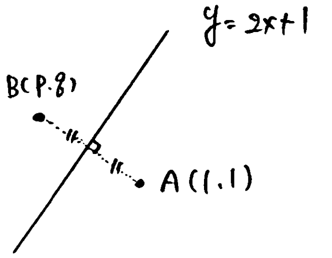
1



(1)

求める点Bを(p, q)とおく。

すると

(I) $AB \perp \ell$

(II) ABの中点はℓ上

の2つが成り立つ。

(I)について、直線ABの傾きは

$$\frac{q-1}{p-1}$$

また、ℓの傾きは2より

$$\frac{q-1}{p-1}\cdot 2 = -1$$

両辺に$p-1$をかけて

$$2(q-1) = -(p-1)$$

$$\therefore\ p+2q=3 \quad \cdots ①$$

(II)について ABの中点は

$$\left(\frac{p+1}{2}, \frac{q+1}{2}\right)$$

この点がℓ上にあるので

$$\frac{q+1}{2} = 2\cdot\frac{p+1}{2}+1$$

両辺2倍して

$$q+1 = 2(p+1)+2$$

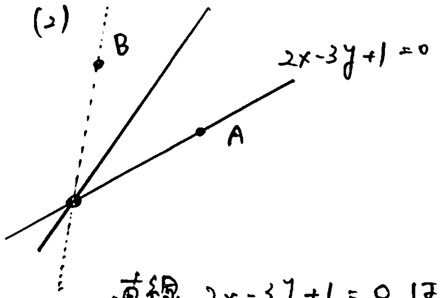
$$\therefore\ 2p-q=-3 \quad \cdots ②$$

①②より

$$p=-\frac{3}{5},\quad q=\frac{9}{5}$$

$$\therefore\ \left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

(2)



直線$2x-3y+1=0$は点A(1, 1)を通る。

ゆえに求める直線はℓと$2x-3y+1$の交点と点$B\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$を通る直線である。$\ell$を$2x-y+1=0$とすると、$\ell$と$2x-3y+1=0$の交点を通る直線は

$$2x-y+1+k(2x-3y+1)=0 \quad \cdots (*)$$

と表すことができる。(*)で表される直線は点$B\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$を通るので代入して

$$2\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{9}{5}+1+k\left\{2\left(-\frac{3}{5}\right)-3\cdot\frac{9}{5}+1\right\}=0$$

解いて $k=-\frac{5}{14}$

これを(*)に代入して

$$2x-y+1-\frac{5}{14}(2x-3y+1)=0$$

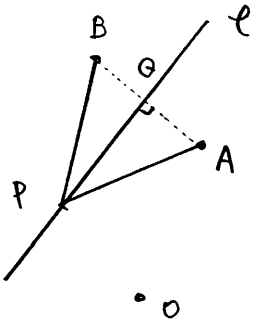
両辺14倍して

$$28x-14y+14-5(2x-3y+1)=0$$

整理して

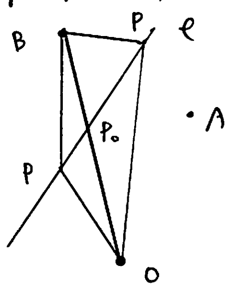
$$18x+y+9=0$$

(3)



図より$\triangle APQ$と$\triangle BPQ$は合同である。よって$PA=PB$である。

ゆえに、$OP+PA$は$OP+PB$に等しく。



$OP+PB$が最小になるのは図のP_0の位置、つまりO, P_0, Bが一直線上に並ぶときである。

$B\left(-\frac{3}{5}, \frac{9}{5}\right)$より直線OBの方程式は

$$y=-3x$$

である。また、$\ell: y=2x+1$より、OBとℓの交点は

$$\begin{cases} y=-3x \\ y=2x+1 \end{cases}$$

$$\therefore\ x=-\frac{1}{5},\quad y=\frac{3}{5}$$

よって、最小となる時のPは

$$P\left(-\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

また、最小値は、OBの長さに等しく。

$OP+PA$の最小値

$$=OB$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt{1^2+3^2}$$

$$=\frac{3}{5}\sqrt{10}$$

2

(1) 直線ABは2円の交点を通る直線なので

$$x^2+y^2+2x-4y-12+k(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$$

において $k=-1$ とすればよい

$$x^2+y^2+2x-4y-12-(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$$

$$\therefore \quad 6x-6y-6=0$$

6で割って

$$x-y-1=0$$

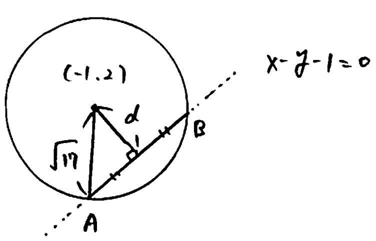
(2) 円 $x^2+y^2+2x-4y-12=0$ において

$$(x^2+2x)+(y^2-4y)-12=0$$

$$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-12=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=17$$

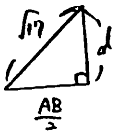
中心 $(-1,2)$、半径 $\sqrt{17}$ である。



中心 $(-1,2)$ と直線ABとの距離 d は

$$d=\frac{|(-1)-2-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

よって図より三平方の定理から



$$(\sqrt{17})^2=d^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$17=(2\sqrt{2})^2+\frac{AB^2}{4}$$

$$17=8+\frac{AB^2}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}AB^2=17-8=9$$

$$AB^2=36$$

$AB>0$ より $AB=6$

(3) 3点O, A, Bを通る円について、円の方程式が分かれば中心の座標と半径が求められる。

AとBは2円の交点なので、求める円は、2円の交点と原点 $(0,0)$ を通る円である。

2円の交点を通る図形は

$$x^2+y^2+2x-4y-12+k(x^2+y^2-4x+2y-6)=0 \quad (※)$$

これが $(0,0)$ を通るので代入して

$$-12+k(-6)=0$$

$$\therefore \quad k=-2$$

これを(※)に代入して

$$x^2+y^2+2x-4y-12-2(x^2+y^2-4x+2y-6)=0$$

$$x^2+y^2+2x-4y-12-2x^2-2y^2+8x-4y+12=0$$

$$-x^2-y^2+10x-8y=0$$

$$\therefore \quad x^2+y^2-10x+8y=0$$

よって平方完成して

$$(x^2-10x)+(y^2+8y)=0$$

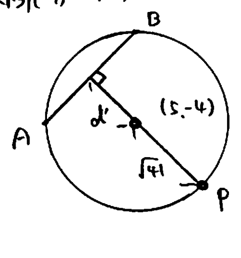
$$(x-5)^2-25+(y+4)^2-16=0$$

$$(x-5)^2+(y+4)^2=41$$

∴ 中心 $(5,-4)$、半径 $\sqrt{41}$

(4) △PABについて、(2)より $AB=6$ である。

よってABを底辺としてみた時、点PからABに下ろした垂線の長さが一番長い時、面積は最大となる。それは図より、垂線が円の中心を通る時である。



円の中心 $(5,-4)$ と直線ABとの距離 d' は

$$d'=\frac{|5-(-4)-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

よって垂線の最大値は

$$\sqrt{41}+d'=\sqrt{41}+4\sqrt{2}$$

ゆえに△PABの面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(\sqrt{41}+4\sqrt{2})=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(\sqrt{41}+4\sqrt{2})=3(\sqrt{41}+4\sqrt{2})$$

このとき点Pの座標は、中心 $(5,-4)$ を通り直線ABに垂直な直線と円との交点。

AB: $y=x-1$ より傾き1。

ABに垂直なので、求める直線の傾き m について

$$m\cdot 1=-1 \quad \therefore m=-1$$

ゆえに

$$y-(-4)=(-1)(x-5)$$

$$\therefore \quad y=-x+1$$

これと $x^2+y^2-10x+8y=0$ を連立して

$$x^2+(-x+1)^2-10x+8(-x+1)=0$$

整理して

$$2x^2-20x+9=0$$

$$\therefore \quad x=\frac{10\pm\sqrt{100-18}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{82}}{2}$$

図より $x=\dfrac{10+\sqrt{82}}{2}$ で

$$y=-x+1=-\frac{10+\sqrt{82}}{2}+1=\frac{-8-\sqrt{82}}{2}$$

$$\therefore \quad P\left(\frac{10+\sqrt{82}}{2},\ \frac{-8-\sqrt{82}}{2}\right)$$

3

(1) 2点$(1,-3)$, $(4,3)$を$1:2$に内分するので

$$\left(\frac{2\cdot1+1\cdot4}{1+2},\ \frac{2\cdot(-3)+1\cdot3}{1+2}\right)$$

よって $\left(\frac{2+4}{3},\ \frac{-6+3}{3}\right)$

つまり、点Aの座標は

$$A(2,-1)$$

(2) (1)より 点$A(2,-1)$

また、直線 $2x+y+3=0$ は

$$y=-2x-3$$

と変形できるので傾きは-2

ゆえに、この直線に垂直な直線の傾きをmとすると

$$(-2)\cdot m=-1$$

$$\therefore\ m=\frac{1}{2}$$

以上より求める直線は

点$A(2,-1)$を通り、傾き$\frac{1}{2}$であるので

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-2)$$

$$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-2$$

(3) $\ell:\ y=\frac{1}{2}x-2$

よって x軸との交点Bは、yに0を代入し

$0=\frac{1}{2}x-2 \quad \therefore\ x=4$

よって $B(4,0)$

また、y軸との交点Cは、xに0を代入し

$y=\frac{1}{2}\cdot0-2 \quad \therefore\ y=-2$

よって $C(0,-2)$

ゆえに2点$B(4,0)$ $C(0,-2)$の距離は

$$BC=\sqrt{(4-0)^2+\{0-(-2)\}^2}$$

$$=\sqrt{16+4}$$

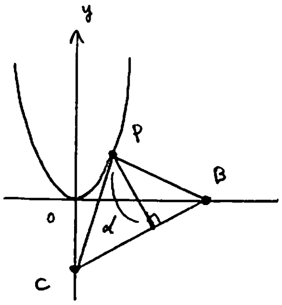
$$=\sqrt{20}$$

$$=2\sqrt{5}$$

(4) 点Pは曲線$y=x^2$上より、点Pのx座標をtとすると、y座標は

$$y=t^2$$

となる。つまり$P(t,t^2)$と文字でおける。



点Pから直線BCに下ろした垂線の長さdは、点$P(t,t^2)$と直線BCとの距離に等しい。

このdは△PBCにおいて、BCを底辺としたとき、高さになる。

直線BC(つまり直線ℓ)の方程式は

$y=\frac{1}{2}x-2$、つまり $x-2y-4=0$

よって

$$d=\frac{|t-2t^2-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}|-2t^2+t-4|$$

つまり、△PBCの面積をSとすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}|-2t^2+t-4|$$

$$=|-2t^2+t-4| \cdots(*)$$

となる。以下、tの値が変化するときのSの最小値を考える。絶対値の中について

$$-2t^2+t-4$$

$$=-2\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)-4$$

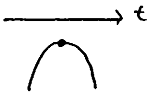
$$=-2\left\{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}-4$$

$$=-2\left\{\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}-4$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}-4$$

$$=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{31}{8}$$

となる。これはどんなtの値に対しても負の数になる。つまり、絶対値の中が常に負の数であるから、(*)式は



$$S=-(-2t^2+t-4)$$

$$=2t^2-t+4$$

となり、平方完成すると

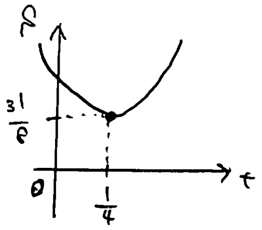
$$S=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{31}{8}$$

となる。

つまりSは

$t=\frac{1}{4}$の時

最小値$\frac{31}{8}$



をとる。ここで$P(t,t^2)$であったから

$t=\frac{1}{4}$の時、$P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$

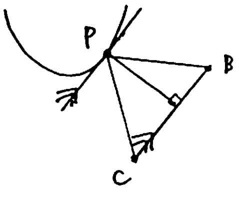
である。

以上より、△PBCの面積は

$P\left(\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$の時、最小値$\frac{31}{8}$

をとる。

(おまけ) この時、点Pでの接線はBCに平行である。



4

(1) 2点A(8,4), B(2,-2)を通るので

$$y-4=\frac{4-(-2)}{8-2}(x-8)$$

$$\therefore\ y-4=\frac{6}{6}(x-8)$$

$$\therefore\ y=x-4$$

(2) 3点O(0,0), A(8,4), B(2,-2)を通る円を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とすると

・(0,0)を通る

$$0^2+0^2+l\cdot 0+m\cdot 0+n=0$$

$$\therefore\ n=0 \cdots ①$$

・(8,4)を通る

$$8^2+4^2+l\cdot 8+m\cdot 4+n=0$$

$$\therefore\ 64+16+8l+4m+n=0$$

$$\therefore\ 8l+4m+n=-80 \cdots ②$$

・(2,-2)を通る

$$2^2+(-2)^2+l\cdot 2+m(-2)+n=0$$

$$4+4+2l-2m+n=0$$

$$\therefore\ 2l-2m+n=-8 \cdots ③$$

②③に①を代入して

$$\begin{cases} 8l+4m=-80 \\ 2l-2m=-8 \end{cases}$$

$$\therefore\ \begin{cases} 2l+m=-20 \\ l-m=-4 \end{cases}$$

よって解くと $l=-8,\ m=-4$

ゆえに、3点O, A, Bを通る円の方程式は

$$x^2+y^2-8x-4y=0$$

平方完成すると

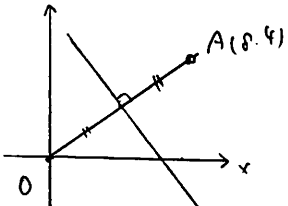
$$(x^2-8x)+(y^2-4y)=0$$

$$\therefore\ (x-4)^2-16+(y-2)^2-4=0$$

$$(x-4)^2+(y-2)^2=20$$

よって中心(4,2) 半径$2\sqrt{5}$

別解 線分OAの垂直2等分線を求める。



OAの傾きは $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

よってOAに垂直な直線の傾きをmとすると

$$\frac{1}{2}\cdot m=-1$$

$$\therefore\ m=-2$$

また、線分OAの中点は

$$\left(\frac{0+8}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$$ よって(4,2)

∴ ゆえに、OAの垂直二等分線は、(4,2)を通って傾き-2の直線より

$$y-2=-2(x-4)$$

$$\therefore\ y=-2x+10 \cdots (\mathrm{I})$$

線分OBの垂直二等分線も同様で

$$y-(-1)=1\cdot(x-1)$$

$$\therefore\ y=x-2 \cdots (\mathrm{II})$$

(I)(II)より、3点O, A, Bを通る円の中心は、(I)(II)の交点より

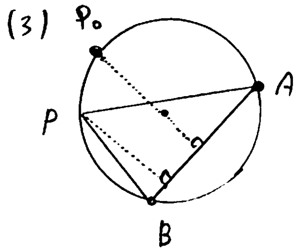
$$\begin{cases} y=-2x+10 \\ y=x-2 \end{cases}$$

解いて $x=4,\ y=2$

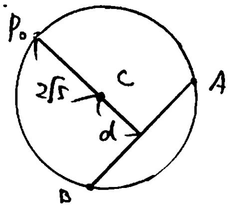
ゆえに中心(4,2)

また半径は、(0,0)と(4,2)の線分の長さより $\sqrt{(4-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{5}$

(3)



線分ABを底辺としてみた時、△PABの高さが最大となる点が求める点Pの位置である。それは上図において、点P_0の位置である。つまり、ABに垂直な直線で、円の中心を通るものと、円との交点である。



中心をC(4,2)とすると、C(4,2)と直線AB: $y=x-4$ との距離dは

$$d=\frac{|4-2-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

またP_0Cの長さは円の半径に等しく$2\sqrt{5}$

そして線分ABの長さは

$$\sqrt{(8-2)^2+\{4-(-2)\}^2}=\sqrt{6^2+6^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

以上より△PABの面積の最大値は

$$\triangle P_0AB=\frac{1}{2}\cdot AB(d+2\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$$

$$=3\sqrt{2}(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$$

$$=6+6\sqrt{10}$$

5

(1) $x^2+y^2-8x+4y-5=0$

平方完成すると

$(x^2-8x)+(y^2+4y)-5=0$

$(x-4)^2-16+(y+2)^2-4-5=0$

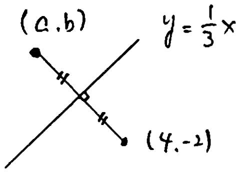
$(x-4)^2+(y+2)^2=25$

∴ 中心 $(4,-2)$ 半径 5

(2) 直線 $y=\frac{1}{3}x$ に関して C_1 と対称な円 C_2 について

C_1 の中心と C_2 の中心は $y=\frac{1}{3}x$ に関して対称である。

C_1 の中心 $(4,-2)$, C_2 の中心 (a,b) とする。すると



(I) $(4,-2)$ と (a,b) を結ぶ線分は $y=\frac{1}{3}x$ に垂直

(II) $(4,-2)$ と (a,b) の中点は $y=\frac{1}{3}x$ 上にある。

この(I)(II)が成り立つ。

(I)について

(a,b) と $(4,-2)$ を結ぶ線分の傾きは

$$\frac{b-(-2)}{a-4}=\frac{b+2}{a-4}$$

である。また、$y=\frac{1}{3}x$ の傾きは $\frac{1}{3}$ より垂直であることから

$$\frac{b+2}{a-4}\times\frac{1}{3}=-1$$

両辺に $3(a-4)$ をかけて

$b+2=-3(a-4)$

∴ $3a+b=10$ …①

(II)について

(a,b) と $(4,-2)$ の中点は

$$\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b+(-2)}{2}\right)$$

である。この点が直線 $y=\frac{1}{3}x$ 上にあるので

$$\frac{b+(-2)}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a+4}{2}$$

が成り立つ。両辺6倍して

$3(b-2)=a+4$

∴ $a-3b=-10$ …②

①②より

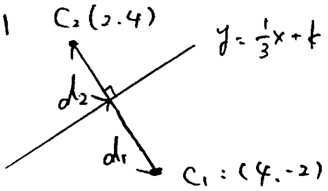
$$\begin{cases}3a+b=10\\ a-3b=-10\end{cases}$$

∴ $a=2,\ b=4$

ゆえに、求める C_2 の中心は

$C_2:(2,4)$

(3)



$d_1:d_2=1:3$ となるのは2通りある。

(I) C_1C_2 を $1:3$ に内分する点を $y=\frac{1}{3}x+k$ が通る時

$C_1:(4,-2)$ と $C_2(2,4)$ を $1:3$ に内分する点は

$$\left(\frac{3\cdot4+1\cdot2}{1+3},\ \frac{3(-2)+1\cdot4}{1+3}\right)$$

$$=\left(\frac{14}{4},\ \frac{-2}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

∴ $y=\frac{1}{3}x+k$ が $\left(\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$ を通るので

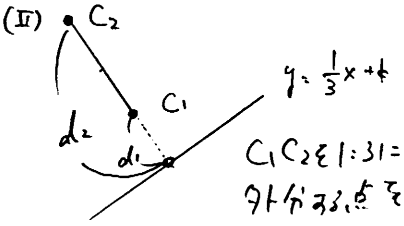
$$-\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}+k$$

∴ $k=-\frac{1}{2}-\frac{7}{6}$

$=-\frac{3}{6}-\frac{7}{6}=-\frac{10}{6}$

$=-\frac{5}{3}$

(II)



C_1C_2 を $1:3$ に外分する点を $y=\frac{1}{3}x+k$ が通る

∴ $1:3$ に外分する点は

$$\left(\frac{-3\cdot4+1\cdot2}{1-3},\ \frac{-3(-2)+1\cdot4}{1-3}\right)$$

$$=\left(\frac{-10}{-2},\ \frac{10}{-2}\right)=(5,-5)$$

$y=\frac{1}{3}x+k$ が通る時

$-5=\frac{1}{3}\cdot5+k$

∴ $k=-\frac{5}{3}-5=-\frac{20}{3}$

以上より

$k=-\frac{5}{3},\ -\frac{20}{3}$

別解 $y=\frac{1}{3}x+k$ ∴ $x-3y+3k=0$

よって $(4,-2)$ に対し、

$$d_1=\frac{|4-3(-2)+3k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3k+10|}{\sqrt{10}}$$

また、$(2,4)$ に対し

$$d_2=\frac{|2-3\cdot4+3k|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{|3k-10|}{\sqrt{10}}$$

∴ $d_1:d_2=1:3$

$\Leftrightarrow d_2=3d_1$

$\Leftrightarrow \frac{|3k-10|}{\sqrt{10}}=3\cdot\frac{|3k+10|}{\sqrt{10}}$

$\Leftrightarrow |3k-10|=3|3k+10|$

$\Leftrightarrow 3k-10=\pm3(3k+10)$

よって $3k-10=3(3k+10)$ ∴ $k=-\frac{20}{3}$

$3k-10=-3(3k+10)$ ∴ $k=-\frac{5}{3}$

6

(1) $x^2+y^2-2x=0$

$(x^2-2x)+y^2=0$

$(x-1)^2-1+y^2=0$

$\therefore (x-1)^2+y^2=1$

よって 中心$(1,0)$ 半径1

(2) 傾きがkで点$A(0,-2)$を通る直線の式は

$y-(-2)=k(x-0)$

$\therefore y=kx-2$

この直線が円に接するので、

$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y=kx-2 \end{cases}$

より、yを消去した2次方程式

$x^2+(kx-2)^2-2x=0$

は重解を持つ。

$x^2+k^2x^2-4kx+4-2x=0$

$(k^2+1)x^2-2(2k+1)x+4=0$

よって、重解を持つので、$D=0$

$\therefore$

$D/4=(2k+1)^2-(k^2+1)\cdot 4$

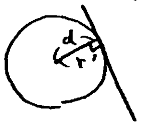
$=(4k^2+4k+1)-4k^2-4$

$=4k-3$

$\therefore 4k-3=0 \quad \therefore k=\frac{3}{4}$

(2)' 直線 $y=kx-2$ が中心$(1,0)$半径1の円に接するので

「中心と直線との距離が半径に等しい」



$\because y=kx-2$ より $kx-y-2=0$

よって 中心$(1,0)$との距離dは

$d=\frac{|k\cdot 1-0-2|}{\sqrt{k^2+(-1)}}$

$=\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$

これが半径$r=1$に等しいので

$\frac{|k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$

両辺に$\sqrt{k^2+1}$をかけて

$|k-2|=\sqrt{k^2+1}$

両辺2乗して

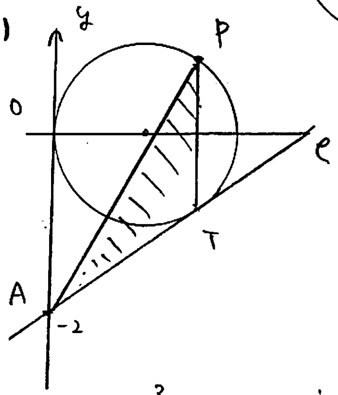
$(k-2)^2=k^2+1$

$k^2-4k+4=k^2+1$

$-4k=-3$

$\therefore k=\frac{3}{4}$

(3)



(2)より $k=\frac{3}{4}$ より ℓの式は $y=\frac{3}{4}x-2$ である。また

Tの座標は

$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ y=\frac{3}{4}x-2 \end{cases}$

を連立して

$x^2+\left(\frac{3}{4}x-2\right)^2-2x=0$

$\therefore \frac{25}{16}x^2-5x+4=0$

$(5x-8)^2=0$

$\therefore x=\frac{8}{5}$

この時

$y=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{5}-2$

$=-\frac{4}{5}$

$\therefore T\left(\frac{8}{5},-\frac{4}{5}\right)$

よって

$AT=\sqrt{\left(\frac{8}{5}-0\right)^2+\left(-\frac{4}{5}+2\right)^2}$

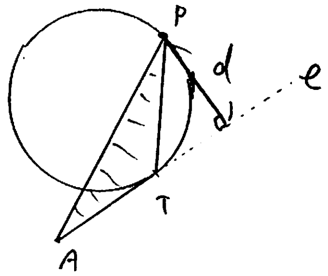
$=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{64}{25}+\frac{36}{25}}$

$=\sqrt{\frac{100}{25}}=2$

つまり $AT=2$である。

点Pと直線ℓとの距離をdとすると、$\triangle ATP$の面積について、ATを底辺とするとdが高さに相当する。



よって 点$P(a,b)$とすると、点と直線の距離の公式と

$\ell: 3x-4y-8=0$ より

$d=\frac{|3a-4b-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$=\frac{1}{5}|3a-4b-8|$

よって$\triangle PAT$の面積が1であるから、

$\triangle PAT=\frac{1}{2}\cdot AT\cdot d$

$\therefore 1=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{5}|3a-4b-8|$

$|3a-4b-8|=5$

よって

$3a-4b-8=\pm 5$

・$3a-4b-8=5$の時

$b=\frac{1}{4}(3a-13)$

また$P(a,b)$は円上の点より

$a^2+b^2-2a=0$

が成り立つ。

代入して

$a^2+\frac{1}{16}(3a-13)^2-2a=0$

整理して

$25a^2-110a+169=0$

しかし

$a=\frac{55\pm\sqrt{55^2-25\cdot 169}}{25}$

$=\frac{55\pm\sqrt{-1225}}{25}$

より解なし。

・$3a-4b-8=-5$の時

$b=\frac{3}{4}(a-1)$

代入して

$a^2+\frac{9}{16}(a-1)^2-2a=0$

$\therefore 25a^2-50a+9=0$

$(5a-9)(5a-1)=0$

$\therefore a=\frac{9}{5},\frac{1}{5}$

$b=\frac{3}{4}(a-1)$に代入して

$b=\frac{3}{5},-\frac{3}{5}$

以上より、求めるPの座標は

$P\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right),\left(\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$

(おまけ) $AT=2$であることは

$AT=AO$

からすぐに分かる。

(おまけ) この円の半径が1であるから、求める点Pは中心を通り、ℓに平行な直線上にある。

7

(1)

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \cdots ① \\ y=-\frac{1}{2}x+5 \cdots ② \end{cases}$$

交点を求めるには、連立する。

②を①に代入して

$x^2+(-\frac{1}{2}x+5)^2=25$

$x^2+(\frac{1}{4}x^2-5x+25)=25$

∴ $\frac{5}{4}x^2-5x=0$

両辺4倍して

$5x^2-20x=0$

$5x(x-4)=0$

∴ $x=0,\ 4$

②に代入して

$x=0$の時 $y=5$

$x=4$の時 $y=3$.

∴ (Aのx座標)<(Bのx座標)

よって $A(0,5)\ B(4,3)$

(2) (1)より $A(0,5),\ B(4,3)$

求める円の中心を(a,b)とすると

半径は$5\sqrt{2}$より

$(x-a)^2+(y-b)^2=(5\sqrt{2})^2$

とおける。これが2点$A(0,5),B(4,3)$を通るので、代入して

$$\begin{cases} (0-a)^2+(5-b)^2=50 \\ (4-a)^2+(3-b)^2=50 \end{cases}$$

∴

$$\begin{cases} a^2+b^2-10b+25=50 \\ a^2-8a+16+b^2-6b+9=50 \end{cases}$$

整理して

$a^2+b^2-10b-25=0 \cdots (I)$

$a^2+b^2-8a-6b-25=0 \cdots (II)$

(I)−(II)より

$8a-4b=0$ ∴ $b=2a$

これを(I)に代入して

$a^2+(2a)^2-10\cdot 2a-25=0$

$5a^2-20a-25=0$

$a^2-4a-5=0$

$(a-5)(a+1)=0$

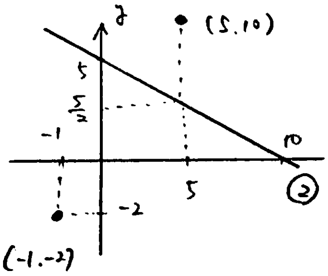
∴ $a=5,-1$

$b=2a$より $b=10,-2$

ゆえに求める円の中心は

$(5,10),\ (-1,-2)$

となるが、条件より円Cの中心は直線②よりも上方なので



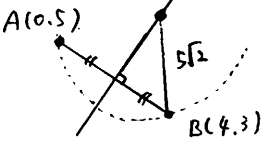
求める円Cの中心は $(5,10)$

∴ $(x-5)^2+(y-10)^2=50$

(2)の別

円Cは2点A,Bを通る。

ゆえに円Cの中心は線分ABの垂直二等分線上にある。



ABの中点は $(\frac{0+4}{2},\frac{5+3}{2})$

よって $(2,4)$

また、ABの傾きが $\frac{3-5}{4-0}=-\frac{1}{2}$

であるから、垂直なので

$m\cdot(-\frac{1}{2})=-1$

∴ $m=2$

より求める直線の傾きは2

以上より ABの垂直二等分線は

$y-4=2(x-2)$

∴ $y=2x \cdots (*)$

である。ゆえに(*)上の点を$(t,2t)$と表すと、半径が$5\sqrt{2}$なので

$(t,2t)$から$(4,3)$までの距離は半径に等しく$5\sqrt{2}$である。

∴ $\sqrt{(t-4)^2+(2t-3)^2}=5\sqrt{2}$

両辺2乗して、展開して

$5t^2-20t+25=50$

$t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0$

∴ $t=-1,\ 5$

よって

$(-1,-2),\ (5,10)$

〜以下同じ〜

(2)の別

2点A,Bは円①と直線②の交点であるから、A,Bを通る円は

$x^2+y^2-25+k(x+2y-10)=0$

とおける。展開して

$x^2+kx+y^2+2ky-25-10k=0$

平方完成して

$(x+\frac{k}{2})^2-\frac{k^2}{4}+(y+k)^2-k^2-25-10k=0$

∴ $(x+\frac{k}{2})^2+(y+k)^2=\frac{5}{4}k^2+10k+25 \cdots (※)$

今、この円の半径が$5\sqrt{2}$であるから

$\frac{5}{4}k^2+10k+25=(5\sqrt{2})^2$

整理して

$k^2+8k-20=0$

$(k+10)(k-2)=0$

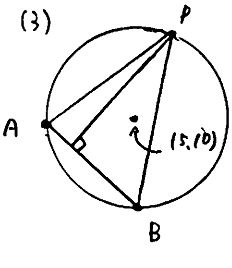
∴ $k=-10,\ 2$

よって(※)に代入して

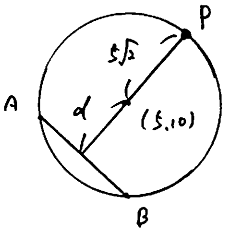
$$\begin{cases} (x-5)^2+(y-10)^2=50 \\ (x+1)^2+(y+2)^2=50 \end{cases}$$

〜以下同じ〜

(3)



線分ABを底辺とした時、PからABに下ろした垂線の長さが一番長くなった時、最大となる。それは垂線が中心を通る時である。



この垂線の長さは

(半径)+(中心とABとの距離)

である。中心$(5,10)$と

AB : $y=-\frac{1}{2}x+5$

との距離dは

AB: $x+2y-10=0$

より

$d=\frac{|5+2\cdot 10-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$=\frac{15}{\sqrt{5}}$

$=3\sqrt{5}$

また、半径は$5\sqrt{2}$より

垂線の長さの最大は

$5\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

そしてABの長さは

$AB=\sqrt{(0-4)^2+(5-3)^2}$

$=\sqrt{16+4}$

$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

よって、△PABの面積の最大値は

$\frac{1}{2}\cdot AB(5\sqrt{2}+3\sqrt{5})$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}(5\sqrt{2}+3\sqrt{5})$

$=5\sqrt{10}+15$

8

(1)

$y=t(x+2)+1 \cdots ①$

について. $x=-2$の時

$y=t(-2+2)+1$

$=t\cdot 0+1$

$=1$

となる。つまり. tの値がいくつであっても.

$(x,y)=(-2,1)$

を代入すると①は成り立つ。

すなわち. 直線①は

点$(-2,1)$を

tの値にかかわらず通る//

おまけ

$y=t(x+2)+1$

$\Leftrightarrow y-1=t\{x-(-2)\}$

より. この式は

点$(-2,1)$を通り

傾きtである直線

を表す。

(2) (1)より $C(-2,1)$

よって

$A(0,-1)$, $B(2,5)$, $C(-2,1)$

の3点通る円の方程式を

$x^2+y^2+lx+my+n=0 \cdots (*)$

とおくと.

$A(0,-1)$を通るので

$0^2+(-1)^2+l\cdot 0+m(-1)+n=0$

$\therefore -m+n=-1 \cdots (\text{I})$

$B(2,5)$を通るので

$2^2+5^2+l\cdot 2+m\cdot 5+n=0$

$\therefore 2l+5m+n=-29 \cdots (\text{II})$

$C(-2,1)$を通る.

$(-2)^2+1^2+l(-2)+m\cdot 1+n=0$.

$\therefore -2l+m+n=-5 \cdots (\text{III})$

(I)(II)(III)より

$$\begin{cases} -m+n=-1 & \cdots (\text{I}) \\ 2l+5m+n=-29 & \cdots (\text{II}) \\ -2l+m+n=-5 & \cdots (\text{III}) \end{cases}$$

の連立方程式を解く

(I)−(II)より

$-2l-6m=28$

$\therefore l+3m=-14 \cdots (\text{IV})$

(I)−(III)より

$2l-2m=4$

$\therefore l-m=2 \cdots (\text{V})$

(IV)−(V)より

$4m=-16$ $\therefore m=-4$

(V)に代入して

$l-(-4)=2$ $\therefore l=-2$

また(I)に代入して

$-(-4)+n=-1$ $\therefore n=-5$

以上より

$l=-2, m=-4, n=-5$

よって

$x^2+y^2-2x-4y-5=0$ //

(3) (2)より

$x^2+y^2-2x-4y-5=0$

$(x-1)^2-1+(y-2)^2-4-5=0$

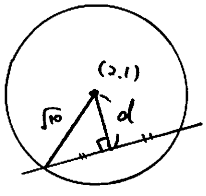
$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=10$

中心$(1,2)$, 半径$\sqrt{10}$

また. 直線①は

$tx-y+2t+1=0$

とすると.



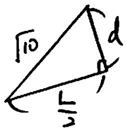
中心$(1,2)$と直線①との距離dは

$$d=\frac{|t\cdot 1-2+2t+1|}{\sqrt{t^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|3t-1|}{\sqrt{t^2+1}} \cdots (*)$$

したがって切り取られる線分の長さをLとすると三平方の定理から

$$(\sqrt{10})^2=d^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2$$



(*)を代入して

$$10=\frac{(3t-1)^2}{t^2+1}+\frac{L^2}{4}$$

$$\therefore \frac{L^2}{4}=10-\frac{9t^2-6t+1}{t^2+1}$$

$$=\frac{10t^2+10-9t^2+6t-1}{t^2+1}$$

$$=\frac{t^2+6t+9}{t^2+1}$$

$$\therefore L^2=\frac{4(t^2+6t+9)}{t^2+1}$$

ここで. $L\geqq 6$となるtの範囲を求める。

ゆえに $L\geqq 6$より $L^2\geqq 36$なので

$$\frac{4(t^2+6t+9)}{t^2+1}\geqq 36$$

t^2+1を両辺にかけて (t^2+1は正の数より. 不等号の向きは変わらず)

$4(t^2+6t+9)\geqq 36(t^2+1)$

$t^2+6t+9\geqq 9(t^2+1)$

$t^2+6t+9\geqq 9t^2+9$

$\therefore -8t^2+6t\geqq 0$

$4t^2-3t\leqq 0$

$t(4t-3)\leqq 0$

$\therefore 0\leqq t\leqq \frac{3}{4}$ //

9

(1)

$x^2+y^2-8x+6y+16=0$

$(x^2-8x)+(y^2+6y)+16=0$

$(x-4)^2-16+(y+3)^2-9+16=0$

$\therefore (x-4)^2+(y+3)^2=9$

中心$(4,-3)$、半径3

(2)

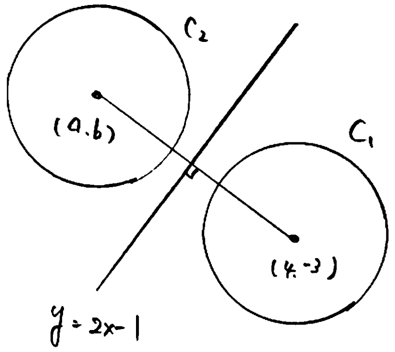
直線 $y=2x-1$ に関して円C_1と円C_2は対称である。

よって2円C_1, C_2はどちらも同じ半径である。

ゆえにC_2の半径は3である。

また、C_1の中心とC_2の中心は直線 $y=2x-1$ に関して対称である。よって(1)よりC_1の中心は$(4,-3)$なので、

直線 $y=2x-1$ に関して$(4,-3)$と対称な点の座標を求める。



円C_2の中心を(a,b)とおく。

すると、(a,b)と$(4,-3)$の2点を結んだ線分は $y=2x-1$ に垂直

よって(a,b)と$(4,-3)$を結んだ線分の傾きは

$$\frac{b-(-3)}{a-4}=\frac{b+3}{a-4}$$

また $y=2x-1$ の傾きは2

$$\therefore \frac{b+3}{a-4}\times 2=-1$$

両辺に $a-4$ をかけて

$2(b+3)=-(a-4)$

$\therefore 2b+6=-a+4$

よって $a+2b=-2$ …①

また、2点(a,b), $(4,-3)$の中点は直線 $y=2x-1$ 上にある。中点は

$$\left(\frac{a+4}{2},\ \frac{b-3}{2}\right)$$

であり、この点が $y=2x-1$ 上にあるので、

$$\frac{b-3}{2}=2\cdot\frac{a+4}{2}-1$$

両辺を2倍して

$b-3=2(a+4)-2$

$\therefore b-3=2a+8-2$

よって $2a-b=-9$ …②

①②より

$$\begin{cases} a+2b=-2 \\ 2a-b=-9 \end{cases}$$

解いて

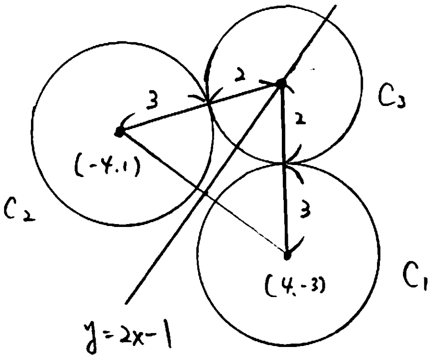
$a=-4,\ b=1$

よってC_2の中心は$(-4,1)$

以上より、求める円C_2は中心$(-4,1)$、半径3より

$(x+4)^2+(y-1)^2=9$

(3)



C_3はC_1、C_2に外接している。

外接しているのでC_3の中心とC_1の中心との距離は2円の半径の和に等しい。

同じく、C_3の中心とC_2の中心との距離は2円の半径の和に等しい。

図より

C_3の中心は、C_1の中心とC_2の中心から等距離の場所である。

それは、

C_3の中心は、C_1の中心とC_2の中心の垂直二等分線上にある

ことを意味し、そして(2)の結果よりその垂直二等分線は $y=2x-1$ である。

以上より、C_3の中心は $y=2x-1$ 上なので

$(t,\ 2t-1)$と文字で表すことができる。

するとC_3の中心$(t,2t-1)$とC_1の中心$(4,-3)$の距離は5なので

$$\sqrt{(t-4)^2+\{(2t-1)-(-3)\}^2}=5$$

両辺2乗して

$(t-4)^2+(2t+2)^2=25$

展開して整理して

$t^2-8t+16+4t^2+8t+4=25$

$\therefore 5t^2=5,\quad t=\pm 1$

するとC_3の中心は

$t=1$の時 $(1,1)$　$t=-1$の時 $(-1,-3)$

しかし、C_3の中心は第1象限より

$(-1,-3)$は不適

以上よりC_3の方程式は $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

10

(1) 中心は線分ABの中点より

$$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{0+4}{2}\right)$$

よって

$(3,\ 2)$

また半径は中心$(3, 2)$と$A(2, 0)$との距離に等しいので

$$\sqrt{(3-2)^2+(2-0)^2}$$

$$=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

よって求める円Cは

中心$(3, 2)$、半径$\sqrt{5}$より

$$(x-3)^2+(y-2)^2=(\sqrt{5})^2$$

∴

$$(x-3)^2+(y-2)^2=5$$

(2) $\ell: kx-y-2k+5=0$

について

$$k(x-2)+(-y+5)=0$$

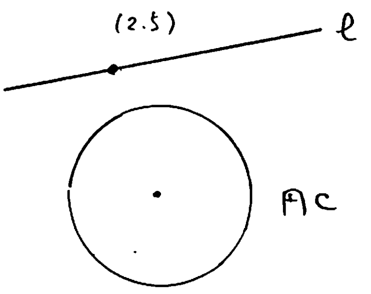
ここで $x=2$ の時

$-y+5=0$　∴ $y=5$

つまり、kがどんな値であっても$x=2$の時、$y=5$となる。

ゆえに、直線ℓはkの値によらず点$(2, 5)$を通る。//

(3)



不等式 $kx-y-2k+5<0$

の表す領域について

$$kx-y-2k+5<0$$

$$-y<-kx+2k-5$$

$$\therefore\ y>kx-2k+5$$

よって、直線ℓ: $y=kx-2k+5$

よりも上側の部分(境界含まず)

が領域Qである。

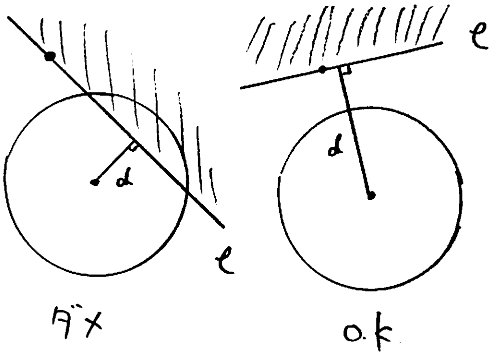
$P\supset Q$ が成り立つとは、

領域Qが領域Pに含まれる。

つまり、直線ℓの上側の部分は

常に円Cの外側にあれば

よく、



それは円Cの中心$(3, 2)$と直線ℓ

との距離dが半径r以上ならば

よい。

$\ell: kx-y-2k+5=0$ より

$$d=\frac{|k\cdot 3-2-2k+5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|3k-2-2k+5|}{\sqrt{k^2+1}}$$

$$=\frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}$$

また、半径rは$r=\sqrt{5}$より

$$d\geqq r$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{|k+3|}{\sqrt{k^2+1}}\geqq\sqrt{5}$$

両辺正より2乗して

$$\frac{(k+3)^2}{k^2+1}\geqq 5$$

k^2+1は正なので、両辺にk^2+1をかけても不等号の向きは変わらない。

$$(k+3)^2\geqq 5(k^2+1)$$

$$k^2+6k+9\geqq 5k^2+5$$

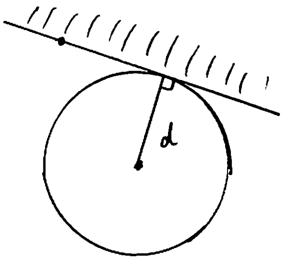
$$4k^2-6k-4\leqq 0$$

$$2k^2-3k-2\leqq 0$$

$$(2k+1)(k-2)\leqq 0$$

$$\therefore\ -\frac{1}{2}\leqq k\leqq 2$$

㊟ 領域PもQもどちらも境界を含まないので、$d=r$となっても$P\supset Q$が成り立つ。



11

(1) $x^2+y^2-4x-2y-4=0$

$(x^2-4x)+(y^2-2y)-4=0$

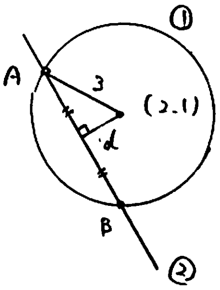
$(x-2)^2-4+(y-1)^2-1-4=0$

$\therefore$

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$

よって 円①の中心 (2.1)、半径3

(2)



直線②と中心との距離をdとする。

すると ②: $2x+y=0$ と 中心(2.1)との距離なので

$$d=\frac{|2\cdot 2+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$=\frac{|5|}{\sqrt{4+1}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

ゆえに図の直角三角形において三平方の定理より

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2+d^2=3^2$$

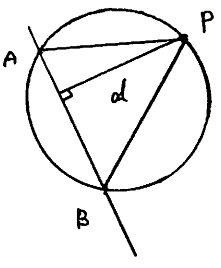
$$\frac{AB^2}{4}+(\sqrt{5})^2=9$$

$\therefore$

$$AB^2=16$$

$AB>0$ より $AB=4$

(3)



△ABPの面積について。

点Pから線分ABに下ろした垂線の長さをdとすると (2)より $AB=4$より

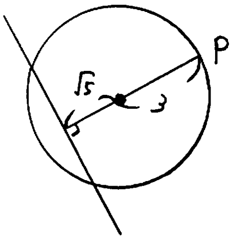
$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot d$$

$$=2d$$

となる。つまりdが一番長くなった時、△ABPの面積も最大となる。

ここでdが一番長くなるのはdが円①の中心を通る時である。



(2)の結果より、円の中心から直線②に下ろした垂線の長さは$\sqrt{5}$である。

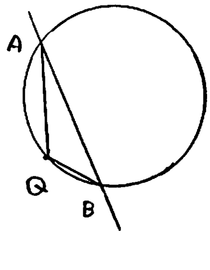
また、円の半径が3であるから、dの最大値は

$$d=3+\sqrt{5}$$

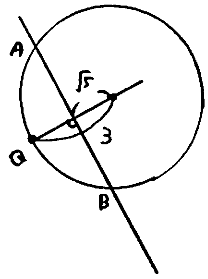
である。以上より、△ABPの面積の最大値は

$$\triangle ABP=2(3+\sqrt{5})$$

$$=6+2\sqrt{5}$$



同様に△ABQの面積の最大値を考える。それは点QからABに下ろした垂線の長さが最大になる時であり、それは垂線が円の中心を通る時である。



この時、垂線の長さは

$3-\sqrt{5}$ となるので

△ABQの面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\cdot AB\cdot(3-\sqrt{5})$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4(3-\sqrt{5})$$

$$=6-2\sqrt{5}$$

となる。

以上より 四角形AQBPの面積の最大は

△ABPの面積の最大値

+

△ABQの面積の最大値

より

$$(6+2\sqrt{5})+(6-2\sqrt{5})$$

$$=12$$

12

(1) 原点を中心とする円なので

$$x^2+y^2=r^2$$

とおく。この円が点(4, 3)を通るので、代入すると

$$4^2+3^2=r^2$$

$$\therefore\ r^2=25$$

以上より、円Cの方程式は

$$x^2+y^2=25$$

(2) 接点を(p, q)とおくと

円 $x^2+y^2=25$ 上の点(p, q)における接線の方程式は

$$px+qy=25 \quad \cdots (*)$$

とおける。(*)は点(5, 10)を通るので、

$$p\cdot 5+q\cdot 10=25$$

$$\therefore\ p+2q=5 \quad \cdots (\text{I})$$

また、点(p, q)は円 $x^2+y^2=25$ 上の点なので代入して

$$p^2+q^2=25 \quad \cdots (\text{II})$$

が成り立つ。(I)より $p=5-2q$ として(II)に代入すると

$$(5-2q)^2+q^2=25$$

$$(4q^2-20q+25)+q^2=25$$

$$5q^2-20q=0$$

$$5q(q-4)=0 \quad \therefore\ q=0, 4$$

$q=0$ の時、$p=5$。

$q=4$ の時、$p=5-2\cdot 4=-3$

以上より(*)に代入して

$$5x+0y=25,\quad (-3)x+4y=25$$

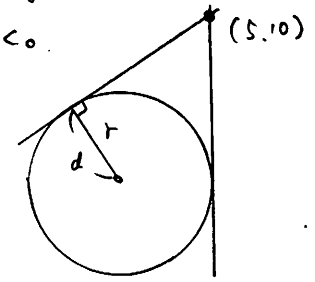
$$\therefore\ x=5,\ -3x+4y=25$$

(2)の別

点P(5, 10)を通る直線を

$$y-10=m(x-5) \quad \cdots (☆)$$

とおく。



すると、(☆)と円が接するので、円の中心と直線(☆)との距離dは半径rに等しくなる。円Cは中心(0, 0)、半径5なので(0, 0)と $mx-y-5m+10=0$ との距離dは

$$d=\frac{|m\cdot 0-0-5m+10|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-5m+10|}{\sqrt{m^2+1}}$$

また、半径 $r=5$ より、$d=r$ から

$$\frac{|-5m+10|}{\sqrt{m^2+1}}=5$$

両辺2乗して、

$$\frac{(-5m+10)^2}{m^2+1}=25$$

両辺に m^2+1 をかけ、分母をはらって

$$(-5m+10)^2=25(m^2+1)$$

$$25m^2-100m+100=25m^2+25$$

$$-100m=-75$$

$$\therefore\ m=\frac{3}{4}$$

よって(☆)に代入して

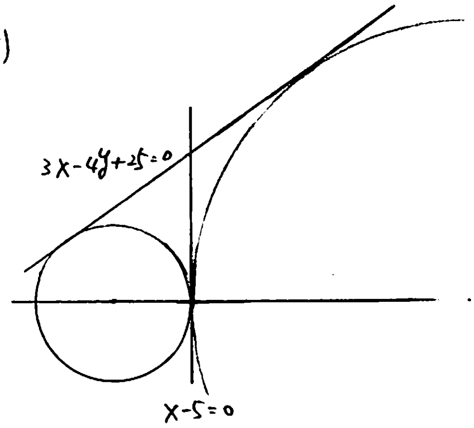
$$y-10=\frac{3}{4}(x-5)$$

$$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

また、もう1本はx軸に垂直な $x=5$ である。

$$\therefore\ x=5,\ y=\frac{3}{4}x+\frac{25}{4}$$

(3)



求める円の中心を(t, 0)とする。ただし、条件より $t>0$ である。

(2)より、2本の接線は

$$3x-4y+25=0,\ x-5=0$$

より、点(t, 0)から、それぞれの直線への距離が等しい。

点(t, 0)と $3x-4y+25=0$ の距離

$$\frac{|3t-4\cdot 0+25|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3t+25|}{5}$$

点(t, 0)と $x-5=0$ の距離

$$\frac{|t-5|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|t-5|$$

よって

$$\frac{|3t+25|}{5}=|t-5|$$

が成り立つ。この式は

$$\frac{3t+25}{5}=\pm(t-5)$$

と変形できる。

・$\frac{3t+25}{5}=t-5$ の時

解いて $3t+25=5t-25 \quad \therefore\ t=25$

（$t>0$ を満たす）

・$\frac{3t+25}{5}=-(t-5)$ の時

解いて $3t+25=-5t+25 \quad \therefore\ t=0$

（$t>0$ を満たさず）

以上、$t=25$ であり、中心(25, 0)

また、半径は

$$|t-5|=|25-5|=20$$

∴ 円の方程式

$$(x-25)^2+y^2=400$$

13

(1)

$C: x^2+y^2-6x-2y+k=0$

平方完成して

$(x^2-6x)+(y^2-2y)+k=0$

$(x-3)^2-9+(y-1)^2-1+k=0$

$\therefore (x-3)^2+(y-1)^2=10-k$

よって半径は $\sqrt{10-k}$ であるが

条件より半径1であるから

$\sqrt{10-k}=1 \quad \therefore k=9$

(2) (1)より円Cは

$(x-3)^2+(y-1)^2=1$

ゆえに中心 $(3,1)$ 半径1である。

点 $A(4,3)$ を通る直線を

$y-3=m(x-4) \cdots (*)$

とおくと、円Cの中心 $(3,1)$ と直線(*)との距離 d が半径 $r=1$ に等しい。

直線(*)を $mx-y-4m+3=0$ と変形すると、

$$d=\frac{|m\cdot 3-1-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$$

となる。これが $r=1$ に等しいので

$$\frac{|-m+2|}{\sqrt{m^2+1}}=1$$

両辺2乗して

$$\frac{(-m+2)^2}{m^2+1}=1$$

両辺に m^2+1 をかけて

$(-m+2)^2=m^2+1$

$m^2-4m+4=m^2+1$

$\therefore -4m=-3$

$m=\frac{3}{4}$

よって(*)に代入して

$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$

$\therefore y=\frac{3}{4}x$

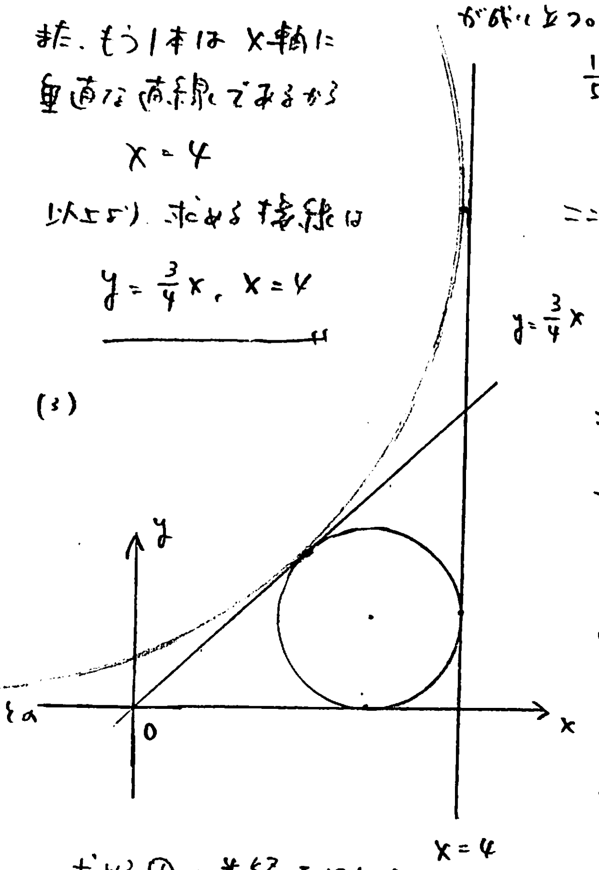
また、もう1本は x 軸に垂直な直線であるから

$x=4$

以上より求める接線は

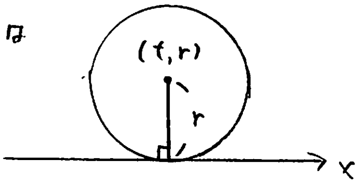
$y=\frac{3}{4}x,\ x=4$

(3)



求める円の半径を r とする。

すると、求める円は x 軸に接するので中心の y 座標は r となる。



よって求める円の中心は (t,r) とおける。

ただし条件より中心は第2象限なので $t<0$ である。

すると中心 (t,r) から2直線 $y=\frac{3}{4}x$, $x=4$ までの距離が等しいので

(t,r) から $y=\frac{3}{4}x$ までの距離 ($3x-4y=0$ として)

$$\frac{|3t-4r|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{5}|3t-4r|$$

(t,r) から $x=4$ までの距離 ($x-4=0$ として)

$$\frac{|t-4|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|t-4|$$

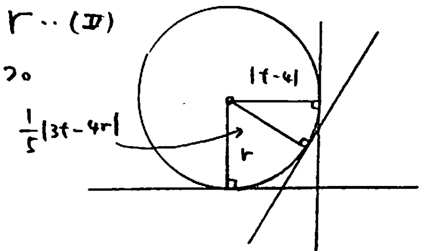
よって

$\frac{1}{5}|3t-4r|=|t-4| \cdots (\mathrm{I})$

ここで、これらの長さは半径に等しいので、

$|t-4|=r \cdots (\mathrm{II})$

が成り立つ。



ここで $t<0$ であるから、(II)より

$-(t-4)=r$

$-t+4=r$

これを(I)に代入して

$\frac{1}{5}|3t-4(-t+4)|=|t-4|$

$\frac{1}{5}|7t-16|=|t-4|$

ゆえに

$\frac{1}{5}(7t-16)=\pm(t-4)$

・$\frac{1}{5}(7t-16)=t-4$ の時

解いて

$7t-16=5t-20$

$\therefore t=-2$

($t<0$ を満たす)

・$\frac{1}{5}(7t-16)=-(t-4)$ の時

解いて

$7t-16=-5t+20$

$12t=36 \quad \therefore t=3$

($t<0$ を満たさず)

以上より $t=-2$

この時 $r=-(-2)+4=6$

$\therefore$ 中心 $(-2,6)$、半径6

円の方程式は

$(x+2)^2+(y-6)^2=36$

14

(1) A(3,0), B(0,1)で線分ABを1:2に内分する点がDであるから

$$D\left(\frac{2\cdot3+1\cdot0}{1+2},\ \frac{2\cdot0+1\cdot1}{1+2}\right)$$

よって

$$D\left(2,\ \frac{1}{3}\right)$$

また、直線CDの方程式は $C\left(0,-\frac{7}{3}\right)$, $D\left(2,\frac{1}{3}\right)$ より

$$y-\left(-\frac{7}{3}\right)=\frac{-\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}{0-2}(x-0)$$

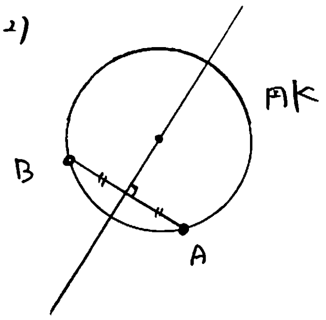
$$\therefore\ y+\frac{7}{3}=\frac{-\frac{8}{3}}{-2}x$$

$$\therefore\ y+\frac{7}{3}=\frac{4}{3}x$$

よって

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$$

(2)



2点A,Bを通る円の中心は線分ABの垂直二等分線上にある。A(3,0) B(0,1)より

ABの中点は

$$\left(\frac{3+0}{2},\ \frac{0+1}{2}\right)$$

よって $\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

また、線分ABの傾きは

$$\frac{0-1}{3-0}=-\frac{1}{3}$$

求める垂直二等分線は直線ABに垂直なので、傾きをmとすると

$$\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot m=-1$$

$$\therefore\ m=3$$

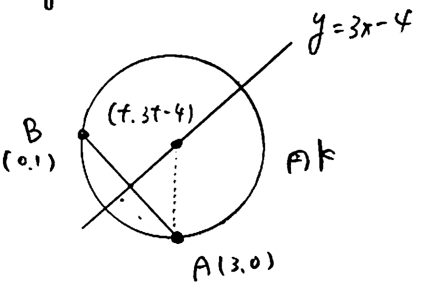
よって、ABの垂直二等分線は点 $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ を通り、傾き3の直線なので

$$y-\frac{1}{2}=3\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore\ y-\frac{1}{2}=3x-\frac{9}{2}$$

$$\therefore\ y=3x-4$$

以上より円の中心は直線 $y=3x-4$ 上にある。



条件から円の中心のx座標をtとするので、y座標は3t-4となる。

つまり中心の座標は(t,3t-4)

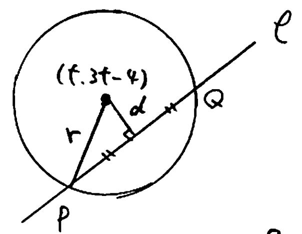
求める円の半径は、中心(t,3t-4)と点A(3,0)の距離に等しいので

$$\sqrt{(t-3)^2+\{(3t-4)-0\}^2}$$

$$=\sqrt{t^2-6t+9+9t^2-24t+16}$$

$$=\sqrt{10t^2-30t+25}$$

(3)



(1)より直線ℓ: $y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{3}$

よって $4x-3y-7=0$ である。

円Kの中心(t,3t-4)と直線ℓとの距離dは

$$d=\frac{|4t-3(3t-4)-7|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}$$

$$=\frac{|4t-9t+12-7|}{\sqrt{25}}$$

$$=\frac{1}{5}|-5t+5|=|-t+1|$$

また、円の半径rは(2)より

$r=\sqrt{10t^2-30t+25}$ であるから、

図の直角三角形において三平方の定理から

$$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2+d^2=r^2$$

$$\frac{1}{4}PQ^2+(-t+1)^2=10t^2-30t+25$$

$$\therefore\ PQ^2=4\{10t^2-30t+25-(t^2-2t+1)\}$$

$$=4(9t^2-28t+24)$$

$$=4\left\{9\left(t^2-\frac{28}{9}t\right)+24\right\}$$

$$=4\left\{9\left(t-\frac{14}{9}\right)^2-\frac{196}{9}+24\right\}$$

$$=36\left(t-\frac{14}{9}\right)^2+\frac{80}{9}$$

よってPQは $t=\frac{14}{9}$ で最小

この時、$3t-4=3\cdot\frac{14}{9}-4=\frac{2}{3}$

また半径は(2)より

$$\sqrt{10\left(\frac{14}{9}\right)^2-30\cdot\frac{14}{9}+25}=\sqrt{\frac{205}{81}}$$

$$\therefore\ \left(x-\frac{14}{9}\right)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{205}{81}$$

15

(1) 円①と直線の交点は連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=50 \\ 3x-y=10 \end{cases}$$

を解く。$y=3x-10$として上式に代入すると

$$x^2+(3x-10)^2=50$$

$$x^2+(9x^2-60x+100)=50$$

$$10x^2-60x+50=0$$

$$x^2-6x+5=0$$

$$(x-1)(x-5)=0 \quad \therefore x=1,5$$

$y=3x-10$に代入して

$x=1$のとき、$y=3-10=-7$

$x=5$のとき、$y=15-10=5$

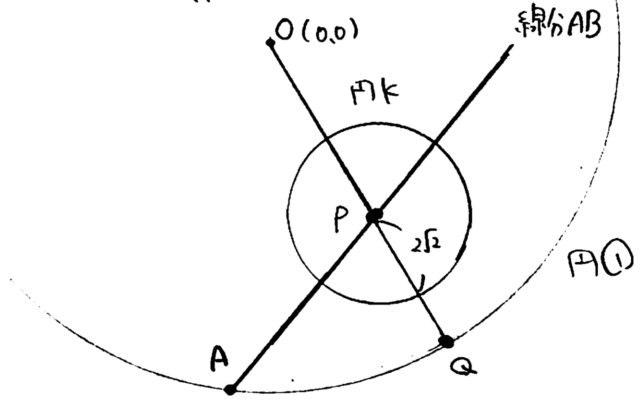
点Aのx座標は点Bのx座標より大きいので

$A(5,5)$, $B(1,-7)$ //

(2) 線分AB上に点Pがあり、点Pのx座標はtである。(1)よりA, Bは直線$3x-y=10$上の点であったから、直線ABは$3x-y=10$であり、また点PがAB上にあることから、点Pのx座標はtより、y座標は

$$y=3t-10$$

よって点Pの座標は$(t, 3t-10)$となる。



すると OPの長さは

$$OP=\sqrt{t^2+(3t-10)^2}$$

$$=\sqrt{t^2+(9t^2-60t+100)}$$

$$=\sqrt{10t^2-60t+100} \quad \cdots (*)$$

となる。円①の半径は$5\sqrt{2}$である。

ゆえに図より、OPを延長したものと円①の交点をQとすると、

円KがC(円①の周と内部)に含まれるには、円Kの半径が$2\sqrt{2}$より、

OP+(円Kの半径)≦(円①の半径)

つまり

$$OP+2\sqrt{2} \leqq 5\sqrt{2}$$

が成り立てばよい。

よって

$$OP \leqq 3\sqrt{2}$$

であり、(*)を代入して

$$\sqrt{10t^2-60t+100} \leqq 3\sqrt{2}$$

両辺とも正より2乗して

$$10t^2-60t+100 \leqq 18$$

$$10t^2-60t+82 \leqq 0$$

$$\therefore 5t^2-30t+41 \leqq 0 \quad \cdots (☆)$$

ここで2次方程式

$$5t^2-30t+41=0$$

を解くと

$$t=\frac{15\pm\sqrt{15^2-5\cdot 41}}{5}$$

$$=\frac{15\pm\sqrt{225-205}}{5}$$

$$=\frac{15\pm 2\sqrt{5}}{5}$$

ゆえに不等式(☆)の解は

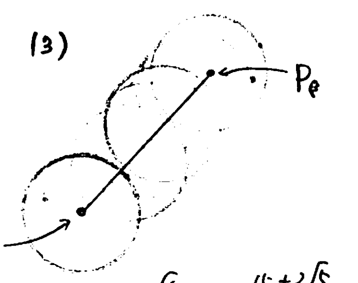
$$\frac{15-2\sqrt{5}}{5} \leqq t \leqq \frac{15+2\sqrt{5}}{5} \quad \cdots (☆☆)$$

となる。これは、点Aのx座標は1、点Bのx座標は5であるので

$1 \leqq t \leqq 5$が線分AB上に点Pが存在する範囲であるが、この$1 \leqq t \leqq 5$の中に(☆☆)の範囲は含まれる

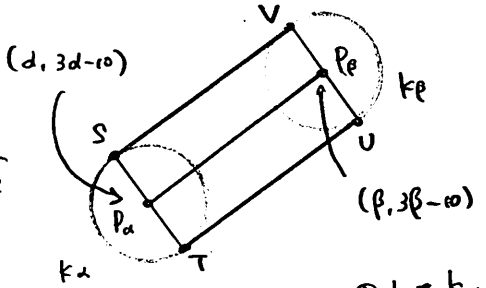
$$\therefore \frac{15-2\sqrt{5}}{5} \leqq t \leqq \frac{15+2\sqrt{5}}{5}$$ //

(3)



以下、$\alpha=\frac{15-2\sqrt{5}}{5}$, $\beta=\frac{15+2\sqrt{5}}{5}$とおく。

領域Dを下図のように分ける。



$t=\alpha$の時の点PをP_α、円KをK_α

$t=\beta$の時の点PをP_β、円KをK_β

とすると、領域Dは

(円K_αの半分)

+ 長方形STUV

+ (円K_βの半分)

となる。ここで、線分$P_\alpha P_\beta$の長さは

$$P_\alpha P_\beta=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(3\beta-10)-(3\alpha-10)\}^2}$$

$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(3\beta-3\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+9(\beta-\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{10(\beta-\alpha)^2}$$

$$=\sqrt{10\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=4\sqrt{2}$$

以上より、Dの面積は

$\frac{1}{2}\times\pi(2\sqrt{2})^2$ ←(円K_αの半分)

$+4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}$ ←(長方形)

$+\frac{1}{2}\times\pi(2\sqrt{2})^2$ ←(円K_β半分)

$=32+8\pi$ //

16

(1) A(5, 3), B(−3, 7)について

ABの中点の座標は

$$\left(\frac{5+(-3)}{2},\ \frac{3+7}{2}\right)$$

よって $(1,5)$ である。

また、線分ABの傾きは

$$\frac{3-7}{5-(-3)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

であり、ABの垂直二等分線 l の傾きを m とすると、l はABに垂直であるから、

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot m = -1$$

$$\therefore\ m = 2$$

以上より、l の方程式は点 $(1,5)$ を通り、傾き2であるから、

$$y-5 = 2(x-1)$$

$$\therefore\ y = 2x+3$$

(2)

円: $x^2+y^2+12ax+10ay+60a^2+a-2=0$

について平方完成すると

$$(x^2+12ax)+(y^2+10ay)+60a^2+a-2=0$$

$$(x+6a)^2-36a^2+(y+5a)^2-25a^2+60a^2+a-2=0$$

$$(x+6a)^2+(y+5a)^2 = a^2-a+2$$

よって中心 $(-6a, -5a)$ である。そして条件よりこの円は半径2であるから

$$a^2-a+2 = 2^2$$

$$\therefore\ a^2-a-2=0$$

$$(a-2)(a+1)=0$$

$$\therefore\ a = 2, -1$$

ここで条件より円の中心は第1象限より

中心 $(-6a, -5a)$ より

$$-6a>0 \text{ かつ } -5a>0$$

$\therefore\ a<0$ である。

よって $a=2,-1$ において $a<0$ を満たすものは $a=-1$

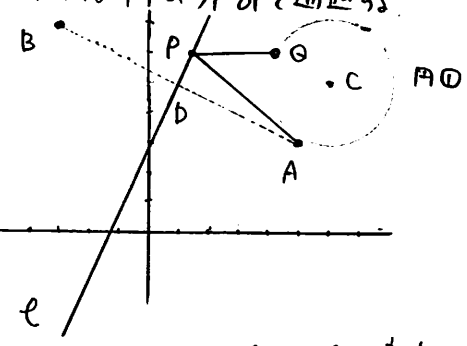
この時、中心Cは $C(6,5)$

(3) (1)において $l: y=2x+3$

ゆえに l と円①の中心 $C(6,5)$ との距離 d は、$l: 2x-y+3=0$ より

$$d = \frac{|2\cdot 6-5+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|12-5+3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

この d は半径2より大きいので、直線 l は円の外部を通過する

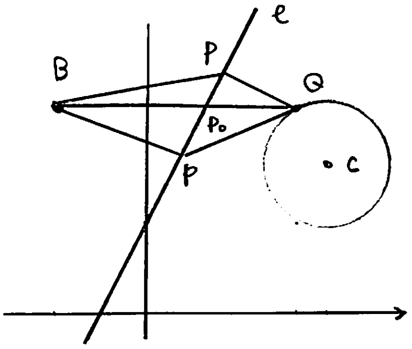


ここでABと l との交点をDとする。すると△PDAと△PDBは

$$\begin{cases} PD\text{共通} \\ AD=BD \\ \angle PDA=\angle PDB \end{cases}$$

より合同であるから、

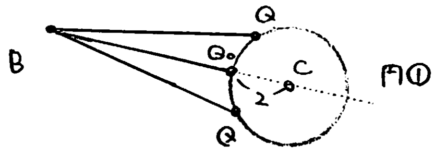
PA = PBが成り立つ。



よって $L=AP+PQ$ は $BP+PQ$ に等しい。Qを固定した時、$BP+PQ$ を最小にするような点Pは、図からも分かるように、B, P, Qが一直線上にある場合である。(図の P_0)

よって、点Qが円①上を動くとき、点PはB, P, Qが一直線上に並ぶようにとればよい。そして、その時の $L=BP+PQ$ の長さはBQに等しい。

よって点Qが円①上を動くとき、BQの長さが最小となるのは、図より



BCと円①の交点(図の Q_0)であればよい。

以上より、Lの最小値は BQ_0 であり、この BQ_0 はBCから半径2を除けばよい。

$B(-3,7)$, $C(6,5)$ より

$$BC = \sqrt{\{6-(-3)\}^2+(5-7)^2} = \sqrt{9^2+(-2)^2} = \sqrt{85}$$

ゆえにLの最小値は

$$L = BQ_0 = \sqrt{85}-2$$

この時点Pの座標は

BCと l との交点であるから

$$BC:\ y-5 = \frac{5-7}{6-(-3)}(x-6)$$

$$\therefore\ y-5 = -\frac{2}{9}(x-6)$$

$$\therefore\ y = -\frac{2}{9}x+\frac{19}{3}$$

ゆえに

$$\begin{cases} l:\ y=2x+3 \\ BC:\ y=-\frac{2}{9}x+\frac{19}{3} \end{cases}$$

連立して

$$2x+3 = -\frac{2}{9}x+\frac{19}{3}$$

$$\therefore\ x = \frac{3}{2}$$

この時、$y = 2\cdot\frac{3}{2}+3 = 6$

よって $P\left(\frac{3}{2}, 6\right)$

17

(1) A(4, 6), B(7, 0) より

直線ABの方程式は

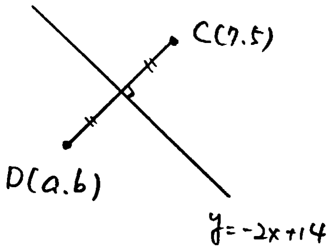
$$y - 0 = \frac{0-6}{7-4}(x-7)$$

$$\therefore\ y = -2(x-7)$$

よって $y = -2x + 14$

(2) (1)より AB: $y = -2x + 14$

また、点C(7, 5)である。



直線AB: $y = -2x + 14$ に関して点C(7, 5)と対称な点Dを D(a, b)とする。

(i) CDは $y = -2x + 14$ と垂直に交わる。

CDの傾きは $\dfrac{b-5}{a-7}$

$y = -2x + 14$ の傾きは -2

よって

$$\frac{b-5}{a-7} \times (-2) = -1$$

両辺に $a-7$ をかけて

$$-2(b-5) = -(a-7)$$

整理して

$$a - 2b = -3 \quad \cdots (i)$$

(ii) CDの中点は $y = -2x + 14$ の上にある。

CDの中点は $\left(\dfrac{a+7}{2}, \dfrac{b+5}{2}\right)$

この点が $y = -2x + 14$ 上にあるので

$$\frac{b+5}{2} = -2 \cdot \frac{a+7}{2} + 14$$

両辺に2をかけて

$$b + 5 = -2(a+7) + 28$$

整理して

$$2a + b = 9 \quad \cdots (ii)$$

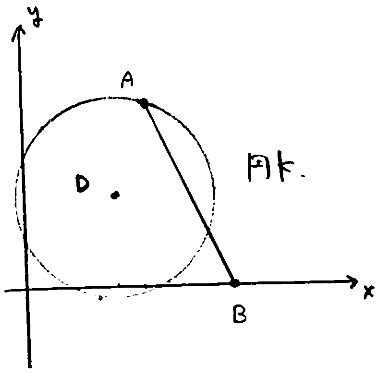
以上、(i)(ii)から

$$\begin{cases} a - 2b = -3 \\ 2a + b = 9 \end{cases}$$

解いて $a = 3,\ b = 3$

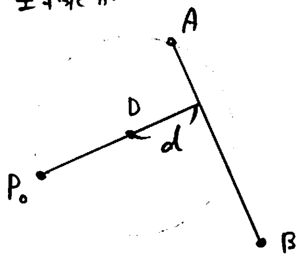
ゆえに D(3, 3)

(3)



線分ABを△ABPの底辺として考える時、点PからABに下ろした垂線の長さが最大となればよい。

それは図より点PからABに下ろした垂線が



円の中心Dを通ればよい。

そのような点Pを P_0 とする。

すると直線ABの方程式は

$y = -2x + 14$ より

$2x + y - 14 = 0$ として

点D(3, 3)と $2x + y - 14 = 0$ との距離dは

$$d = \frac{|2 \cdot 3 + 3 - 14|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{|6 + 3 - 14|}{\sqrt{4+1}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

また、P_0D の長さは、円の半径に等しく、それはDAの長さに等しい。

D(3, 3), A(4, 6) より

$$P_0D = DA$$

$$= \sqrt{(4-3)^2 + (6-3)^2}$$

$$= \sqrt{1^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{10}$$

よって、P_0 からABに下ろした垂線の長さは

$$P_0D + d = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$

また、底辺ABの長さは

$$AB = \sqrt{(7-4)^2 + (0-6)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 36}$$

$$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

以上より△ABPの面積の最大値は

$$\triangle ABP_0 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot AB$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{5}$$

$$= \frac{3}{2}(5\sqrt{2} + 5)$$

$$= \frac{15}{2}(\sqrt{2} + 1)$$

18

(1) A(4,1), B(0,4) において

直線 AB の方程式は

$$y-4=\frac{4-1}{0-4}(x-0)$$

∴

$$y-4=-\frac{3}{4}x$$

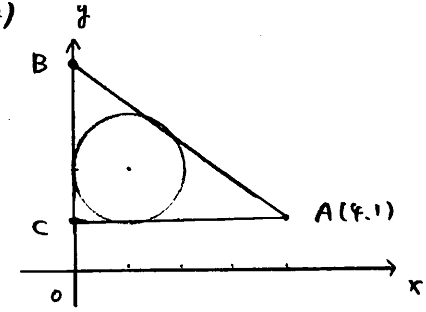
よって

$$y=-\frac{3}{4}x+4$$

ゆえに、直線 AB の下側の領域（境界を含む）を表す不等式は

$$y\leqq-\frac{3}{4}x+4$$

(2)

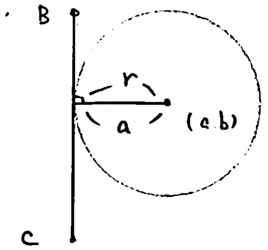


求める円の中心を (a,b) とする。

また、この円の半径を r とする。

この円は 辺 BC に接する。

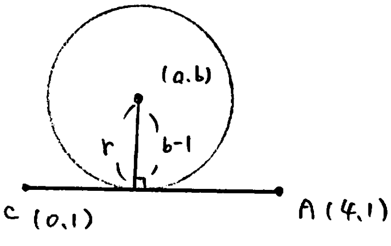
辺 BC は y 軸上にあるので、



中心から辺 BC までの長さ a が半径 r に等しい

∴ $a=r$ …(i)

同様に CA にも接するので

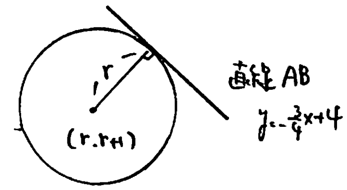


中心から辺 CA までの長さ b−1 が半径 r に等しい。∴ $r=b-1$

ゆえに $b=r+1$ …(ii)

(i)(ii) より 円の中心の座標 (a,b) は

$(a,b)=(r,r+1)$ とおける。



すると、中心 (r,r+1) と直線 AB $3x+4y-16=0$ との距離は

$$\frac{|3r+4(r+1)-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|7r-12|}{5}$$

となり、この長さは半径 r に等しいので

$$\frac{|7r-12|}{5}=r$$

∴ $|7r-12|=5r$

・$7r-12\geqq0$ の時 $(r\geqq\frac{12}{7})$

$7r-12=5r$ ∴ $r=6$

（これは $r\geqq\frac{12}{7}$ を満たす）

・$7r-12<0$ の時 $(r<\frac{12}{7})$

$-(7r-12)=5r$ ∴ $r=1$

（これは $r<\frac{12}{7}$ を満たす）

以上より

$r=6,1$

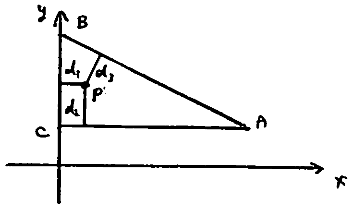
しかし、明らかに $r=1$ である。

よって、中心 $(a,b)=(1,2)$

求める円の方程式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1$$

(3) P(X,Y) とおく。



(2) と同様に考えると

$d_1=X$

$d_2=Y-1$

である。また、d_3 は点 P(X,Y) と直線 $3x+4y-16=0$ との距離より

$$d_3=\frac{|3X+4Y-16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}|3X+4Y-16|$$

ここで、点 P(X,Y) は直線 AB の下側に存在するので、(1) の結果より、不等式

$$Y\leqq-\frac{3}{4}X+4$$

を満たす。両辺を 4 倍して

$$4Y\leqq-3X+16$$

∴ $3X+4Y-16\leqq0$

ゆえに d_3 の絶対値記号の中身は負より

$$d_3=-\frac{1}{5}(3X+4Y-16)$$ となる。

以上より

$$L=d_1+d_2+d_3$$
$$=X+(Y-1)-\frac{1}{5}(3X+4Y-16)$$
$$=\frac{1}{5}(2X+Y+11)$$

となる。また、点 P(X,Y) は (2) の円上の点より

$$(X-1)^2+(Y-2)^2=1$$

が成り立つ。ここで、L のとりうる値の範囲を求める。そこで、以下のように考える。なぜ L に範囲が存在するかというと 2つの式

$$\begin{cases}L=\frac{1}{5}(2X+Y+11)\ \cdots\text{①}\\(X-1)^2+(Y-2)^2=1\ \cdots\text{②}\end{cases}$$

を満たす X と Y が L の値によって存在するかどうか変わってくるからである。①より Y について解いて

$5L=2X+Y+11$ ∴ $Y=5L-2X-11$

として、② に代入すると

$$(X-1)^2+\{(5L-2X-11)-2\}^2=1$$

となる。これは X の 2次方程式である。

この 2次方程式を満たす X が存在する

⇔ この 2次方程式が実数解を持つ

⇔ 判別式 $D\geqq0$

よって、2次方程式を展開し、整理すると

$$(X^2-2X+1)+(25L^2+4X^2+169-20LX+52X-130L)=1$$

∴ $5X^2-10(2L-5)X+(25L^2-130L+169)=0$

よって

$$D/4=25(2L-5)^2-5(25L^2-130L+169)$$
$$=5\{5(4L^2-20L+25)-(25L^2-130L+169)\}$$
$$=5(-5L^2+30L-44)\geqq0$$

∴ $5L^2-30L+44\leqq0$

$$L=\frac{15\pm\sqrt{15^2-5\cdot44}}{5}=\frac{15\pm\sqrt{5}}{5}$$

∴ $$\frac{15-\sqrt{5}}{5}\leqq L\leqq\frac{15+\sqrt{5}}{5}$$

19

(1)

$x^2+y^2-4x-5y+4=0$

平方完成して

$(x^2-4x)+(y^2-5y)+4=0$

$(x-2)^2-4+(y-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+4=0$

$(x-2)^2+(y-\frac{5}{2})^2=\frac{25}{4}$

よって円Cの中心$(2,\frac{5}{2})$

半径$\frac{5}{2}$

(2) A(4,4)より、

直線OAの方程式は

$y=\frac{4}{4}x$

∴

$y=x$

よって円Cと直線OAを連立すると

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-5y+4=0 & \cdots ① \\ y=x & \cdots ② \end{cases}$$

②を①に代入すると

$x^2+x^2-4x-5x+4=0$

$2x^2-9x+4=0$

$(x-4)(2x-1)=0$

∴ $x=4,\ \frac{1}{2}$

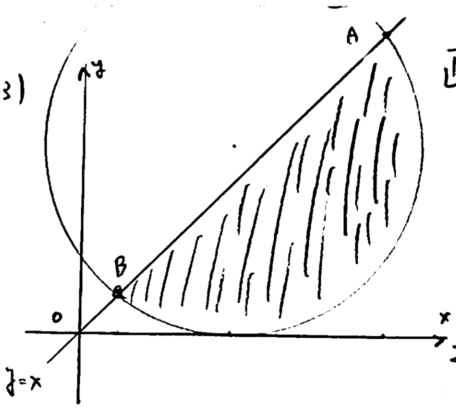
よって②に代入すると

$(4,4),\ (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

ここで、A(4,4)以外の共有点Bを求めているので

$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

(3)



$y-2x=k$とおく

すると$y=2x+k$となり

これは傾き2、y切片kの直線を表す。今、点P(x,y)は領域D内に存在するので、直線$y=2x+k$は領域内を通過する。

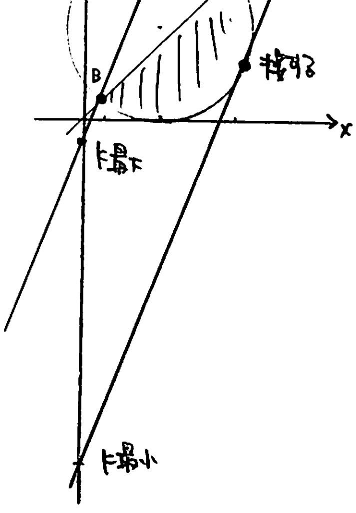
つまり、直線$y=2x+k$が領域内の点と共有点を持って動く時、y切片kの最大・最小を考える。

(一番高い所と低い所を通る直線を考える)

今、直線ABの傾きは1であるので、図から、直線$y=2x+k$が

- 点Bを通る時、k最大
- 弧ABに接する時、k最小

となる。



直線$y=2x+k$が点$B(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$を通る時、代入すると

$\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}+k$ ∴ $k=-\frac{1}{2}$

よって最大値 $-\frac{1}{2}$

そして、直線$y=2x+k$と円Cが接する時、中心$(2,\frac{5}{2})$と直線$2x-y+k=0$との距離dが半径$r=\frac{5}{2}$に等しいので

$$d=\frac{|2\cdot2-\frac{5}{2}+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|4-\frac{5}{2}+k|}{\sqrt{5}}=\frac{|\frac{3}{2}+k|}{\sqrt{5}}$$

よって$d=r$より

$\frac{|\frac{3}{2}+k|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{2}$

$|\frac{3}{2}+k|=\frac{5}{2}\sqrt{5}$

∴ $\frac{3}{2}+k=\pm\frac{5}{2}\sqrt{5}$

$k=-\frac{3}{2}\pm\frac{5}{2}\sqrt{5}$

図より、最小となるのは$k=-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{5}$の時であり、これがkの最小値である。

以上より $y-2x$の

最大値 $-\frac{1}{2}$,

最小値 $-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\sqrt{5}$

20

(1) $x^2+y^2-2\sqrt{3}x+2=0$

平方完成して

$(x^2-2\sqrt{3}x)+y^2+2=0$

$(x-\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2+y^2+2=0$

$(x-\sqrt{3})^2+y^2=1$

よって 円Cの中心 $(\sqrt{3}, 0)$

半径は 1

(2) $A(0, a)$ と P を 1:2 に内分する点が Q である。ここで P は円C上の点なので $P(s, t)$ とおくと

$(s-\sqrt{3})^2+t^2=1$ …①

が成り立つ。また $A(0, a)$ と $P(s, t)$ を 1:2 に内分する点は

$\left(\dfrac{2\cdot 0+1\cdot s}{1+2}, \dfrac{2\cdot a+1\cdot t}{1+2}\right)$

つまり

$\left(\dfrac{s}{3}, \dfrac{2a+t}{3}\right)$

であり、これが点Qである。ゆえに点Qの座標を (x, y) とおくと

$(x, y)=\left(\dfrac{s}{3}, \dfrac{2a+t}{3}\right)$

よって

$x=\dfrac{s}{3}$, $y=\dfrac{2a+t}{3}$

が成り立つ。

$x=\dfrac{s}{3}$ について $s=3x$ …②

と変形し、また

$y=\dfrac{2a+t}{3}$ について $3y=2a+t$

$\therefore t=3y-2a$ …③

と変形する。

よって ②, ③ を ① に代入すると

$(3x-\sqrt{3})^2+(3y-2a)^2=1$

変形すると

$\left\{3\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2+\left\{3\left(y-\dfrac{2}{3}a\right)\right\}^2=1$

$9\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+9\left(y-\dfrac{2}{3}a\right)^2=1$

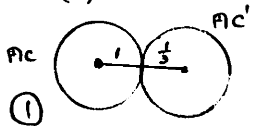
両辺9で割って

$\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{2}{3}a\right)^2=\dfrac{1}{9}$

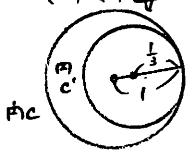
これが点Qの軌跡の方程式である。そして、これが円C′である。

また、円Cと円C′が共有点を1つだけ持つのは、次の2通りである。

(I) 外接



(II) 内接



2つの円の中心間距離は

$(\sqrt{3}, 0)$ と $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}a\right)$ より

$\sqrt{\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(0-\dfrac{2}{3}a\right)^2}$

$=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}a\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}a^2}$

(I) 外接

$\sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}a^2}=1+\dfrac{1}{3}$

両辺2乗して

$\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}a^2=\dfrac{16}{9}$

$\therefore a^2=1$

$a>0$ より $a=1$

(II) 内接

$\sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}a^2}+\dfrac{1}{3}=1$

$\sqrt{\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}a^2}=\dfrac{2}{3}$

両辺2乗して

$\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{9}a^2=\dfrac{4}{9}$

$\dfrac{4}{9}a^2=-\dfrac{8}{9}$

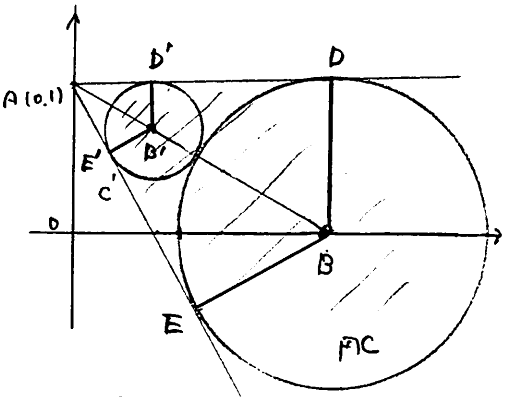
このような a はない。

つまり $a=1$

(3) (2)より $a=1$

よって 円Cは中心 $(\sqrt{3}, 0)$、半径1

円C′は中心 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ 半径 $\dfrac{1}{3}$



求める領域Dは上図の斜線部分

円Cの中心を $B(\sqrt{3}, 0)$、

円C′の中心を $B'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

また、図のように、点 D, E, D′, E′ を定める。すると $OB=\sqrt{3}$, $OA=1$ より △OAB は $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形

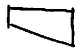
よって $\angle OBA=30°$ より $\angle DBA=60°$

ゆえに、$\angle EBA=60°$

したがって、$\angle D'B'E'=\angle DBE=120°$

以上より、領域Dの面積は、

(扇形 D′B′E′)

+ (台形 BB′D′D) 

+ (台形 BB′E′E)

+ (扇形 DBE)

で求められる。

(扇形 D′B′E′) は、円C′の半径が $\dfrac{1}{3}$、中心角 120°

よって $\pi\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{120°}{360°}=\pi\cdot\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}\pi$

(台形 BB′D′D) は B′D′ が円C′の半径より $\dfrac{1}{3}$

BD は円Cの半径より 1、そして D′D は x座標の差より $\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$、ゆえに

$\dfrac{1}{2}(B'D'+BD)\cdot D'D=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+1\right)\cdot\dfrac{2}{3}\sqrt{3}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$

(台形 BB′E′E) も (台形 BB′D′D) と同じで $\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$

(扇形 DBE) は、円Cの半径が 1、中心角 240°

よって $\pi\cdot 1^2\cdot\dfrac{240°}{360°}=\pi\cdot 1\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$

以上より

$\dfrac{1}{27}\pi+\dfrac{4}{9}\sqrt{3}+\dfrac{4}{9}\sqrt{3}+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{8}{9}\sqrt{3}+\dfrac{19}{27}\pi$

21

(1)

$x^2+y^2-4x+6y-7=0$

平方完成して

$(x^2-4x)+(y^2+6y)-7=0$

$(x-2)^2-4+(y+3)^2-9-7=0$

$(x-2)^2+(y+3)^2=20$

円Cの中心 $(2,-3)$

半径 $2\sqrt{5}$

(2)

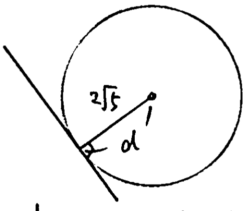
2点A, Bを通る直線の傾きは

$A(-6, 0)$, $B(0, -12)$ より

$\frac{0-(-12)}{-6-0} = \frac{12}{-6} = -2$

よって求める直線の傾きは -2 であるから $y=-2x+k$ とおく。

この $y=-2x+k$ が円Cに接するので、円Cの中心 $(2,-3)$ と直線 $y=-2x+k$ の距離 d が半径 $r=2\sqrt{5}$ に等しい。



$y=-2x+k$ を $2x+y-k=0$ として点 $(2,-3)$ との距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot 2+(-3)-k|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|4-3-k|}{\sqrt{5}} = \frac{|1-k|}{\sqrt{5}}$$

よって $d=r$ より

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

両辺を $\sqrt{5}$ 倍して

$|1-k|=10$

$\therefore\ 1-k=\pm 10$

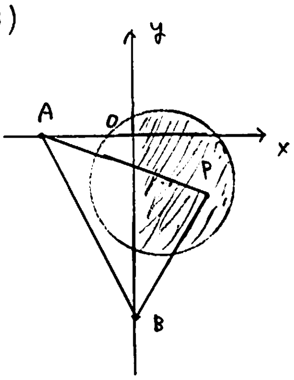
よって $k=11, -9$

以上より求める直線は

$y=-2x+11$

$y=-2x-9$

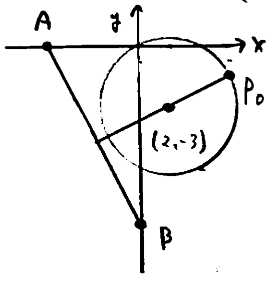
(3)



連立不等式の表す領域は上図の斜線部分である。

△ABPについて、点PからABに下ろした垂線の長さを d とすると d が最大となる点Pと最小となる点Pの座標を求める。

最大となるのは点Pが円周上の点で、点Pから下ろした垂線が円の中心を通る時である。(下図の P_0)



ABの傾きは -2 であるから、ABに垂直な直線の傾きを m とすると

$(-2)\cdot m=-1 \quad \therefore\ m=\frac{1}{2}$

この直線は円の中心 $(2,-3)$ を通るので、

$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore\ y=\frac{1}{2}x-4$

この $y=\frac{1}{2}x-4$ と円 $(x-2)^2+(y+3)^2=20$ との交点は、連立すると

$(x-2)^2+\{(\frac{1}{2}x-4)+3\}^2=20$

$(x-2)^2+(\frac{1}{2}x-1)^2=20$

$x^2-4x+4+\frac{1}{4}x^2-x+1-20=0$

$\frac{5}{4}x^2-5x-15=0$

$\therefore\ x^2-4x-12=0$

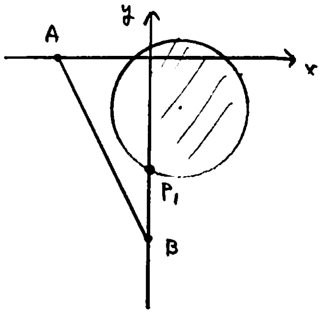
$(x-6)(x+2)=0 \quad \therefore\ x=6, -2$

P_0 は図より明らかに $x=6$.

この時 $y=\frac{1}{2}\cdot 6-4=-1$

$\therefore\ P_0(6, -1)$

最小となるのは、図の P_1 である。



円とy軸との交点は、円の方程式に $x=0$ を代入して

$(0-2)^2+(y+3)^2=20$

$4+(y+3)^2=20$

$\therefore\ (y+3)^2=16$

$y+3=\pm 4 \quad \therefore\ y=1, -7$

P_1 は図より明らかに $y=-7$

よって $P_1(0, -7)$

以上より△ABPの面積が最大となるのは $(6, -1)$

最小となるのは $(0, -7)$

22

(1) 原点Oを中心とし点Aを通るので
この円Kの半径はOAである。

∴ $OA=\sqrt{3^2+1^2}$

$=\sqrt{10}$

よって求める円Kは中心が(0,0)
半径$\sqrt{10}$より

$x^2+y^2=10$

また、点A(3,1)における円K: $x^2+y^2=10$
の接線は公式より

$3x+1\cdot y=10$

∴ $3x+y=10$

(2) 直線OAの方程式は

$y=\frac{1}{3}x$

よって傾きは$\frac{1}{3}$である。

ゆえに、点B(1,2)を通り
傾き$\frac{1}{3}$の直線の方程式は

$y-2=\frac{1}{3}(x-1)$

∴ $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$

(1)より接線ℓの方程式は

$3x+y=10$

より連立して

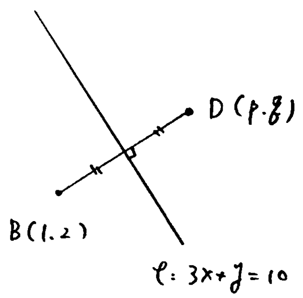
$$\begin{cases}3x+y=10\\ y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}\end{cases}$$

解くと

$x=\frac{5}{2},\ y=\frac{5}{2}$

∴ $C\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right)$

また、ℓ: $3x+y=10$に関して
点B(1,2)と対称な点Dについて
D(p,q)とおくと



[1] BDはℓと垂直
[2] BDの中点はℓ上にある。
が成り立つ。

[1]について

BDの傾きは $\frac{q-2}{p-1}$

ℓの傾きは $y=-3x+10$より-3

∴ $\frac{q-2}{p-1}\times(-3)=-1$

両辺に$p-1$をかけて

$-3(q-2)=-(p-1)$

整理して

$p-3q=-5$ …[1]

[2]について

BDの中点 $\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+2}{2}\right)$ は
ℓ: $3x+y=10$ 上にあるので
代入して

$3\cdot\frac{p+1}{2}+\frac{q+2}{2}=10$

整理して

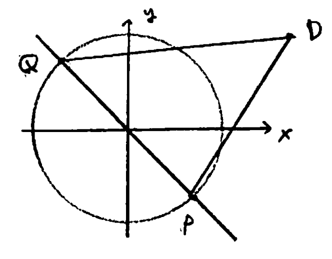
$3p+q=15$ …[2]

[1][2]を連立して

$p=4,\ q=3$

∴ D(4,3)

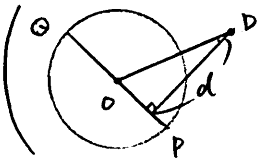
(3)



原点は円の中心であるので、
原点を通る直線mと円Kの
交点をP,Qとすると、
線分PQは円Kの直径となる。
よって円Kの半径は$\sqrt{10}$より

$PQ=2\sqrt{10}$

で一定である。ここで点DからPQに
下ろした垂線の長さをdとするとき、
△DPQの面積が最大となるのは、
dが最大となる時である。
それは、d=ODとなる時である。



(OD⊥PQとならない時
図から分かるように
dよりも必ずODの方が
長くなってしまう)

ここで、D(4,3)より $OD=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

∴ △DPQの面積Sの最大値は

$S=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot d$

$=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot OD$

$=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot 5=5\sqrt{10}$

この時、PQ⊥ODである。

ODの傾きは$\frac{3}{4}$より、PQの傾きは$-\frac{4}{3}$

ゆえに直線PQの方程式は原点を
通るので $y=-\frac{4}{3}x$

よって、点Pの座標は、円Kの方程式
と直線PQの方程式を連立して

$$\begin{cases}x^2+y^2=10\\ y=-\frac{4}{3}x\end{cases}$$

代入して

$x^2+\left(-\frac{4}{3}x\right)^2=10$

∴ $\frac{25}{9}x^2=10$ ∴ $x^2=\frac{18}{5}$

ここで点Pのx座標は正より $x=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$y=-\frac{4}{3}x=-\frac{4}{3}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{5}=-\frac{4\sqrt{10}}{5}$

よって Sが最大となる時の点Pの座標は

$\left(\frac{3\sqrt{10}}{5},-\frac{4\sqrt{10}}{5}\right)$

23

(1) $x^2+y^2-2x+5-a=0$

平方完成して

$(x^2-2x)+y^2+5-a=0$

$(x-1)^2-1+y^2+5-a=0$

∴ $(x-1)^2+y^2=a-4$

ゆえに 中心 $C(1,0)$

また半径は $\sqrt{a-4}$

となるが、根号内は正でなければならないので

$a-4>0$

∴ $a>4$

(2) 円①: $(x-1)^2+y^2=a-4$

について、円①の周上、または内部を表す不等式は

$(x-1)^2+y^2\leqq a-4$ …(i)

である。今、条件より点 $A(1,1)$ はその領域内にいるので、

(i)において $(x,y)=(1,1)$ は不等式を満たしている。

ゆえに代入すると

$(1-1)^2+1^2\leqq a-4$

$1\leqq a-4$

∴ $a\geqq 5$ …(*)

同様に、円①の外部を表す不等式は

$(x-1)^2+y^2>a-4$ …(ii)

である。条件より点 $B(3,0)$ は円①の外部にいるので、

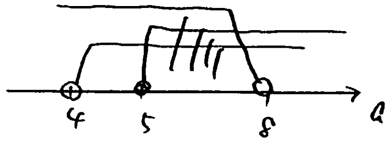
$(x,y)=(3,0)$ を(ii)に代入して

$(3-1)^2+0^2>a-4$

∴ $4>a-4$

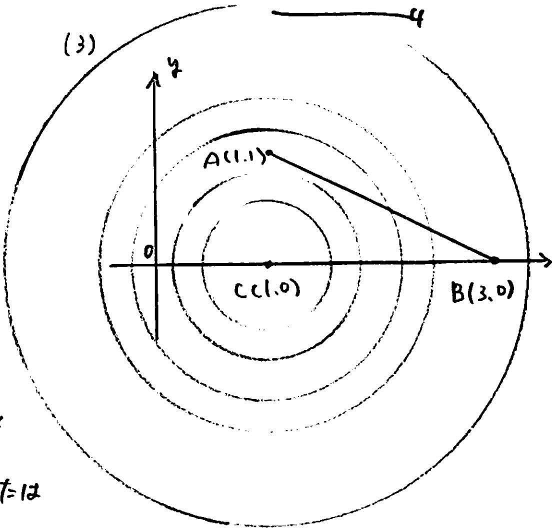
∴ $a<8$ …(**)

ゆえに、(1)の $a>4$ と (*)(**) の共通範囲より



∴ $5\leqq a<8$

(3)

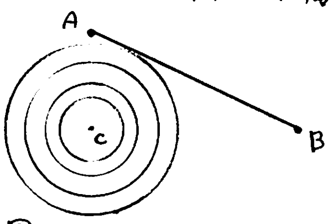


(1)より円①は中心 $C(1,0)$ 半径 $\sqrt{a-4}$ の円を表す。

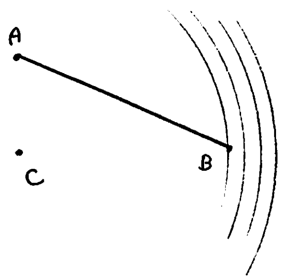
また、$a>4$ である。

a の値がだんだんと大きくなっていくと、円①の半径が大きくなっていく。上図のようになる時円①が線分 AB と共有点を持たないのは

[I] 円の半径が線分ABに接するまで



[II] 円の半径がCBより長くなった時



[I]の時.

直線ABの方程式は

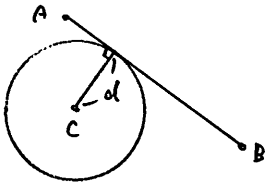
$y-1=\frac{0-1}{3-1}(x-1)$

∴ $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$

整理して

$x+2y-3=0$

よって、点 $C(1,0)$ と直線ABとの距離 d は



$d=\frac{|1\cdot1+2\cdot0-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$=\frac{|1-3|}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

よって[I]の場合における a の値の範囲は

$\sqrt{a-4}<\frac{2}{\sqrt{5}}$

両辺正より2乗して

$a-4<\frac{4}{5}$ ∴ $a<\frac{24}{5}$

ここで $a>4$ より共通範囲より

$4<a<\frac{24}{5}$

[II]の時.

$C(1,0)$, $B(3,0)$ より $CB=2$

よって

$\sqrt{a-4}>2$

両辺正より2乗して

$a-4>4$

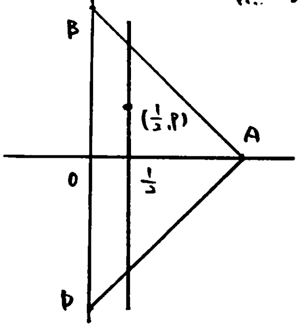
∴ $a>8$

以上、[I][II]より

$4<a<\frac{24}{5},\ a>8$

24

(1) 点 $(\frac{1}{2}, p)$ が領域Sに属する時、pの値の範囲を考える。ここで点 $(\frac{1}{2}, p)$ は直線 $x=\frac{1}{2}$ 上の点なので、



直線ABの方程式は
$A(2,0)$ $B(0,2)$ より

$$y-2=\frac{2-0}{0-2}(x-0)$$

∴ $y=-x+2$

よって $x=\frac{1}{2}$ との交点は

$$y=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$$

より $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

同じく、直線DAの方程式は
$D(0,-2)$, $A(2,0)$ より

$$y-(-2)=\frac{0-(-2)}{2-0}(x-0)$$

∴ $y=x-2$

よって $x=\frac{1}{2}$ との交点は

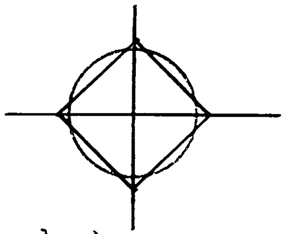
$$y=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

より $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

ゆえに、点 $(\frac{1}{2}, p)$ は直線 $x=\frac{1}{2}$ 上の点 $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ から点 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ まで動くので、

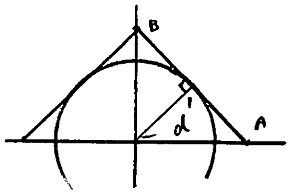
$$-\frac{3}{2}\leqq p\leqq\frac{3}{2}$$

(2) 正方形の対角線の交点と円の中心はともに原点であるので第1象限、第2象限、第3象限、第4象限はどれも対称である。



円 $x^2+y^2=r^2$ において半径は r である。

r のとりうる値の範囲について考えると、円が正方形に内接する時、半径 r は最小

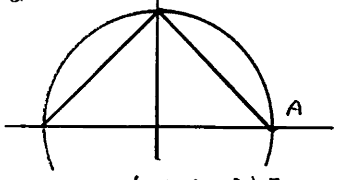


この時、円の半径 r は中心 $(0,0)$ と直線 $AB: x+y-2=0$ との距離に等しいので、

$$r=\frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

一方で、半径 r の最大は、円が正方形に外接する時である。

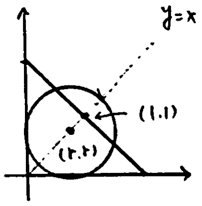


それは、円が点 $A(2,0)$ を通る時より半径 r はOAに等しく $r=2$

以上より、r のとりうる値の範囲は

$$\sqrt{2}\leqq r\leqq 2$$

(3) 円 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ について、中心は (r,r) 半径は r である。よって中心は直線 $y=x$ 上に存在する。ここで $y=x$ と直線ABの交点は $y=-x+2$ と $y=x$ を連立して、$(1,1)$ である。

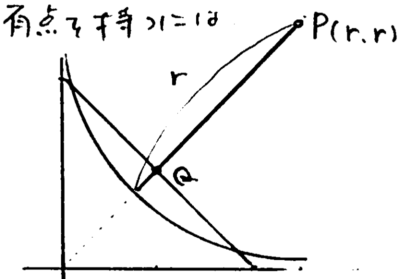


つまり中心 (r,r) が $y=x$ 上の $(0,0)$ から $(1,1)$ の間にいる時は、中心が正方形の中に存在するので領域SとTは必ず共有点を持つ

∴ $0<r\leqq 1$ …. (I)

非、$r>1$ の時

円の中心 (r,r) を P とする。また点 $(1,1)$ をQとすると、円の内部の領域Tが正方形の周と内部の領域Sと共有点を持つには



$PQ\leqq$ (半径 r) であればよい。

ここで、$P(r,r)$, $Q(1,1)$ より

$$PQ=\sqrt{(r-1)^2+(r-1)^2}$$

$$=\sqrt{2(r-1)^2}=\sqrt{2}|r-1|$$

今、$r>1$ より、絶対値の中身は正

∴ $PQ=\sqrt{2}(r-1)$

よって $PQ\leqq r$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}(r-1)\leqq r$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}r-\sqrt{2}\leqq r$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}r-r\leqq\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}-1)r\leqq\sqrt{2}$

両辺 $(\sqrt{2}-1)$ で割る。$\sqrt{2}-1$ は正より不等号の向きは変わらず

$$r\leqq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2-1}=2+\sqrt{2}$$

$r>1$ との共通範囲より

$1<r\leqq 2+\sqrt{2}$ … (II)

以上より、(I)(II)をあわせて

$$0<r\leqq 2+\sqrt{2}$$

25

(1)

$C_1: x^2+y^2-20x-10y+80=0$

平方完成して

$(x^2-20x)+(y^2-10y)+80=0$

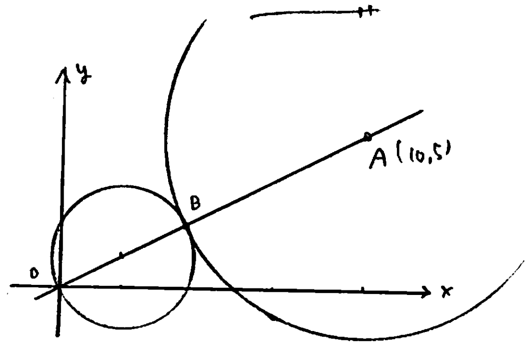
$(x-10)^2-100+(y-5)^2-25+80=0$

$(x-10)^2+(y-5)^2=45$

よって 円C_1の中心 $A(10,5)$

また半径 $r=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

(2)



$O(0,0)$, $A(10,5)$より、直線OAの方程式は $y=\frac{5}{10}x$ より $y=\frac{1}{2}x$

ゆえに、連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2-20x-10y+80=0 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

を解く。$y=\frac{1}{2}x$ を C_1に代入すると

$x^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2-20x-10\cdot\frac{1}{2}x+80=0$

$x^2+\frac{1}{4}x^2-20x-5x+80=0$

$\frac{5}{4}x^2-25x+80=0$

$\therefore \frac{1}{4}x^2-5x+16=0$

$x^2-20x+64=0$

$(x-4)(x-16)=0$

$\therefore x=4, 16$

点Bは線分OA上なので

$x=4$. この時 $y=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

$\therefore B(4,2)$

求める円C_2は点Bで円C_1に外接するので、

円C_2の中心は直線AB上に存在する。

直線ABとは直線OAに等しく、

また、円C_2は原点も通るので、

結局、円C_2は線分OBを直径とする円である。ゆえに、円C_2の中心はOBの中点であるから、

$O(0,0)$, $B(4,2)$より

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$

$\therefore$ 中心$(2,1)$である。

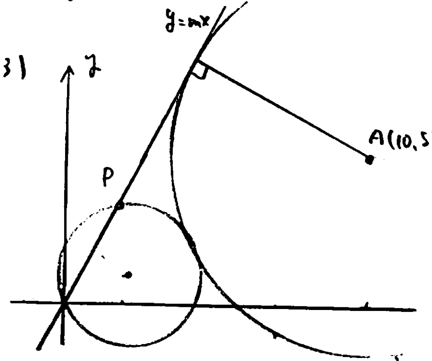
また、半径は、原点Oと$(2,1)$との距離に等しく

$\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$

以上より、円C_2は中心$(2,1)$で半径$\sqrt{5}$なので、方程式は

$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

(3)



求める直線を $y=mx$ $(m>0)$ とおく。円C_1に接するので、円C_1の中心$(10,5)$と直線$y=mx$との距離dが半径$r=3\sqrt{5}$に等しい。

$$d=\frac{|m\cdot 10-5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{|10m-5|}{\sqrt{m^2+1}}$$

よって $d=r$ より

$$\frac{|10m-5|}{\sqrt{m^2+1}}=3\sqrt{5}$$

両辺2乗して

$$\frac{(10m-5)^2}{m^2+1}=45$$

$(10m-5)^2=45(m^2+1)$

$5^2(2m-1)^2=45(m^2+1)$

$\therefore 5(4m^2-4m+1)=9(m^2+1)$

整理して

$11m^2-20m-4=0$

$(11m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=-\frac{2}{11}, 2$

$m>0$より $m=2$

よって $\ell: y=2x$

また $\ell: y=2x$ と C_2との交点は

$$\begin{cases} y=2x \\ (x-2)^2+(y-1)^2=5 \end{cases}$$

を解くと

$(x-2)^2+(2x-1)^2=5$

整理して

$5x^2-8x=0$

$x(5x-8)=0$ $\therefore x=0, \frac{8}{5}$

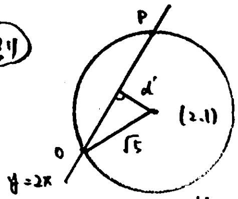
$\therefore x=\frac{8}{5}$の時 $y=2\cdot\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$

よって

$OP=\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{16}{5}\right)^2}$

$=\frac{8}{5}\sqrt{1^2+2^2}=\frac{8}{5}\sqrt{5}$

(別)



C_2の中心$(2,1)$と$y=2x$の距離d'は

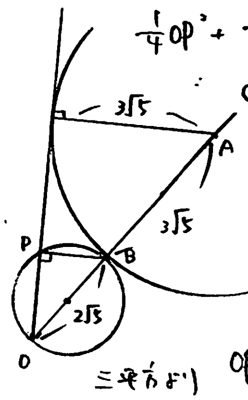
$$d'=\frac{|2\cdot 2-1\cdot 1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$$

三平方の定理より

$\left(\frac{OP}{2}\right)^2+d'^2=(\sqrt{5})^2$

$\frac{1}{4}OP^2+\frac{9}{5}=5$

$\therefore OP^2=\frac{64}{5}$ $\therefore OP=\frac{8}{\sqrt{5}}$



(おまけ) 比で求められる。

$2\sqrt{5}:BP=5\sqrt{5}:3\sqrt{5}$

$\therefore BP=\frac{6}{5}\sqrt{5}$

三平方より $OP^2+\left(\frac{6}{5}\sqrt{5}\right)^2=(2\sqrt{5})^2$

$\therefore OP=\frac{8}{5}\sqrt{5}$

26

(1) 円C: $x^2+y^2-10x-4y+a=0$

は点$(8,1)$を通るので、

代入すると

$8^2+1^2-10\cdot 8-4\cdot 1+a=0$

$64+1-80-4+a=0$

$\therefore\ a=19$ //

また この時 平方完成すると

$x^2+y^2-10x-4y+19=0$

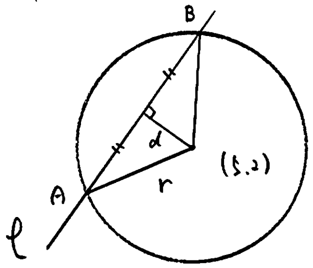
$(x^2-10x)+(y^2-4y)+19=0$

$(x-5)^2-25+(y-2)^2-4+19=0$

$(x-5)^2+(y-2)^2=10$

よって円Cは 中心$(5,2)$、半径$\sqrt{10}$ //

(2)



円Cの中心$(5,2)$と直線$\ell: y=mx+1$との

距離をdとする。すると

$\ell: mx-y+1=0$ として

$$d=\frac{|m\cdot 5-2+1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{|5m-2+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|5m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

となる。すると図より三平方の定理から

$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2+d^2=r^2$$

が成り立つ。条件より $AB=2\sqrt{2}$ であり

また 半径 $r=\sqrt{10}$ なので 代入して

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{|5m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2=(\sqrt{10})^2$$

$$2+\frac{(5m-1)^2}{m^2+1}=10$$

$$\frac{(5m-1)^2}{m^2+1}=8$$

分母払って

$(5m-1)^2=8(m^2+1)$

$25m^2-10m+1=8m^2+8$

$17m^2-10m-7=0$

$(17m+7)(m-1)=0$

$\therefore\ m=-\frac{7}{17},\ 1$

ここで $m>0$ より $m=1$ //

(3) (2)より $m=1$である。

よって $\ell: y=x+1$ となる。

今、円C: $x^2+y^2-10x-4y+19=0$

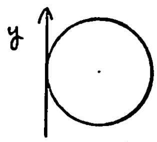
と直線$\ell: x-y+1=0$

の交点を通る円を考えているので、

その円は

$x^2+y^2-10x-4y+19+k(x-y+1)=0$ …(*)

とおける。この円(*)はy軸に接する。



(*)に $x=0$ を代入して、y軸との

交点の座標を求めるには

$0^2+y^2-10\cdot 0-4y+19+k(0-y+1)=0$

$\therefore\ y^2-4y+19-ky+k=0$

$y^2-(4+k)y+(19+k)=0$ …(**)

というyの2次方程式を解けばよい。

しかし、y軸に接しているので、方程式(**)

は解を1つしか持たない。(つまり重解を持つ)

よって(**)の判別式Dは0になる。

$\therefore\ D=(4+k)^2-4\cdot 1\cdot(19+k)$

$=k^2+8k+16-76-4k$

$=k^2+4k-60$

より

$D=0$

$\Leftrightarrow k^2+4k-60=0$

$\Leftrightarrow (k+10)(k-6)=0$

$\therefore\ k=-10,\ 6$

・$k=-10$の時 (*)に代入して

$x^2+y^2-10x-4y+19-10(x-y+1)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-20x+6y+9=0$

・$k=6$の時 (*)に代入して

$x^2+y^2-10x-4y+19+6(x-y+1)=0$

$\therefore\ x^2+y^2-4x-10y+25=0$

以上より

$x^2+y^2-20x+6y+9=0$

$x^2+y^2-4x-10y+25=0$ //

27

(1) $x^2+y^2-2ax-2(3a-2)y+9a^2-12a+4=0$

$a=3$を代入すると

$x^2+y^2-6x-2(9-2)y+9\cdot3^2-12\cdot3+4=0$

∴

$x^2+y^2-6x-14y+81-36+4=0$

$x^2+y^2-6x-14y+49=0$

平方完成すると

$(x^2-6x)+(y^2-14y)+49=0$

$(x-3)^2-9+(y-7)^2-49+49=0$

∴

$(x-3)^2+(y-7)^2=9$

ゆえに $a=3$ の時の円Kの

中心 $(3,7)$ 、半径 3 //

(2)

$x^2+y^2-2ax-2(3a-2)y+9a^2-12a+4=0$

平方完成して

$(x^2-2ax)+\{y^2-2(3a-2)y\}+9a^2-12a+4=0$

$(x-a)^2-a^2+\{y-(3a-2)\}^2-(3a-2)^2+9a^2-12a+4=0$

$(x-a)^2-a^2+\{y-(3a-2)\}^2-(9a^2-12a+4)+9a^2-12a+4=0$

∴

$(x-a)^2+\{y-(3a-2)\}^2=a^2$

$a\neq0$ であるから、円Kの中心 $(a,3a-2)$

よって、この中心の座標を (x,y) とおくと

$(x,y)=(a,3a-2)$

つまり

$\begin{cases}x=a\\y=3a-2\end{cases}$

ここで $a=x$ を $y=3a-2$ に代入して

$y=3x-2$ //

となる。つまり円Kの中心はこの直線上にある。

(3). $1\leqq a\leqq3$ であるので $a>0$

よって、(2)より 円Kの中心は

$(a,3a-2)$、半径 a

である。

$a=1$の時、中心 $(1,1)$、半径 1

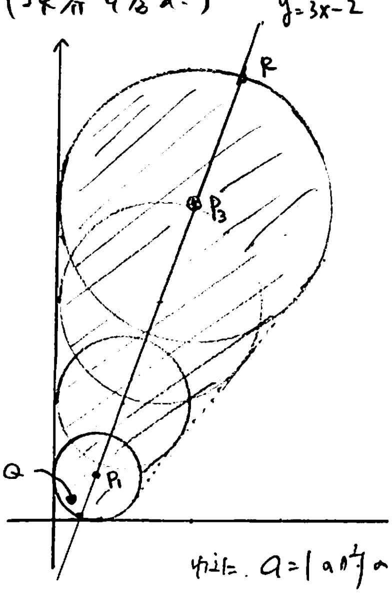
$a=3$の時、中心 $(3,7)$、半径 3

よって、$1\leqq a\leqq3$ の範囲で a が

変化する時、円Kが通過する

領域Dは下図の斜線部分

(境界を含む)



ゆえに $a=1$ の時の

円Kの中心を P_1、

$a=3$の時の円Kの

中心を P_3 とする。

また

$a=1$の時の円Kと

ℓの交点(図の位置)

をQ、$a=3$の時の円K

とℓの交点(図の位置)

をRとする。

求める線分の長さは

QRである。

ここで P_1Q は

$a=1$の時の円Kの半径より

$P_1Q=1$ である。

同様に

P_3R は $a=3$ の時の

円Kの半径より

$P_3R=3$ である。

そして、P_1P_3 の長さは

$P_1(1,1)$、$P_3(3,7)$

より

$P_1P_3=\sqrt{(3-1)^2+(7-1)^2}$

$=\sqrt{2^2+6^2}$

$=\sqrt{4+36}$

$=2\sqrt{10}$

以上より、ℓのうち

領域Dに含まれるのは

QR

$=QP_1+P_1P_3+P_3R$

$=1+2\sqrt{10}+3$

$=4+2\sqrt{10}$ //

28

(1)

$x^2+y^2-2x-7=0$

$(x^2-2x)+y^2-7=0$

$(x-1)^2-1+y^2-7=0$

∴ $(x-1)^2+y^2=8$

中心 $(1,0)$、半径 $2\sqrt{2}$

(2)

交点の座標を求めるため

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-7=0 \\ y=-x+k \end{cases}$$

連立方程式を考える。yを消去して

$x^2+(-x+k)^2-2x-7=0$

$x^2+x^2-2kx+k^2-2x-7=0$

∴ $2x^2-2(k+1)x+k^2-7=0$ …(＊)

直線と円①が異なる2点で交わるには、xの2次方程式(＊)が異なる2個の実数解を持てばよい。つまり、判別式 $D>0$ ならばよい。

$D/4=(k+1)^2-2(k^2-7)$

$=k^2+2k+1-2k^2+14$

$=-k^2+2k+15$

∴ $-k^2+2k+15>0$

両辺(-1)倍して

$k^2-2k-15<0$

$(k-5)(k+3)<0$

∴ $-3<k<5$

また、ABの中点をMとし、AM^2をkで表す。

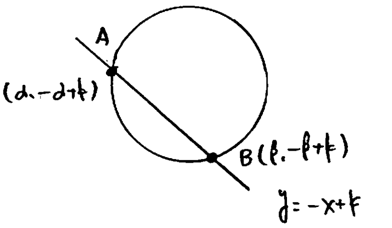
AMはABの半分なので、ABの長さを求める。

A, Bのx座標をα, βとすると、A, Bは円①と直線の交点なので、α, βは2次方程式(＊)の2解である。

よって解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{-2(k+1)}{2}=k+1 \\ \alpha\beta=\dfrac{k^2-7}{2} \end{cases} \quad \cdots(※)$$

が成り立つ。



ここで、A, Bは直線 $y=-x+k$ 上の点より、A, Bのx座標がα, βなので

$A(\alpha,-\alpha+k)$, $B(\beta,-\beta+k)$ とおける。

ゆえに

$AB^2=(\beta-\alpha)^2+\{(-\beta+k)-(-\alpha+k)\}^2$

$=(\beta-\alpha)^2+(-\beta+\alpha)^2$

$=2(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$

$=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}$

ここで(※)を代入すると

$AB^2=2\{(k+1)^2-4\cdot\frac{k^2-7}{2}\}$

$=2\{(k^2+2k+1)-2(k^2-7)\}$

$=2(-k^2+2k+15)$

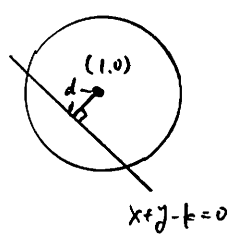
$AB=2AM$を代入して

$(2AM)^2=2(-k^2+2k+15)$

$4AM^2=2(-k^2+2k+15)$

∴ $AM^2=\dfrac{-k^2+2k+15}{2}$

(2)の別



円①の中心$(1,0)$と直線$x+y-k=0$との距離dは

$d=\dfrac{|1+0-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}|1-k|$

よって、直線と円①が異なる2点で交わるための条件は $d<r$（半径）より

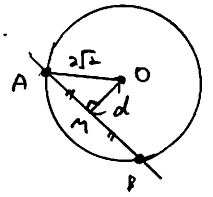
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}|1-k|<2\sqrt{2}$

∴ $|k-1|<4$

∴ $-4<k-1<4$

よって $-3<k<5$

また、



円の中心をOとすると$\triangle OAM$について三平方の定理から、

$OM^2+AM^2=OA^2$

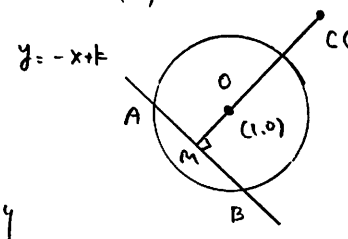
$d^2+AM^2=(2\sqrt{2})^2$

∴ $AM^2=8-\left(\dfrac{|1-k|}{\sqrt{2}}\right)^2$

$=8-\dfrac{k^2-2k+1}{2}$

$=\dfrac{-k^2+2k+15}{2}$

(3)



直線ABの傾きは-1より

直線OMはABに垂直なので、傾きは1

ゆえに、$O(1,0)$より直線OMの方程式は

$y-0=1\cdot(x-1)$ より $y=x-1$

すると点$C(4,3)$はこの直線の上に存在することがわかる。よって点$C(4,3)$と直線ABとの距離は、CMの長さになるので

$CM=\dfrac{|4+3-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{|7-k|}{\sqrt{2}}$

また、$\triangle ABC$が正三角形になるには、

$AM:CM=1:\sqrt{3}$

$\iff \sqrt{3}AM=CM$

$\iff 3AM^2=CM^2$

であればよく、(2)の結果を代入して

$3\cdot\dfrac{-k^2+2k+15}{2}=\left(\dfrac{|7-k|}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\dfrac{-3k^2+6k+45}{2}=\dfrac{49-14k+k^2}{2}$

∴ $4k^2-20k+4=0$

$k^2-5k+1=0$

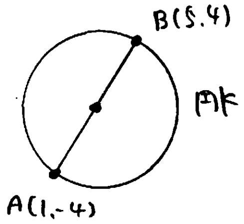
∴ $k=\dfrac{5\pm\sqrt{25-4}}{2}$

$=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

これは $-3<k<5$ を満たす。

29

(1)



ABが円Kの直径であるから、この円の中心はABの中点である。

∴ $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{(-4)+4}{2}\right)$

よって中心の座標は $(3,0)$

また、中心 $(3,0)$ と $A(1,-4)$ の長さが半径に等しいので

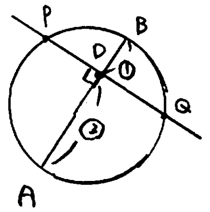
$$\sqrt{(3-1)^2+\{0-(-4)\}^2} = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

以上より円Kは中心 $(3,0)$ 半径 $2\sqrt{5}$ より、方程式は

$$(x-3)^2+(y-0)^2=(2\sqrt{5})^2$$

∴ $(x-3)^2+y^2=20$

(2)



求める直線PQは点Dを通りABに垂直な直線である。

点Dの座標を求める。

$A(1,-4)$, $B(5,4)$ で ABを3:1に内分するので

$$\left(\frac{1\cdot1+3\cdot5}{3+1}, \frac{1\cdot(-4)+3\cdot4}{3+1}\right)$$

∴ $\left(\frac{1+15}{4}, \frac{-4+12}{4}\right)$

∴ $D(4,2)$

また、直線ABの傾きは $A(1,-4)$, $B(5,4)$ より

$$\frac{4-(-4)}{5-1} = \frac{8}{4} = 2$$

よってPQの傾きを m とすると $AB \perp PQ$ より

$2\cdot m=-1$

∴ $m=-\frac{1}{2}$

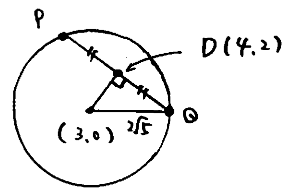
以上より直線PQの方程式は点 $D(4,2)$ を通り傾き $-\frac{1}{2}$ であるから

$$y-2 = -\frac{1}{2}(x-4)$$

∴ $y-2 = -\frac{1}{2}x+2$

∴ $y = -\frac{1}{2}x+4$

(3) まず、線分PQの長さを求める。



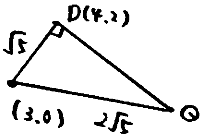
ここで、点Dは、円Kの中心よりPQに下ろした垂線とPQの交点なので、PQの中点となる。

よって、DQの長さを2倍すればPQの長さになる。

中心 $(3,0)$ と $D(4,2)$ の距離は

$$\sqrt{(4-3)^2+(2-0)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

よって三平方の定理から

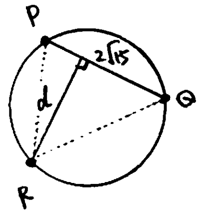


$$DQ^2 = (2\sqrt{5})^2-(\sqrt{5})^2 = 20-5 = 15$$

∴ $DQ>0$ より $DQ=\sqrt{15}$

よって、$PQ=2DQ=2\sqrt{15}$

ゆえに、点RからPQに下ろした垂線の長さを d とすると



△PQRの面積は

$$\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot d = \frac{1}{2}\cdot2\sqrt{15}\cdot d = \sqrt{15}d$$ となる。条件より、

△PQRの面積が $5\sqrt{3}$ より

$\sqrt{15}d = 5\sqrt{3}$ ∴ $d=\sqrt{5}$ …(I)

よって、d の長さが $\sqrt{5}$ となる円K上の点を求めればよい。

今、$R(p,q)$ とすると点Rは円K上の点より

(1)から $(p-3)^2+q^2=20$ …(II)

が成り立つ。また、$R(p,q)$ と直線PQ: $x+2y-8=0$ との距離 d は

$$d = \frac{|p+2q-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}|p+2q-8|$$

(I)より $\frac{1}{\sqrt{5}}|p+2q-8| = \sqrt{5}$

∴ $|p+2q-8|=5$ …(III)

場合分けをする。

- $p+2q-8 \geq 0$ の時

(III)式より $p+2q-8=5$ ∴ $p=-2q+13$ …(IV)

(II)に代入して

$(-2q+13-3)^2+q^2=20$

展開して整理すると

$q^2-8q+16=0$

$(q-4)^2=0$ ∴ $q=4$

(IV)より $p=-2\cdot4+13=5$

ここで、$p=5$, $q=4$ は $p+2q-8\geq0$ を満たす。

- $p+2q-8<0$ の時

(III)より $-(p+2q-8)=5$ ∴ $p=-2q+3$ …(V)

(II)に代入して

$(-2q+3-3)^2+q^2=20$

$4q^2+q^2=20$

∴ $q=\pm2$, この時 $p=-1, 7$

ここで $(p,q)=(-1,2), (7,-2)$ は $p+2q-8<0$ を満たす。

以上より、Rの座標は $(5,4)$, $(-1,2)$, $(7,-2)$

30

(1) $\begin{cases} (x-2\sqrt{3})^2+(y-4)^2=4 \\ y=mx+2 \end{cases}$

yを消去して

$(x-2\sqrt{3})^2+\{(mx+2)-4\}^2=4$

展開して整理すると

$(x^2-4\sqrt{3}x+12)+(m^2x^2-4mx+4)=4$

∴

$(m^2+1)x^2-4(\sqrt{3}+m)x+12=0$ …(★)

円①と直線②が接するので判別式 $D=0$ が成り立つ。

∴ $D/4=\{2(\sqrt{3}+m)\}^2-(m^2+1)\cdot 12=0$

$4(3+2\sqrt{3}m+m^2)-12m^2-12=0$

$8\sqrt{3}m-8m^2=0$

∴ $-8m(m-\sqrt{3})=0$

∴ $m=0,\sqrt{3}$

接点は

・$m=0$の時

(★)に代入して $x^2-4\sqrt{3}x+12=0$

$(x-2\sqrt{3})^2=0$ ∴ $x=2\sqrt{3}$

また直線②は $y=0\cdot x+2=2$

∴ $(2\sqrt{3},2)$

・$m=\sqrt{3}$の時

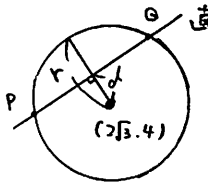
(★)に代入して $4x^2-8\sqrt{3}x+12=0$

$4(x-\sqrt{3})^2=0$ ∴ $x=\sqrt{3}$

直線②より $y=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+2=5$

∴ $(\sqrt{3},5)$

(2)



直線②が円①を異なる2点で交わるには、円のの中心$(2\sqrt{3},4)$と直線②：$mx-y+2=0$との距離dと半径$r=4$について $d<r$ が成り立てばよい。

$d=\dfrac{|m\cdot 2\sqrt{3}-4+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2\sqrt{3}m-2|}{\sqrt{m^2+1}}$

$d<r$に代入して両辺2乗すると

$\dfrac{(2\sqrt{3}m-2)^2}{m^2+1}<4$

両辺にm^2+1をかける。ここでm^2+1は正の数なので不等号の向きは変わらない

∴

$(2\sqrt{3}m-2)^2<4(m^2+1)$

∴

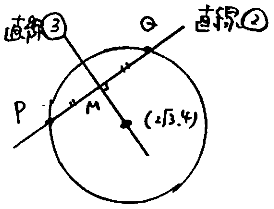
$8m^2-8\sqrt{3}m<0$

$8m(m-\sqrt{3})<0$

∴ $0<m<\sqrt{3}$

(別 (1)で判別式 $D>0$ としてもよい)

また、この時PQの中点Mの座標を求める。



円①の中心からPQに下ろした垂線は、弦PQを2等分するので、PQの中点Mを通る。

ゆえに円の中心$(2\sqrt{3},4)$を通りPQに垂直な直線を③とすると、点Mは直線②と直線③の交点である。

直線②の傾きは $y=mx+2$ より m である。よって直線③の傾きをm'とすると、直線②と直線③は垂直に交わるので

$m\cdot m'=-1$ よって $m'=-\dfrac{1}{m}$

ゆえに直線③の方程式は、点$(2\sqrt{3},4)$を通り傾き$-\dfrac{1}{m}$より

$y-4=-\dfrac{1}{m}(x-2\sqrt{3})$

∴ $y=-\dfrac{1}{m}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{m}+4$

そして、2直線②、③を連立すると

$\begin{cases} y=mx+2 \\ y=-\dfrac{1}{m}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{m}+4 \end{cases}$

∴

$mx+2=-\dfrac{1}{m}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{m}+4$

両辺m倍して

$m^2x+2m=-x+2\sqrt{3}+4m$

∴

$m^2x+x=2m+2\sqrt{3}$

$(m^2+1)x=2m+2\sqrt{3}$

∴ m^2+1は0でないので両辺m^2+1で割ると

$x=\dfrac{2m+2\sqrt{3}}{m^2+1}$

これを直線②に代入して

$y=m\cdot\dfrac{2m+2\sqrt{3}}{m^2+1}+2$

$=\dfrac{2m^2+2\sqrt{3}m+2m^2+2}{m^2+1}=\dfrac{4m^2+2\sqrt{3}m+2}{m^2+1}$

∴ $M\left(\dfrac{2m+2\sqrt{3}}{m^2+1},\ \dfrac{4m^2+2\sqrt{3}m+2}{m^2+1}\right)$

(3) (1)より接点の座標は$(2\sqrt{3},2)$, $(\sqrt{3},5)$

よって、これらが点A, Bであるから、ABの方程式は

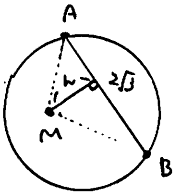
$y-2=\dfrac{2-5}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}(x-2\sqrt{3})$

∴ $y-2=-\sqrt{3}(x-2\sqrt{3})$

よって $\sqrt{3}x+y-8=0$ となる。

また、線分ABの長さは

$AB=\sqrt{(2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2+(2-5)^2}=\sqrt{3+9}=2\sqrt{3}$



よって、点MからABに下ろした垂線の長さをhとすると

$\triangle MAB=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot AB$

$=\dfrac{1}{2}\cdot h\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}h$

条件より $\triangle MAB$の面積は$\sqrt{3}$より

$\sqrt{3}h=\sqrt{3}$ ∴ $h=1$ …… (＊)

また、hの長さは(2)より $M\left(\dfrac{2m+2\sqrt{3}}{m^2+1},\ \dfrac{4m^2+2\sqrt{3}m+2}{m^2+1}\right)$ で、ABの方程式が$\sqrt{3}x+y-8=0$より

$h=\dfrac{\left|\sqrt{3}\cdot\dfrac{2m+2\sqrt{3}}{m^2+1}+\dfrac{4m^2+2\sqrt{3}m+2}{m^2+1}-8\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}$

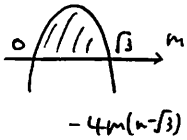
$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2\sqrt{3}m+6}{m^2+1}+\dfrac{4m^2+2\sqrt{3}m+2}{m^2+1}-8\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2\sqrt{3}m+6+4m^2+2\sqrt{3}m+2-8m^2-8}{m^2+1}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-4m^2+4\sqrt{3}m}{m^2+1}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{-4m(m-\sqrt{3})}{m^2+1}\right|$

である。ここで(2)より$0<m<\sqrt{3}$であり、このmの範囲において



$-4m(m-\sqrt{3})$は必ず正の値となる。m^2+1も正であるから、絶対値記号の中身は正である。

∴ $h=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-4m(m-\sqrt{3})}{m^2+1}=\dfrac{-2m(m-\sqrt{3})}{m^2+1}$

(＊)より $h=1$ より

$\dfrac{-2m(m-\sqrt{3})}{m^2+1}=1$

∴ $-2m(m-\sqrt{3})=m^2+1$

$-2m^2+2\sqrt{3}m=m^2+1$

$3m^2-2\sqrt{3}m+1=0$

$(\sqrt{3}m-1)^2=0$

∴ $m=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(これは$0<m<\sqrt{3}$を満たす)

31

(1)

$x^2+y^2-6x+12y+9=0$

平方完成して

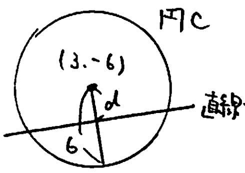
$(x^2-6x)+(y^2+12y)+9=0$

$(x-3)^2-9+(y+6)^2-36+9=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y+6)^2=36$

中心 $(3,-6)$ 半径6

(2)



円Cと直線ℓが共有点を持つには、円Cの中心 $(3,-6)$ と直線ℓ: $x+my-6=0$ との距離 d と円Cの半径 $r=6$ について $d\leqq r$ が成り立てばよい。ここで

$$d=\frac{|3+m(-6)-6|}{\sqrt{1^2+m^2}}=\frac{|-6m-3|}{\sqrt{1+m^2}}$$

よって $d\leqq r$

$$\Leftrightarrow \frac{|-6m-3|}{\sqrt{1+m^2}}\leqq 6$$

両辺正より2乗して

$$\frac{(-6m-3)^2}{1+m^2}\leqq 36$$

$1+m^2$ は正より、両辺にかけても不等号の向きは変わらない。

$(-6m-3)^2\leqq 36(1+m^2)$

$36m^2+36m+9\leqq 36+36m^2$

$\therefore\ 36m\leqq 27$

$\therefore\ m\leqq \frac{27}{36}$ より $m\leqq\frac{3}{4}$

(2)の別解

$$\begin{cases}(x-3)^2+(y+6)^2=36\\ x+my=6.\end{cases}$$

連立方程式を考える。

$x=-my+6$ として円Cの方程式に代入すると

$\{(-my+6)-3\}^2+(y+6)^2=36$

$(-my+3)^2+(y+6)^2=36$

展開して

$(m^2y^2-6my+9)+(y^2+12y+36)=36$

$\therefore\ (m^2+1)y^2+6(-m+2)y+9=0\ \cdots(*)$

円Cと直線ℓが共有点を持つので、yの2次方程式(*)の判別式Dは $D\geqq 0$ が成り立つ。

$\therefore\ D/4=\{3(-m+2)\}^2-(m^2+1)\cdot 9$

$=9(-m+2)^2-9(m^2+1)$

$=9(m^2-4m+4)-9(m^2+1)$

$=9(m^2-4m+4-m^2-1)$

$=9(-4m+3)$

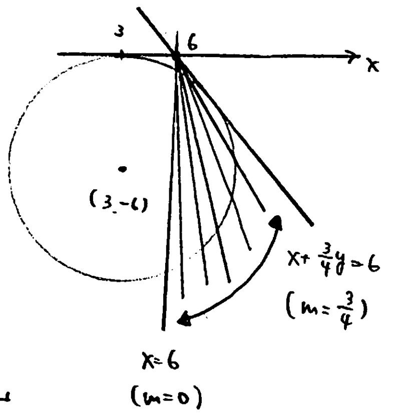
$\therefore\ D/4\geqq 0$ より $9(-4m+3)\geqq 0$

$\therefore\ -4m+3\geqq 0\quad \therefore\ m\leqq\frac{3}{4}$

(3)

(2)より $m\leqq\frac{3}{4}$ で、この範囲内で最大のmは $\frac{3}{4}$ である。よって $m_0=\frac{3}{4}$

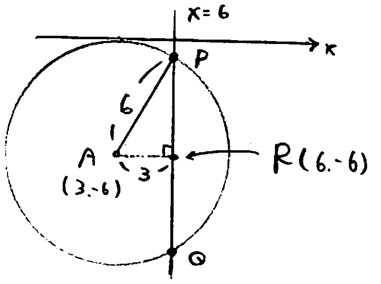
ゆえに、$0\leqq m\leqq\frac{3}{4}$ の範囲のmについて以下考えていく。



ここで、直線 $x+my=6$ は mの値にかかわらず、$x=6$ の時 $y=0$ となる。つまり必ず点 $(6,0)$ を通る。

また、$m=\frac{3}{4}$ の時、直線ℓは円Cに接し、そして $m=0$ の時 $x+my=6$ は $x=6$ となり x軸に垂直な直線になる。

直線 $x=6$ と円Cとの交点をP, Qとする。



また円Cの中心を $A(3,-6)$ とする。そして、点AからPQに下ろした垂線とPQの交点をRとする。すると、ARはx軸に平行であり、Rは直線 $x=6$ 上にあるので、$R(6,-6)$ となる。よって $AR=3$

また APは円Cの半径より $AP=6$

よって △APRは $1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形より $\angle PAR=60^\circ$ である。$\angle QAR$ も同様に 60° となるので、

$\angle PAQ=120^\circ$

となる。ゆえに円Cの周のうち領域D内にあるのは弧PQである。また、弧PQの中心角は 120° であるから求める弧の長さは

$$2\pi\cdot 6\times\frac{120^\circ}{360^\circ}=2\pi\cdot 6\cdot\frac{1}{3}=4\pi$$

(円周)

32

(1)

$x^2+y^2-4ax-2(4a-3)y+16a^2-24a+9=0$

平方完成すると

$(x^2-4ax)+\{y^2-2(4a-3)y\}+16a^2-24a+9=0$

$(x-2a)^2-4a^2+\{y-(4a-3)\}^2-(4a-3)^2+16a^2-24a+9=0$

$(x-2a)^2+\{y-(4a-3)\}^2-4a^2-16a^2+24a-9+16a^2-24a+9=0$

∴ $(x-2a)^2+\{y-(4a-3)\}^2=4a^2$

よって 中心 $(2a,\ 4a-3)$

また 半径は $\sqrt{4a^2}=2|a|$

条件より $a>0$ より 半径 $2a$

(2)

$a=5$ の時 (1)より

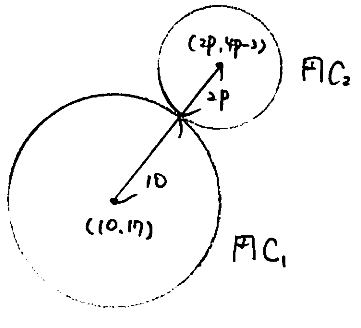
中心 $(2\cdot5,\ 4\cdot5-3)$, 半径 $2\cdot5$

よって 円C_1は

中心 $(10,\ 17)$ 半径 10.

また $a=p$ の時 円C_2は

中心 $(2p,\ 4p-3)$, 半径 $2p$.



円C_1と円C_2が外接する時

(円C_1の中心と円C_2の中心の距離)

と

(2円の半径の和)

は等しくなる。

円C_1の中心$(10,17)$と円C_2の中心$(2p,\ 4p-3)$の距離は

$\sqrt{(2p-10)^2+\{(4p-3)-17\}^2}$

$=\sqrt{(2p-10)^2+(4p-20)^2}$

$=\sqrt{\{2(p-5)\}^2+\{4(p-5)\}^2}$

$=\sqrt{4(p-5)^2+16(p-5)^2}$

$=\sqrt{20(p-5)^2}$

一方で 2円の半径の和は

$2p+10$

であるから

$\sqrt{20(p-5)^2}=2p+10$

両辺2乗して

$20(p-5)^2=(2p+10)^2$

$20(p-5)^2=4(p+5)^2$

∴ $5(p-5)^2=(p+5)^2$

展開して

$5(p^2-10p+25)=p^2+10p+25$

∴ $4p^2-60p+100=0$

$p^2-15p+25=0$

∴ $p=\dfrac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot25}}{2}$

$=\dfrac{15\pm\sqrt{125}}{2}$

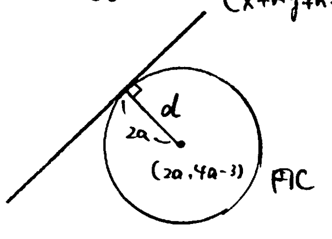
$=\dfrac{15\pm5\sqrt5}{2}$

(3)

円Cは

中心$(2a,\ 4a-3)$, 半径$2a$

である。



ここで すべての円Cに接する直線を

$lx+my+n=0$ …(あ)

とおく。ただし lとmについて

$l=m=0$ となることはないとする。 ……(*)

なぜならば $l=m=0$の時 $lx+my+n=0$は直線の式とならないからである。

以下 どんなaに対しても 円Cと直線$lx+my+n=0$が接する条件を考える。

すると 円Cの中心$(2a,\ 4a-3)$と直線$lx+my+n=0$との距離dは必ず半径$2a$に等しいので

$d=\dfrac{|l\cdot2a+m(4a-3)+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

$=\dfrac{|2al+4am-3m+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}$

より aの値にかかわらず

$\dfrac{|2al+4am-3m+n|}{\sqrt{l^2+m^2}}=2a$

が成り立つ。分母払って

$|(2l+4m)a+(-3m+n)|=2a\sqrt{l^2+m^2}$

よって

$(2l+4m)a+(-3m+n)=\pm2a\sqrt{l^2+m^2}$

がどんなaについても成り立つ。ゆえに この式はaについての恒等式より

$\begin{cases} 2l+4m=\pm2\sqrt{l^2+m^2} & \cdots\text{(aの係数)} \\ -3m+n=0 & \cdots\cdots\text{(定数項)} \end{cases}$

が成り立つ。

$2l+4m=\pm2\sqrt{l^2+m^2}$

両辺2乗して

$4l^2+16lm+16m^2=4(l^2+m^2)$

∴ $16lm+12m^2=0$

$4m(4l+3m)=0$

よって $m=0$ または $4l+3m=0$

• $m=0$の時

$-3m+n=0$より $n=3m=3\cdot0=0$.

しかし lについては(*)より lは0にならない。

よって $l\neq0$, $m=n=0$ を(あ)に代入して

$lx=0$. lで割って $x=0$.

• $4l+3m=0$の時

$l=0$とすると $m=-\frac{4}{3}l$ より $m=0$となり(*)に反する。よって $l\neq0$である。

ここで $m=-\frac{4}{3}l$, $n=3m=3(-\frac{4}{3}l)=-4l$.

(あ)に代入して $lx-\frac{4}{3}ly-4l=0$.

lで割って3倍すると $3x-4y-12=0$