数学発展課題

図形と方程式

（　　）年（　　）組（　　　）番　氏名（　　　　　　　　　　　　　　　）

図形と方程式　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{1}$ 座標平面上に点 A(1, 1) がある。また，直線 $y=2x+1$ を l とする。

(1) 直線 l に関して，点 A と対称な点の座標を求めよ。

(2) 直線 l に関して，直線 $2x-3y+1=0$ と対称な直線の方程式を求めよ。

(3) 直線 l 上を点 P が動くとする。原点を O とするとき，線分の和 OP + PA の最小値と，そのときの点 P の座標を求めよ。

図形と方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

2 2円 $x^2+y^2+2x-4y-12=0$, $x^2+y^2-4x+2y-6=0$ があり，2点 A，B で交わっている。

(1) 直線 AB の方程式を求めよ。

(2) 線分 AB の長さを求めよ。

(3) 3点 O, A, B を通る円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(4) (3) の円 C 上に点 P をとり，三角形 ABP を作る。三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。また，そのときの点 P の座標を求めよ。

図形と方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\textbf{3}}$ 2点 $(1,\ -3)$，$(4,\ 3)$ を 1:2 に内分する点を A とする。
また，点 A を通り直線 $2x+y+3=0$ に垂直な直線を l とする。

(1) 点 A の座標を求めよ。

(2) 直線 l の方程式を求めよ。

(3) 直線 l と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ B，C とするとき，線分 BC の長さを求めよ。

(4) 放物線 $y = x^2$ 上に点 P をとり，△ PBC を作る。△ PBC の面積の最小値とそのときの点 P の座標を求めよ。

図形と方程式　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{4}$ O を原点とする座標平面上に 2 点 A(8, 4)，B(2, -2) がある。

(1) 直線 AB の方程式を求めよ。

(2) 3 点 O, A, B を通る円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(3) (2) の円 C 上に点 P をとり，三角形 ABP を作る。三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{5}$ 座標平面上に円 $C_1 : x^2+y^2-8x+4y-5=0$ がある。

(1) 円 C_1 の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 直線 $y=\dfrac{1}{3}x$ に関して円 C_1 と対称な円 C_2 の中心の座標を求めよ。

(3) (2) の円 C_2 に対して，円 C_1，C_2 の中心から直線 $y=\dfrac{1}{3}x+k$ (k は定数) への距離をそれぞれ d_1，d_2 とするとき，$d_1 : d_2 = 1:3$ となるような k の値を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

6 座標平面上に，円 $C : x^2 + y^2 - 2x = 0$ と直線 l があり，直線 l は傾き k で点 A(0, -2) を通る。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と直線 l が接するとき，定数 k の値を求めよ。

(3) (2) のとき，円 C と直線 l の接点を T とし，円 C 上に点 T と異なる点 P をとる。三角形 PAT の面積が 1 となるような点 P の座標を求めよ。

7 座標平面上に, 円 $x^2+y^2=25\cdots$①と直線 $y=-\frac{1}{2}x+5\cdots$②があり，円①と直線②の交点を A，B とする。ただし，(A の x 座標)<(B の x 座標) とする。

（1）A，B の座標を求めよ。

（2）２点 A，B を通り，半径が $5\sqrt{2}$ の円を C とする。円 C の方程式を求めよ。ただし，円 C の中心は直線②よりも上方にあるものとする。

（3）(2) の円 C 上に A，B と異なる点 P をとる。点 P が円 C 上を動くとき，三角形 PAB の面積の最大値を求めよ。

図形と方程式　　平成______年______月______日

$\boxed{8}$ 座標平面上に，直線 $y = t(x+2)+1 \cdots ①$ と 2 点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ 5)$ がある。

(1) 直線①が t の値にかかわらず通る定点 C の座標を求めよ。

(2) 3 点 A, B, C を通る円の方程式を求めよ。ただし，点 C は (1) で定めたものとする。

(3) 直線①が (2) で求めた円によって切り取られる線分の長さが 6 以上となるような t の値の範囲を求めよ。

9 円 $C_1 : x^2+y^2-8x+6y+16=0$ がある。また，直線 $y=2x-1$ に関して円 C_1 と対称な円を C_2 とする。

(1) 円 C_1 の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C_2 の方程式を求めよ。

(3) 円 C_1，C_2 に外接し，半径が 2 である円のうち，中心が第 1 象限にあるものを円 C_3 とする。円 C_3 の方程式を求めよ。

図形と方程式

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

10 座標平面上に 2 点 A(2, 0), B(4, 4) を直径の両端とする円 C がある。

(1) 円 C の方程式を求めよ。

(2) k を定数とする。直線 $l : kx - y - 2k + 5 = 0$ は k の値によらず定点を通ることを示せ。また，その定点の座標を求めよ。

(3) 円 C の外部 (境界線を含まない) を P，不等式 $kx - y - 2k + 5 < 0$ の表す領域を Q とする。$P \supset Q$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

11 座標平面上に円 $x^2+y^2-4x-2y-4=0\cdots$①と直線 $y=-2x\cdots$②がある。また，円①と直線②の交点をA, B とする。

(1) 円①の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 線分 AB の長さを求めよ。

(3) 円①の周上で $y>-2x$ を満たす部分に点 P，円①の周上で $y<-2x$ を満たす部分に点 Q をとる。△ ABP の面積の最大値を求めよ。また，四角形 AQBP の面積の最大値を求めよ。

図形と方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

12 原点を中心とし，点 $(4,\ 3)$ を通る円 C がある。

(1) 円 C の方程式を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(5,\ 10)$ から円 C にひいた 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3) x 軸上の正の部分に中心があり，(2) で求めた 2 本の接線に接する円の方程式を求めよ。

図形と方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

13 半径 1 の円 $C : x^2 + y^2 - 6x - 2y + k = 0$ がある。ただし，k は定数とする。

(1) k の値を求めよ。

(2) 点 A(4, 3) から円 C にひいた 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3) (2) の 2 本の接線，および x 軸に接する円のうち，中心が第 2 象限にあるものの方程式を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

14 座標平面上に点 A(3, 0)，B(0, 1)，C$\left(0,\ -\dfrac{7}{3}\right)$ がある。線分 AB を 1:2 に内分する点を D とし，直線 CD を l とする。

(1) 点 D の座標を求めよ。また，直線 l の方程式を求めよ。

(2) 2点 A，B を通る円 K の中心の x 座標を t とする。円 K の半径を t の式で表せ。

(3) 直線 l と (2) の円 K との交点を P，Q とする。線分 PQ の長さが最小となるときの円 K の方程式を求めよ。

図形と方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

15 円 $x^2+y^2=50\cdots$①と直線 $3x-y=10$ の交点を A, B とする。ただし，点 A の x 座標は点 B の x 座標よりも大きいものとする。

(1) 点 A，B の座標を求めよ。

(2) 線分 AB 上の点 P を中心とする半径 $2\sqrt{2}$ の円の周を K とする。また，円①の周および内部を C とする。K が C に含まれるとき，点 P の x 座標 t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2) の点 P の x 座標 t が (2) で求めた範囲を動くとき，K が通過する領域を D とする。D の面積を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

16 座標平面上に点 A(5, 3)，B(−3, 7) と円 $x^2+y^2+12ax+10ay+60a^2+a-2=0\cdots$ ①があり，円①の半径は 2 で，中心 C は第 1 象限にある。ただし，a は定数とする。

(1) 線分 AB の垂直二等分線 l の方程式を求めよ。

(2) 定数 a の値を求めよ。また，点 C の座標を求めよ。

(3) (1) の直線 l 上に点 P，円①の周上に点 Q をとり，$L=$ AP + PQ とおく。L の最小値を求めよ。また，そのときの P の座標を求めよ。

図形と方程式　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

17 座標平面上に 3 点 A(4, 6), B(7, 0), C(7, 5) がある。

(1) 直線 AB の方程式を求めよ。

(2) 直線 AB に関して，点 C と対称な点 D の座標を求めよ。

(3) (2) の点 D を中心として，線分 DA の長さを半径とする円 K の周上に点 P をとる。三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

図形と方程式　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

18 座標平面上に3点A(4, 1), B(0, 4), C(0, 1)を頂点とする三角形ABCがある。

(1) 直線ABの下側の領域(境界を含む)を表す不等式を求めよ。

(2) 三角形ABCに内接する円の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた円の周上の点をPとし，点Pと辺BC, CA, ABの距離をそれぞれd_1，d_2，d_3とする。$L = d_1 + d_2 + d_3$のとりうる値の範囲を求めよ。

図形と方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

19 O を原点とする座標平面上に
円 $C: x^2+y^2-4x-5y+4=0$ と円 C 上の点 $\mathrm{A}(4,\ 4)$
がある。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と直線 OA の A 以外の共有点 B の座標を求めよ。

(3) 連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-5y+4 \leqq 0 \\ y \leqq x \end{cases}$$

の表す領域を D とする。領域 D 内を点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が動くとき，$y-2x$ の最大値，最小値を求めよ。

図形と方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

20 座標平面上に点 A(0, a) (a は正の定数) と
円 $C : x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$ がある。円 C 上に点 P
をとり，線分 AP を 1:2 に内分する点を Q とする。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，点 Q の軌跡を C' とする。C' の方程式を求めよ。また，C' と円 C が共有点をただ１つもつような a の値を求めよ。

(3) a が (2) で求めた値をとるとする。点 P が円 C 上を動くとき，線分 PQ の通過する領域を図示せよ。また，この領域の面積を求めよ。

図形と方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

21 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$ と２点 A$(-6,\ 0)$，B$(0,\ -12)$ がある。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) ２点 A，B を通る直線に平行で，円 C に接する直線の方程式を求めよ。

(3) 点 P$(x,\ y)$ が連立不等式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 7 \leqq 0 \\ x \geqq 0 \end{cases}$$

で表される領域内を動くとき，△ ABP の面積が最大，最小となるような点 P の座標をそれぞれ求めよ。

図形と方程式

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

22 座標平面上に，原点 O を中心とし，点 A(3, 1) を通る円 K がある。また，点 A における円 K の接線を l とする。

(1) 円 K の方程式を求めよ。また，接線 l の方程式を求めよ。

(2) 点 B(1, 2) を通り直線 OA に平行な直線と，直線 l との交点を C とする。点 C の座標を求めよ。また，直線 l に関して点 B と対称な点 D の座標を求めよ。

(3) 原点を通る直線 m と円 K の交点を P，Q とし，(2) の点 D に対して△ DPQ の面積を S とする。m の傾きが変化するとき，S の最大値を求めよ。また，そのときの点 P の座標を求めよ。ただし，点 P の x 座標は正とする。

図形と方程式　平成＿＿年＿＿月＿＿日

23 円 $x^2+y^2-2x+5-a=0$(a は定数)$\cdots$①と，２点 A(1, 1)，B(3, 0) がある。

(1) 円①の中心 C の座標を求めよ。また，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 A は円①の周上または内部にあり，点 B は円①の外部にあるような a の値の範囲を求めよ。

(3) 線分 AB(両端を含む) と円①が共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

24 xy 平面上に 4 点 A$(2,\ 0)$, B$(0,\ 2)$, C$(-2,\ 0)$, D$(0,\ -2)$ がある。正方形 ABCD の内部と周をあわせた領域を S とする。

(1) 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ p\right)$ が領域 S に属するとき，p のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 円 $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ と正方形 ABCD の辺および頂点が共有点をもつとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $(x - r)^2 + (y - r)^2 \leqq r^2$ $(r > 0)$ の表す領域を T とする。領域 S と領域 T が共有点をもつとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。

25 円 $C_1 : x^2 + y^2 - 20x - 10y + 80 = 0$ の中心を A，半径を r とする。

(1) 点 A の座標，および r を求めよ。

(2) 原点を O とし，線分 OA と円 C_1 との交点を B とする。点 B で円 C_1 に外接し，かつ原点 O を通る円を C_2 とする。円 C_2 の方程式を求めよ。

(3) 原点 O から円 C_1 に傾きが正である接線 l をひく。l の方程式を求めよ。また，l と (2) で求めた円 C_2 との 2 つの交点のうち原点 O と異なる方を P とするとき，線分 OP の長さを求めよ。

図形と方程式　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\textbf{26}}$ 座標平面上に直線 $l : y = mx + 1$ と
円 $C : x^2 + y^2 - 10x - 4y + a = 0$ があり，円 C は点
(8, 1) を通る。ただし，m，a は定数とする。

(1) a の値を求めよ。また，円 C の半径を求めよ。

(2) 直線 l が円 C と異なる 2 点 A，B で交わり，線分 AB の長さが $2\sqrt{2}$ のとき，m の値を求めよ。ただし，$m > 0$ とする。

(3) (2) のとき，2 点 A，B を通り，y 軸に接する円の方程式を求めよ。

図形と方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

27 円 $K: x^2+y^2-2ax-2(3a-2)y+9a^2-12a+4=0$
が与えられている。ただし，a は 0 でない定数とする。

(1) $a=3$ のとき，円 K の中心の座標と半径を求めよ。

(2) a がいろいろな値をとって変化するとき，円 K の中心は定直線 l 上にある。この直線 l の方程式を求めよ。

(3) a の値が $1 \leqq a \leqq 3$ の範囲で変化するとき，円 K が通過する領域を D とする。(2) の直線 l のうち D に含まれる線分の長さを求めよ。

図形と方程式

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

28 座標平面上に円 $x^2+y^2-2x-7=0\cdots①$がある。

(1) 円①の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 直線 $x+y=k$ が円①と異なる 2 点 A，B で交わっている。このとき定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。また，線分 AB の中点を M とするとき，AM^2 を k を用いて表せ。

(3) 点 C(4，3) がある。(2) のとき，△ ABC が正三角形となるような k の値を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

29 座標平面上に，2 点 A(1, -4)，B(5, 4) を直径の両端とする円 K がある。また，直線 AB に垂直な直線が円 K と交わるときの交点を P，Q とする。

(1) 円 K の方程式を求めよ。

(2) 線分 AB を 3:1 に内分する点を D とする。直線 PQ が点 D を通るとき，直線 PQ の方程式を求めよ。

(3) (2) のとき，円 K 上の点 R で△ PQR の面積が $5\sqrt{3}$ となるような点 R の座標を求めよ。

30 座標平面上に，円 $(x-2\sqrt{3})^2+(y-4)^2=4 \cdots ①$と，直線 $y=mx+2 \cdots ②$がある。ただし，m は定数とする。

(1) 円①と直線②が接するとき，m の値と，そのときの接点の座標を求めよ。

(2) 円①と直線②が異なる 2 点 P，Q で交わるとき，m のとりうる値の範囲を求めよ。また，このとき線分 PQ の中点 M の座標を m を用いて表せ。

(3) (1) で求めた 2 つの接点を A，B とする。(2) の点 M に対して，△ MAB の面積が $\sqrt{3}$ であるとき，m の値を求めよ。

図形と方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

31 座標平面上に円 $C : x^2 + y^2 - 6x + 12y + 9 = 0$ と，直線 $l : x + my = 6$ がある。ただし，m は定数とする。

(1) 円 C の中心の座標と半径を求めよ。

(2) 円 C と直線 l が共有点をもつような m の値の範囲を求めよ。

(3) (2) で求めた m の範囲内で最大である m の値を m_0 とする。m が $0 \leqq m \leqq m_0$ のすべての値をとって変化するとき，直線 l が通過する領域を D とする。円 C の周のうち，領域 D 内にある部分の長さを求めよ。

図形と方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

32 座標平面上に

円 $C : x^2+y^2-4ax-2(4a-3)y+16a^2-24a+9=0$

がある。ただし，$a>0$ とする。

(1) 円 C の中心の座標と半径を a を用いて表せ。

(2) $a=5$ のときの円 C を C_1，$a=p$ のときの円 C を C_2 とする。C_1 と C_2 が外接するとき，p の値を求めよ。

(3) a が $a>0$ を満たして変化する。このとき，すべての円 C に接する直線の方程式を求めよ。