $x + \frac{\pi}{3}$ は

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}$$

よって、 $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ となる。



よって、 $\sin(x + \frac{\pi}{3})$ の最大値は

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$$

のとき、 $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ となる。

$$\therefore y = 2\sqrt{3} \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

の最大値、最小値は

$$2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

となる。よって、答えは

$$\beta \leq x \leq \beta + \frac{\pi}{2}$$

(= $\beta + \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin$ は $\sqrt{3}$)

となる。

$$\beta \leq x \leq \beta + \frac{\pi}{2} \text{ となる } \frac{\pi}{3}$$

となる

$$\beta + \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \beta + \frac{5\pi}{6} \dots (1)$$

$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ となる。定義域の範囲は

$$\beta + \frac{\pi}{3} \leq \beta + \frac{5\pi}{6} \text{ となる } \frac{\pi}{2} \text{ となる。}$$

よって、定義域の範囲の範囲は

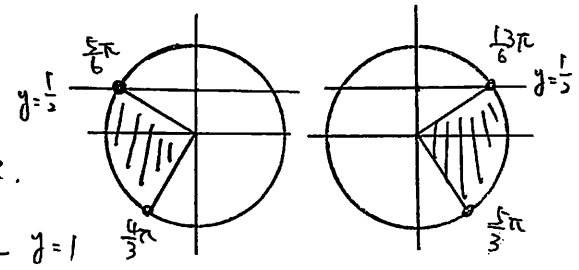
$$\frac{\pi}{2} \text{ となる。}$$

(= $\beta + \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin$ は $\sqrt{3}$)

となる。よって、 $\sin$ は 2 となる。

(I)

(II)



(I) より

$$\text{定義域は } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}$$

となる。

よって、(2) より

$$\beta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}, \beta + \frac{5\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \beta = \frac{\pi}{2}$$

(II) より

$$\text{定義域は } \frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{13\pi}{6} \text{ となる。}$$

(2) より

$$\beta + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \beta + \frac{5\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

$$\therefore \beta = \frac{4\pi}{3}$$

$\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$ となる。

(I) (II) より $\beta = 1$ となる。

よって

$$\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}$$

15

$$y = 16^x + 4^{x+1} - a \cdot 4^x - 6$$

(1)

$$t = 4^x \Rightarrow 16^x \text{ は}$$

$$16^x = (4^2)^x$$

$$= 4^{2x}$$

$$= (4^x)^2$$

$$= t^2$$

$$\text{また} \cdot 4^{x+1} \text{ は}$$

$$4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1$$

$$= 4^x \cdot 4$$

$$= t \cdot 4$$

$$= 4t$$

と置くと、

$$y = 16^x + 4^{x+1} - a \cdot 4^x - 6$$

$$= t^2 + 4t - at - 6$$

$$= t^2 + (4-a)t - 6$$

(2)

$$a = 3 \text{ とき}$$

$$y = t^2 + (4-3)t - 6$$

$$= t^2 + t - 6$$

$$\text{と置くと } y = 0 \text{ とき}$$

$$0 = t^2 + t - 6$$

$$0 = (t+3)(t-2)$$

$$\therefore t = -3, 2$$

$$\therefore t = 4^x \text{ とき}$$

$$4^x \text{ は } x \text{ の正の値と負の値}$$

$$t > 0 \text{ とき}$$

$$t = -3 \text{ は不適}$$

$$\therefore t = 2$$

よって

$$4^x = 2$$

$$(2^2)^x = 2$$

$$\therefore 2^{2x} = 2^1$$

よって

$$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$(3) x \geq 0 \text{ とき } t = 4^x \text{ とき}$$

$$\frac{1}{4^x} \text{ は } 1 \text{ より大きい}$$

$$4^x \geq 4^0$$

$$\therefore t \geq 1$$

よって

$$y = t^2 + (4-a)t - 6$$

$$a \cdot t \geq 1 \text{ とき}$$

$$t = 1 \text{ とき}$$

$$y = t^2 + (4-a)t - 6$$

$$= t^2 - (a-4)t - 6$$

$$= \left(t - \frac{a-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-4}{2}\right)^2 - 6$$

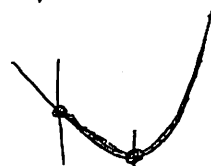
$$= \left(t - \frac{a-4}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 8a + 16}{4} - 6$$

$$= \left(t - \frac{a-4}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 8a + 16 + 24}{4}$$

$$= \left(t - \frac{a-4}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 8a + 40}{4}$$

$$\text{よって } t = \frac{a-4}{2}$$

$$0 < 1 < \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$



$$t = \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$

$$t = 1 \text{ とき}$$

$$t = 1 \text{ とき } t = \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$

$$\text{よって } t \geq 1 \text{ とき}$$

$$t = \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$

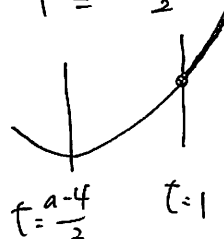
$$= 2 \text{ とき } 1 < \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$

$$2 < a-4 \therefore a > 6$$

$$\text{よって } a > 6 \text{ とき}$$

$$-\frac{a^2 - 8a + 40}{4}$$

$$0 < 1 \leq \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$



$$t = \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$

$$t = 1 \text{ とき}$$

$$t = a-4 \text{ とき}$$

$$\text{よって } t \geq 1 \text{ とき}$$

$$y = t^2 + (4-a)t - 6 \text{ とき}$$

$$t = 1 \text{ とき}$$

$$y = 1^2 + (4-a) \cdot 1 - 6$$

$$= 1 + 4 - a - 6 = -a - 1$$

$$\text{よって } 1 \leq \frac{a-4}{2} \text{ とき}$$

$$2 \leq a-4 \therefore a \leq 6$$

$$\text{よって } a \leq 6 \text{ とき}$$

$$-a - 1$$

$$\text{よって } a \leq 6 \text{ とき}$$

$$a \leq 6 \text{ とき}$$

$$a > 6 \text{ とき } -\frac{a^2 - 8a + 40}{4}$$

16

$$f(x) = 4^x + \frac{1}{4^x} - 2k(2^x + \frac{1}{2^x}) + 26$$

$$f(t) = (t^2 - 2) - 2kt + 26 = t^2 - 2kt + 24$$

非最小値 $-k^2 + 24$
条件より $\frac{10}{42}$ 最小値 16 となる

(1) $t = 2^x + \frac{1}{2^x}$

$$t^2 = (2^x + \frac{1}{2^x})^2 = (2^x)^2 + 2 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} + (\frac{1}{2^x})^2 = 4^x + 2 + \frac{1}{4^x}$$

$$t^2 = 4^x + \frac{1}{4^x} + 2$$

よって $4^x + \frac{1}{4^x} = t^2 - 2$

(2) $t = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2$

$2^x > 0$ より $\frac{1}{2^x} > 0$ である

よって相加・相乗平均の不等式より

$$2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}}$$

$$\therefore 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{1}$$

よって $t \geq 2$

が成り立つ。また $\frac{y}{x} \geq 1$ である

$$2^x = \frac{1}{2^x} \text{ かつ } 2^x = 2^{-x}$$

より $x = -x \therefore x = 0$ である

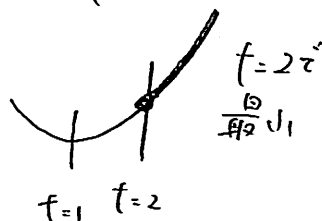
また $k = 1$ である

$$f(x) = 4^x + \frac{1}{4^x} - 2k(2^x + \frac{1}{2^x}) + 26$$

よって $k = 1$ を代入して

$$f(t) = t^2 - 2t + 24 = (t-1)^2 - 1 + 24 = (t-1)^2 + 23$$

$\therefore t \geq 2$ である



$\therefore t = 2$ を代入して

$$2^2 - 2 \cdot 2 + 24$$

$$= 4 - 4 + 24 = 24$$

$\therefore$ 最小値 24

(3)

$$y = t^2 - 2kt + 24$$

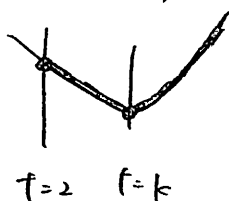
$$g = (t-k)^2 - k^2 + 24$$

軸 $t = k$ である

また (2) より $t \geq 2$ である

よって軸より $t \geq 2$ に k を代入する
で場合分けする

• $k > 2$ のとき



$t = 2$ $t = k$

$t = k$ で最小

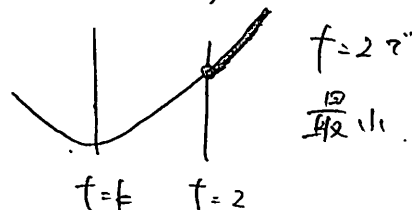
$$-k^2 + 24 = 16$$

$$\therefore k^2 = 8$$

$$\therefore k = \pm 2\sqrt{2}$$

よって $k > 2$ より $k = 2\sqrt{2}$

• $k \leq 2$ のとき



$t = 2$ のとき $y = 2^2 - 2k \cdot 2 + 24 = 28 - 4k$

よって最小値 $28 - 4k$

条件より 最小値 16 より

$$28 - 4k = 16$$

$$-4k = -12$$

$$k = 3$$

$\therefore k \leq 2$ であるから

したがって

$$k = 2\sqrt{2}$$

(17) $y = 4^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 1$

(1) $x=0$ のとき.

$$\begin{aligned} y &= 4^{0-1} - 3 \cdot 2^0 + 1 \\ &= 4^{-1} - 3 \cdot 2^0 + 1 \\ &= \frac{1}{4} - 3 - 1 + 1 \\ &= \frac{1}{4} - 3 + 1 = -\frac{7}{4} \end{aligned}$$

(2) $t = 2^x$ とおくと.

$$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$$

よって.

$$4^{x-1} = 4^x \cdot 4^{-1} = t^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} t^2$$

である.

$$y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1$$

また $t = 2^x$ より $2^x > 0$ であるので $t > 0$

よって $t > 0$ において

$$y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1 \text{ の最小値}$$

を求めよ.

$$y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1$$

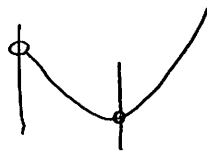
$$= \frac{1}{4} (t^2 - 12t) + 1$$

$$= \frac{1}{4} \{ (t-6)^2 - 36 \} + 1$$

$$= \frac{1}{4} (t-6)^2 - 9 + 1$$

$$= \frac{1}{4} (t-6)^2 - 8$$

軸 $t = 6$.



$$t=0 \quad t=6$$

よって $t > 0$ において.

$t=6$ で最小になる.

最小値は -8 である.

また $t = 2^x$ より $2^x = 6$

$$t = 2^x \text{ より } 2^x = 6$$

$$\text{よって } x = \log_2 6$$

(3) $x=1$ のとき

$$4^{x-1} - 3 \cdot 2^x + 1 = k \quad \text{--- ①}$$

($x=1$ のとき $t=2^1=2$ とおくと

(2) より

$$\frac{1}{4} t^2 - 3t + 1 = k \quad \text{--- (*)}$$

である. $t=2$ のとき

$k = \frac{1}{4} \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = -2$

$x=1$ のとき $t=2$ である.

よって $t=2$ のとき

(*) の値は -2 である.

よって $t=2$ のとき $k=-2$ である.

$x=1$ のとき $t=2$ である.

よって $t=2$ のとき $k=-2$ である.

よって $t=2$ のとき $k=-2$ である.

よって $t=2$ のとき $k=-2$ である.

よって $t=2$ のとき $k=-2$ である.

$$\begin{cases} y = k \\ y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1 \end{cases}$$

の交点の個数を求めよ.

この2つのグラフの交点の個数を求めよ.

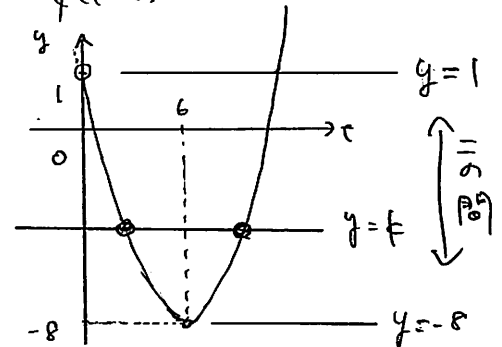
$$y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1$$

$$= \frac{1}{4} (t^2 - 12t) + 1$$

$$= \frac{1}{4} \{ (t-6)^2 - 36 \} + 1$$

$$= \frac{1}{4} (t-6)^2 - 9 + 1$$

$$= \frac{1}{4} (t-6)^2 - 8 \quad y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1$$



よって $y = -8$ と $y = 1$ の

交点の個数を求めよ.

$$-8 < k < 1$$

よって $y = -8$ と $y = 1$ の

交点の個数を求めよ.

x が正 $\Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow 2^x > 2^0 \Leftrightarrow t > 1$

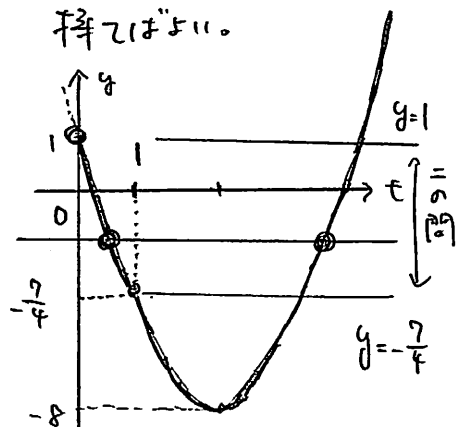
x が負 $\Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow 2^x < 2^0 \Leftrightarrow 0 < t < 1$

よって $y = \frac{1}{4} t^2 - 3t + 1$ のグラフと

$y = k$ が $0 < t < 1$ と $t > 1$

の交点の個数を求めよ.

グラフをよ.



$$t=1 \text{ のとき } y = -\frac{1}{4} - 3 + 1 = -\frac{7}{4} \text{ である}$$

$$-7/4 < k < 1$$

(18)

$f(x) = \log_4(2x+k), g(x) = 1 + \log_2(x+1)$ 恒等変換法則より

$\log_2(2x+k) = 2 + 2\log_2(x+1)$
 $= \log_2 4(x+1)^2$

(1) $k=8$ のとき

$\frac{\log_2(2x+8)}{\log_2 4} = 1 + \log_2(x+1)$

$\therefore 2x+k = 4(x+1)^2$

$f(x) = \log_4(2x+8)$

$k = 4(x+1)^2 - 2x$
 $= 4x^2 + 8x + 4 - 2x$
 $= 4x^2 + 6x + 4$

よって

$\frac{\log_2(2x+8)}{2} = 1 + \log_2(x+1)$

$f(-2) = \log_4(-4+8)$

両辺 $2 \times \frac{1}{2}$ して

$= \log_4 4$

$\log_2(2x+8) = 2 + 2\log_2(x+1)$

$= 1$

$\log_2(2x+8) = 2 + \log_2(x+1)^2$

$f(0) = \log_4 8$

$\therefore \log_2(2x+8) = \log_2 4 + \log_2(x+1)^2$

よって、よって、方程式

$k = 4x^2 + 6x + 4 \dots (*)$

恒等変換法則より

$f(0) = \log_4 8$

よって

$= \frac{\log_2 8}{\log_2 4}$

$2x+8 = 4(x+1)^2$

$2x+8 = 4x^2 + 8x + 4$

整理して

$2x^2 + 3x - 2 = 0$

$(2x-1)(x+2) = 0$

$\therefore x = \frac{1}{2}, -2$

(*) より $x = -2$ は不適

$\therefore x = \frac{1}{2}$

(2) $k=8$ のとき

$f(x) = \log_4(2x+8)$

(3) $f(x) = g(x)$ より

よって $f(x) = g(x)$ より

$\log_4(2x+k) = 1 + \log_2(x+1)$

$\log_4(2x+8) = 1 + \log_2(x+1)$

真数条件より

真数は正より

$2x+k > 0$ より $x+1 > 0 \dots (1)$

$2x+8 > 0$ より $x+1 > 0$

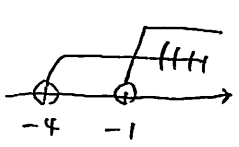
$\therefore x > -4$ より $x > -1$

すなわち

$\log_4(2x+k) = 1 + \log_2(x+1)$

恒等変換法則より

$\frac{\log_2(2x+k)}{\log_2 4} = 1 + \log_2(x+1)$



共通範囲より

$x > -1 \dots (*)$

すなわち

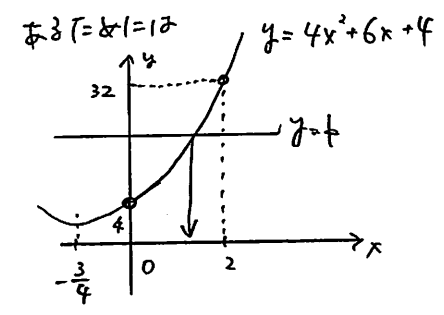
$\log_4(2x+8) = 1 + \log_2(x+1)$

$\frac{\log_2(2x+k)}{2} = 1 + \log_2(x+1)$

より

$y = k$
 $y = 4(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{4}$

この2つの交点より $0 \leq x \leq 2$ となる



したがって $4 \leq k \leq 32$

この範囲で $k=8$ は不適

よって (*) の解は

$0 \leq x \leq 2$ における x の範囲

(1) の $x+1 > 0$ は必ずしも満たさず

すなわち (1) の $2x+k > 0$ は

$x > -\frac{1}{2}k$ となる

$4 \leq k \leq 32$ のとき $-\frac{1}{2}k$ は

負の数となる。(*) の解は

$x > -\frac{1}{2}k$ も満たさず

すなわち、真数条件も満たさず

(19)

(1) $a=16$ とする。

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_4 16x^2$$

よて

$$f(1) = (\log_2 1)^2 - \log_4 16 \cdot 1^2$$

$$= (\log_2 1)^2 - \log_4 16$$

$$= 0^2 - 2 = -2$$

$$f(4) = (\log_2 4)^2 - \log_4 16 \cdot 4^2$$

$$= (\log_2 4)^2 - \log_4 4^4$$

$$= 2^2 - 4 = 0$$

(2)

真数に正の $x > 0$ とする。

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - \log_4 ax^2$$

== 2. 1. と交換可能 (1)

$$\log_4 ax^2 = \frac{\log_2 ax^2}{\log_2 4}$$

$$= \frac{\log_2 ax^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} (\log_2 a + \log_2 x^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_2 a + 2 \log_2 x)$$

よて

$$f(x) = (\log_2 x)^2 - \frac{1}{2} (\log_2 a + 2 \log_2 x)$$

$$= (\log_2 x)^2 - \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$= (\log_2 x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$4.2 \Rightarrow f(x) \text{ は } \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 a$$

とある。

(3)

$$\log_2 x = t \text{ とおく。}$$

$$x \text{ は } 1 \leq x \leq b \text{ より}$$

$$1 \leq t \leq \log_2 b$$

$$\log_2 1 \leq \log_2 x \leq \log_2 b$$

∴

$$0 \leq t \leq \log_2 b$$

== 0.2. (2) の結果から

$$y = t^2 - t - \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$y \text{ は } \frac{1}{4} \text{ と } -\frac{1}{4} \text{ の間で動く。}$$

とある。 == 2. 1. と交換可能

$$b \geq 2 \text{ と仮定する。 } \log_2 b \geq \log_2 2$$

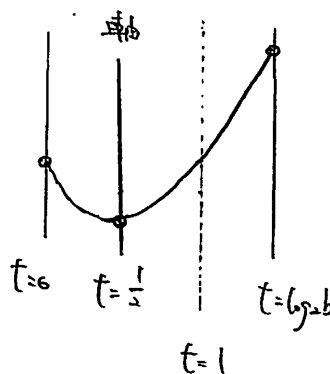
$$\text{よて } \log_2 b \geq 1$$

とある。 == 3. (2) の結果から

$$y = t^2 - t - \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$= (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$\text{よて } t = \frac{1}{2} \text{ とする。}$$



軸は $t = \frac{1}{2}$ である。

定義域 $0 \leq t \leq \log_2 b$

(= 含める) である。軸の

位置で最小をとる。

すなわち、定義域の端の

$$\log_2 b \text{ の } t=1 \text{ 以上も右に}$$

$$\text{ある。よて、 } t = \log_2 b$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ と } t = \log_2 b$$

$$1 \leq t \leq \log_2 b \text{ より } t = \frac{1}{2} \text{ は } \log_2 b \text{ 以下}$$

である。

$$\begin{cases} \frac{1}{4} \text{ と } -\frac{1}{4} \text{ の間で動く} \\ (\log_2 b)^2 - (\log_2 b) - \frac{1}{2} \log_2 a \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 a \end{cases}$$

とある。 == 2. 1. と交換可能

$$\frac{1}{4} \text{ と } -\frac{1}{4} \text{ の間で動く。}$$

$$\frac{1}{4} \text{ と } -\frac{1}{4} \text{ の間で動く。}$$

$$\begin{cases} (\log_2 b)^2 - (\log_2 b) - \frac{1}{2} \log_2 a = 5 \\ -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

よて

$$-\frac{1}{2} \log_2 a = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4} = -1$$

$$\therefore \log_2 a = 2$$

$$a = 2^2 = 4$$

代入して

$$(\log_2 b)^2 - (\log_2 b) - \frac{1}{2} \log_2 4 = 5$$

$$(\log_2 b)^2 - (\log_2 b) - \frac{1}{2} \cdot 2 - 5 = 0$$

$$(\log_2 b)^2 - (\log_2 b) - 6 = 0$$

$$(\log_2 b - 3)(\log_2 b + 2) = 0$$

$$\therefore \log_2 b = 3, -2$$

$$\text{よて } b = 2^3, 2^{-2}$$

$$\text{よて } b = 8, \frac{1}{4}$$

($b \geq 2$ であるから)

$$b = \frac{1}{4} \text{ は不適}$$

よて

$$a = 4, b = 8$$

(20)

(1)

$$1 \leq x \leq 27$$

∴ $\sqrt[3]{1} \leq \log_3 x \leq \sqrt[3]{27}$

$$(\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27)$$

$$\therefore 0 \leq t \leq 3$$

(2)

$$y = ((\log_3 x)^2 + 3t(\log_3 x)^2 + 2$$

$$= ((\log_3 x)^2 + 3t \cdot \frac{\log_3 x^2}{\log_3 \frac{1}{3}} + 2$$

$$= ((\log_3 x)^2 + 3t \cdot \frac{2(\log_3 x)}{-1} + 2$$

$$= ((\log_3 x)^2 - 6t(\log_3 x) + 2$$

$$\text{よ} \quad t = (\log_3 x)$$

$$y = t^2 - 6t + 2$$

$$\text{特} \quad k = \frac{3}{4} \text{ のとき}$$

$$y = t^2 - 6 \cdot \frac{3}{4}t + 2$$

$$= t^2 - \frac{9}{2}t + 2$$

$$\therefore y = 0 \text{ となる } t$$

$$t^2 - \frac{9}{2}t + 2 = 0$$

$$2t^2 - 9t + 4 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 2 & -9 & 4 \\ 1 & -4 & -2 \\ & -9 & -9 \end{array} \right)$$

$$(2t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}, 4$$

∴ (1) より $0 \leq t \leq 3$ となる

$$t = 4 \text{ は不適}$$

$$\text{よ} \quad t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_3 x = \frac{1}{2}$$

$$\text{よ} \quad x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$(3) \quad t = (\log_3 x) \text{ のとき}$$

$$\text{頂点の } t = \frac{3}{2}$$

t の範囲が $0 \leq t \leq 3$ ならば

x の範囲も $t = 0$ から $t = 3$ まで

決まる。よ

$$y = 0 \text{ となる実数 } x \text{ が 2 個}$$

ある $t = 0$ には

$$y = t^2 - 6t + 2$$

$$(t = 0 \text{ のとき } y = 0 \text{ となる})$$

実数 t も 2 個

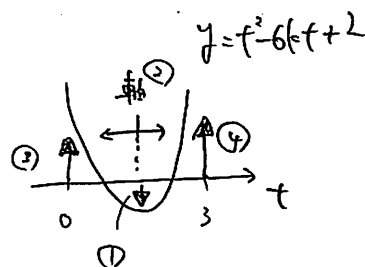
ある $t = 0$ には

$$2 \text{ 個の実数 } y = t^2 - 6t + 2$$

の t が $0 \leq t \leq 3$

($t = 0$ のとき $y = 2$ のとき)

交点をもつ $t = 0$ には



$$y = t^2 - 6t + 2$$

$$= (t - 3)^2 - 9t + 2$$

$$\text{よ} \quad t = 3$$

$$\text{頂点 } (3, -7)$$

$$\textcircled{1} \text{ 頂点の } y \text{ 座標 } < 0$$

$$\therefore -9t^2 + 2 < 0$$

$$t^2 - \frac{2}{9} > 0$$

$$(t - \frac{\sqrt{2}}{3})(t + \frac{\sqrt{2}}{3}) > 0 \quad \therefore \underline{t < -\frac{\sqrt{2}}{3}, t > \frac{\sqrt{2}}{3}}$$

$$\textcircled{2} \text{ 軸が } 0 < 3 \text{ のとき}$$

$$\therefore 0 < 3t < 3 \quad \text{よ} \quad \underline{0 < t < 1}$$

$$\textcircled{3} \quad t = 0 \text{ のとき } y \text{ 座標 } \geq 0$$

$$t = 0 \text{ のとき } y = t^2 - 6t + 2 = 2$$

$$y = 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 = 2$$

よ $t = 0$ のとき

$\textcircled{3}$ の条件は満たす

$$\textcircled{4} \quad t = 3 \text{ のとき } y \text{ 座標 } \geq 0$$

$$t = 3 \text{ のとき } y = t^2 - 6t + 2$$

$$= 3^2 - 6 \cdot 3 + 2$$

$$= 11 - 18t$$

よ

$$11 - 18t \geq 0$$

$$-18t \geq -11 \quad \therefore \underline{t \leq \frac{11}{18}}$$

よ $t = 0$ のとき $\textcircled{1} \sim \textcircled{4}$ の

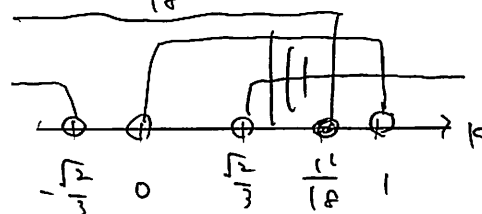
共通範囲を求めよ

$$\therefore \textcircled{1} \text{ の } \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ と } \textcircled{4} \text{ の } \frac{11}{18} \text{ のとき}$$

大小関係は $\frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{11}{18}$

$$\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{11}{18} = \frac{6\sqrt{2} - 11}{18} = \frac{\sqrt{72} - 11}{18} < 0$$

よ $\frac{11}{18}$ の方が大きい



$$\therefore \underline{\frac{\sqrt{2}}{3} < t \leq \frac{11}{18}}$$

[2]

$$f(x) = (\log_2(x-5)) - (\log_4(x-a))$$

(1) $a = 2$ のとき

$$f(x) = (\log_2(x-5)) - (\log_4(x-2))$$

よって

$$f(6) = (\log_2(6-5)) - (\log_4(6-2))$$

$$= \log_2 1 - \log_4 4$$

$$= 0 - 1 = -1$$

$$f(11) = (\log_2(11-5)) - (\log_4(11-2))$$

$$= \log_2 6 - \log_4 9$$

$$= \log_2 6 - \frac{\log_2 9}{\log_2 4}$$

$$= \log_2 6 - \frac{\log_2 3^2}{2}$$

$$= \log_2 6 - \frac{2\log_2 3}{2}$$

$$= \log_2 6 - \log_2 3$$

$$= \log_2 \frac{6}{3} = \log_2 2 = 1$$

(2) $a = -3$ のとき

$$f(x) = (\log_2(x-5)) - (\log_4(x+3))$$

方程式 $f(x) = 1$ となる

$$\log_2(x-5) - \log_4(x+3) = 1$$

$$\log_2(x-5) = (\log_4(x+3)) + 1$$

対数の交換法則より

$$\log_2(x-5) = \frac{\log_2(x+3)}{\log_2 4} + 1$$

$$(\log_2(x-5)) = \frac{\log_2(x+3)}{2} + 1$$

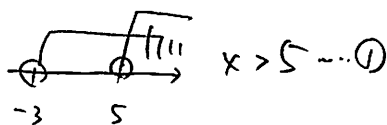
$$\therefore 2(\log_2(x-5)) = (\log_2(x+3)) + 2 \dots (*)$$

また、変数は正より

$$x-5 > 0 \text{ より } x+3 > 0$$

$$\therefore x > 5 \text{ より } x > -3$$

共通範囲より



方程式 (*) となる

$$2(\log_2(x-5)) = (\log_2(x+3)) + 2$$

$$(\log_2(x-5))^2 = (\log_2(x+3)) + \log_2 4$$

$$(\log_2(x-5))^2 = (\log_2 4(x+3))$$

$\therefore$

$$(x-5)^2 = 4(x+3)$$

$$x^2 - 10x + 25 = 4x + 12$$

$$x^2 - 14x + 13 = 0$$

$$(x-1)(x-13) = 0$$

$$\therefore x = 1, 13$$

① とき $x = 1$ は不適

$$\therefore x = 13$$

(3) $a > 5$ のとき

$$\text{方程式 } f(x) = 1$$

となる

$$(\log_2(x-5)) - (\log_4(x-a)) = 1$$

また、変数は正より

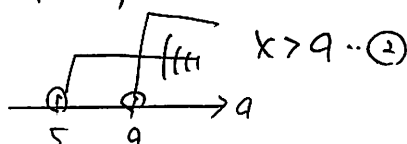
$$x-5 > 0 \text{ より } x-a > 0$$

$$\therefore x > 5 \text{ より } x > a$$

共通範囲を数直線から

読みとる。 $a > 5$ のとき

条件より



$$= a \text{ のとき } \frac{1}{2} \text{ 方程式 } f(x) = 1$$

となる。 (2) と (3) は変数

$$(\log_2(x-5)) = (\log_4(x-a)) + 1$$

$$\therefore 2(\log_2(x-5)) = (\log_2 4(x-a))$$

$$\text{よって } (x-5)^2 = 4(x-a)$$

$$x^2 - 14x + 25 + 4a = 0 \dots (**)$$

この方程式 (**) の解の範囲を

異なる 2 つの解をもたせたい。

よって (**) の左辺を y とおくと

$$y = x^2 - 14x + 25 + 4a \text{ の } y > 0 \text{ となる}$$

$x > a$ の範囲で。 x 軸と異なる

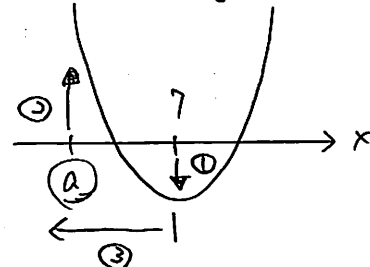
2 つの交点を持つ必要がある。

$$y = x^2 - 14x + 25 + 4a$$

$$= (x-7)^2 - 49 + 25 + 4a$$

$$= (x-7)^2 + 4a - 24$$

$$y = x^2 - 14x + 25 + 4a$$



よって (**) の $y > 0$ となる

① 頂点の y 座標 < 0

$$\therefore 4a - 24 < 0 \text{ より } a < 6$$

② $x = a$ のとき y 座標 > 0

$$x = a \text{ のとき}$$

$$y = a^2 - 14a + 25 + 4a$$

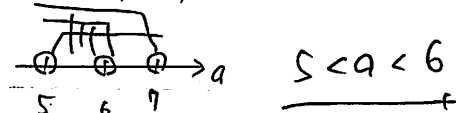
$$= a^2 - 10a + 25 = (a-5)^2$$

$$\therefore (a-5)^2 > 0 \text{ より } a \neq 5$$

③ $x = a$ かつ $x = 7$ のとき

$$\text{よって } a < 7$$

①②③ より、また $a > 5$ という条件より



(22)

(1)

$$\begin{aligned}
& \log_{10} 18^{70} \\
&= 70 \log_{10} 18 \\
&= 70 \log_{10} (2 \cdot 3^2) \\
&= 70 (\log_{10} 2 + (\log_{10} 3)^2) \\
&= 70 (\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3) \\
&= 70 (0.3010 + 2 \cdot 0.4771) \\
&= 70 \cdot 1.2552 \\
&= 87.864
\end{aligned}$$

よて

$$\begin{aligned}
& 87 < 87.864 < 88 \\
& \log_{10} 10^{87} < \log_{10} 18^{70} < \log_{10} 10^{88} \\
& \text{したがって } 10^{87} < 18^{70} < 10^{88} \\
& \left(10^{87} = \underbrace{100 \dots 0}_{0 \text{ 桁 } 87 \text{ 桁}} \Rightarrow 88 \text{ 桁} \right)
\end{aligned}$$

よて 18^{70} は 88 桁の自然数

また $\log_{10} 18^{70} = 87.864$ の小数部分 0.8641 を注目すると

$$\log_{10} 7 = 0.8451$$

$$\begin{aligned}
\log_{10} 8 &= \log_{10} 2^3 = 3 \cdot \log_{10} 2 \\
&= 3 \cdot 0.3010 \\
&= 0.9030
\end{aligned}$$

よて 0.864 は $\log_{10} 7$ と $\log_{10} 8$ の間の数である。

$$\begin{aligned}
& \log_{10} 7 < 0.864 < \log_{10} 8 \\
& \text{この不等式は } 87 \text{ 桁より}
\end{aligned}$$

$$87 + \log_{10} 7 < 87.864 < 87 + \log_{10} 8$$

$$\log_{10} (7 \cdot 10^{87}) < \log_{10} 18^{70} < \log_{10} (8 \cdot 10^{87})$$

よて 10^{87} は 1 より大きい数

$$7 \cdot 10^{87} < 18^{70} < 8 \cdot 10^{87}$$

$$\begin{aligned}
\left(\begin{aligned} 7 \cdot 10^{87} &= 7 \cdot 100 \dots 0 \\ &= \underbrace{700 \dots 0}_{0 \text{ 桁 } 87 \text{ 桁}} \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

よて 18^{70} は

$$7 \cdot 10^{87} < 18^{70} < 8 \cdot 10^{87}$$

よて 18^{70} は $7 \cdot 10^{87}$ と $8 \cdot 10^{87}$ の間の数である。

(2)

$$\log_{10} \left(\frac{1}{45} \right)^{54}$$

$$= \log_{10} 45^{-54}$$

$$= -54 \log_{10} 45$$

$$= -54 (\log_{10} (3 \cdot 5))$$

$$= -54 (2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5)$$

$$= -54 (\log_{10} 5 + 2 \log_{10} 3)$$

$$\begin{aligned}
\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} \\
&= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\
&= 1 - 0.3010 \\
&= 0.6990
\end{aligned}$$

よて

$$\begin{aligned}
& \log_{10} \left(\frac{1}{45} \right)^{54} \\
&= -54 (2 \cdot 0.4771 + 0.6990) \\
&= -54 \cdot 1.6532 \\
&= -89.2728
\end{aligned}$$

よて

$$-90 < -89.2728 < -89$$

$$\log_{10} 10^{-90} < \log_{10} \left(\frac{1}{45} \right)^{54} < \log_{10} 10^{-89}$$

$$10^{-90} < \left(\frac{1}{45} \right)^{54} < 10^{-89}$$

よて 小数第 90 位は

0 である。

また $-89.2728 = -90 + 0.7272$

$$-89.2728 = -90 + 0.7272$$

$$\log_{10} 5 = 0.6990$$

$$\begin{aligned}
\log_{10} 6 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 \\
&= 0.7781
\end{aligned}$$

$$0.7272 \text{ は } \log_{10} 5 \text{ と } \log_{10} 6 \text{ の間}$$

よて

$$-90 + \log_{10} 5 < -90 + 0.7272 < -90 + \log_{10} 6$$

$$\log_{10} (5 \cdot 10^{-90}) < \log_{10} \left(\frac{1}{45} \right)^{54} < \log_{10} (6 \cdot 10^{-90})$$

よて 10^{-90} は 1 より大きい数

$$5 \cdot 10^{-90} < \left(\frac{1}{45} \right)^{54} < 6 \cdot 10^{-90}$$

よて 小数第 90 位は 5

(3) 2 進数で n 桁で表せる自然数は $2^{n-1} \leq x < 2^n$ である。

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned} & \text{2 進数で 3 桁で表せる数は } 1 \text{ から } 7 \text{ まで} \\ & 4 = 100(2), 5 = 101(2), 6 = 110(2), 7 = 111(2) \\ & 8 \text{ は } 8 = 1000(2) \text{ と 4 桁で表せる。} \end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

よて 3^{100} は 2 進数で n 桁で表せる。

$$2^{n-1} \leq 3^{100} < 2^n$$

したがって 2^{n-1} と 2^n の間に 3^{100} が存在する。

$$\log_{10} 2^{n-1} \leq \log_{10} 3^{100} < \log_{10} 2^n$$

$$(n-1) \log_{10} 2 \leq 100 \cdot \log_{10} 3 < n \log_{10} 2$$

$$(n-1) \times 0.3010 \leq 100 \times 0.4771 < n \times 0.3010$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} 0.3010(n-1) &\leq 47.71 \dots \textcircled{1} \\ 47.71 &< 0.3010n \dots \textcircled{2} \end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } n \leq \frac{47.71}{0.3010} + 1 \approx 159.5$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \frac{47.71}{0.3010} < n \therefore 158.5 < n$$

よて

$$158.5 < n \leq 159.5$$

$$n = 159$$

$$\therefore 159 \text{ 桁}$$