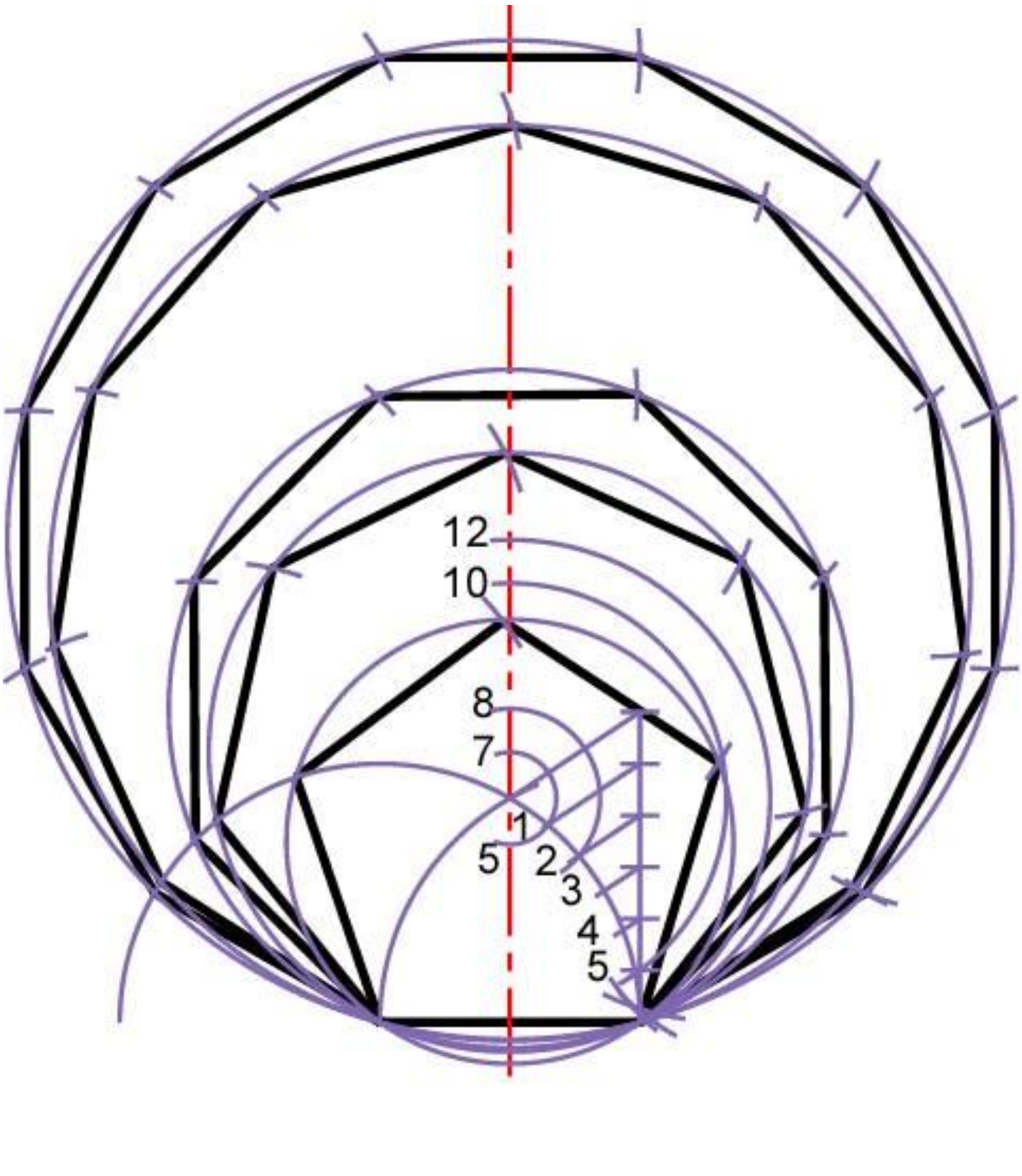
数学発展課題

式と証明・複素数と方程式



(　　)年(　　)組(　　)番 氏名(　　　　　　　　　　　　)

式と証明　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

1 以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ の分母を有理化し，簡単にせよ。

(2) 整式 x^3-4x^2-4x+6 を整式 x^2-6x+6 で割った商と余りを求めよ。

(3) $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ のとき，a^3-4a^2-4a+6 の値を求めよ。

式と証明　平成＿＿年＿＿月＿＿日

2 x の整式 $P = 2x^3 + 7x^2 + (a-6)x + a^2 - 24$ (a は定数) がある。

(1) $x = -1 + \sqrt{7}$ のとき，$x^2 + 2x - 6$ の値を求めよ。

(2) P を整式 $x^2 + 2x - 6$ で割った商と余りを a を用いて表せ。

(3) $x = -1 + \sqrt{7}$ のとき，$P = \sqrt{7}a$ となるような a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ のとき，$t^2+2t=a$ とおく。

（1）a の値を求めよ。

（2）(1) の a の値に対して，

$$3x^3-4x^2-7x-1=(x^2+2x-a)(bx+c)+dx+e$$

が x についての恒等式となるとき，定数 b，c，d，e の値を求めよ。

（3）$3t^3-4t^2-7t-1$ の値を求めよ。

式と証明　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{4}}$ 整式 $A = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4$ と $B = x^2 + 4x + 2$ がある。

(1) A を B で割った商と余りを求めよ。

(2) $x = -2 + \sqrt{2}$ のとき，B の値を求めよ。また，このとき，A の値を求めよ。

(3) $x = -2 + \sqrt{2}$ のとき，$2x^3 + (5-a)x^2 - (2+5a)x$ の値が正となるような定数 a の値の範囲を求めよ。(ただし，分母は有理化して答えよ。)

式と証明　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{5}}$ $P = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 10$ とおく。

（1）P を x の整式として，P を $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。

（2）$x = 1 - \sqrt{3}$ のとき，P の値を求めよ。

（3）$x = 1 - \sqrt{3}$ のとき，$x^4 - (4+a)x^3 + (1+2a)x^2 + 6x - 10 > 0$ を満たす最小の整数 a の値を求めよ。

式と証明　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

6 $x = 2 - \sqrt{3}$ とする。

(1) $x^2 - 4x$ の値を求めよ。

(2) $x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$ の値を求めよ。

(3) $A = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + (a+3)x + 4$ の値が $0 < A < 1$ となるような整数 a の個数を求めよ。

$\boxed{7}$ x の整式 $P = x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax$ (a は自然数の定数) がある。

(1) P を $x^2 - x$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) b を自然数とする。$x = \dfrac{1+\sqrt{4b+1}}{2}$ のとき，$x^2 - x$ および P の値を a，b で表せ。

(3) (2) の P の値が 6 であるような，自然数 a，b の組を求めよ。

式と証明　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{8}$ $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ とする。

（1）$\alpha - \dfrac{1}{\alpha}$, $\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}$ の値をそれぞれ求めよ。

（2）$\alpha^2 = s\alpha + t$ を満たす有理数 s, t の値を求めよ。

（3）$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha - 1 = \sqrt{5}$ を満たす有理数 p, q の値を求めよ。

式と証明　平成＿＿年＿＿月＿＿日

9 2つの整式 $A = x^3 + ax^2 + 4x + b$ と $B = x^2 + x$ がある。ただし，a，b は定数とする。

(1) $x = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき，B の値を求めよ。

(2) A を B で割った商と余りが等しいとき，定数 a，b の値を求めよ。

(3) (2) の a，b の値に対して，$x = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$ のとき，A の値を求めよ。

高次方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{10}}$ 3次方程式 $x^3 + mx^2 + 3nx + m + n - 1 = 0 \cdots$ ①
は $x = -1$ を解にもつ。ただし，m，n は実数の定数とする。

(1) m を n を用いて表せ。

(2) 3次方程式①の解がすべて実数であるとき，n の値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，3次方程式①の解を -1，α，β とする。α，β が $\alpha^3 + \beta^3 = 32$ を満たすとき，n の値を求めよ。

高次方程式

平成 ＿＿ 年 ＿＿ 月 ＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{11}}$ 3次方程式 $x^3-(a+1)x^2+2ax+b=0\cdots$ ②は $x=1$ を解にもつ。ただし，a，b は実数の定数とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) ②が虚数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，②の 2 つの虚数解を α，β とする。
方程式 $x^2+cx+4a^2-a-6=0$ の 2 つの解が $\alpha+\beta$，$\alpha^2\beta^2$ であるとき，定数 c の値を求めよ。

高次方程式　　平成______年______月______日

$\boxed{\mathbf{12}}$ x の３次方程式 $x^3 + px^2 + (1-p)x + q = 0 \cdots$ ①があり，１つの解が $x = 2$ である。ただし，p, q は実数の定数とする。

(1) q を p で表せ。

(2) 方程式①の $x = 2$ 以外の解が虚数であるとき，p のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，①の虚数解を α, β とする。
２次方程式 $x^2 + kx + 4 = 0$ (k は実数) の解が α^2, β^2 であるとき，p, k の値を求めよ。

13 3次方程式 $(x-a)(x^2+bx+c)=0$ の3つの解のうち，実数解と1つの虚数解の和が $\dfrac{10}{3+i}$ である。ただし，$a,\ b,\ c$ は実数の定数とする。

(1) $\dfrac{10}{3+i}$ を $p+qi$ ($p,\ q$ は実数) の形で表せ。

(2) $a=2$ のとき，$b,\ c$ の値を求めよ。

(3) 3つの解の平方の和が4となるような a の値を求めよ。

高次方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

14　3次方程式 $x^3+(a+5)x^2+(2a+b+12)x+a^2+b=0\cdots$①は，$x=-2$ を解にもっている。ただし，a，b は実数の定数とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 方程式①が虚数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 方程式①が虚数解 α，β をもち，$\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2=11$ が成り立っている。このとき，a の値を求めよ。また，$\beta^2+3\beta+4\alpha$ の値を求めよ。

高次方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{15}}$ x の整式 $P(x) = x^3 + (a-2)x^2 + (4-2a)x - 8$ がある。ただし，a は実数の定数とする。

(1) $P(2)$ の値を求めよ。また，$P(x)$ を因数分解せよ。

(2) 複素数 $\alpha = b + \sqrt{3}i$ が方程式 $P(x) = 0$ の 1 つの解であるとき，a, b の値を求めよ。ただし，b は実数で，$b > 0$ であるとする。

(3) (2) のとき，方程式 $P(x) = 0$ の虚数解の α でない方を β とする。このとき，$\alpha^5 + \beta^5 + 4\alpha^3 + 4\beta^3$ の値を求めよ。

高次方程式

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{16}}$ $(1-2i)(a+bi)=\dfrac{-4+3i}{10}$ を満たす実数 a, b がある。
ただし，i は虚数単位である。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 2次方程式 $x^2+px+q=0$ の1つの解が $\dfrac{1}{a+bi}$ である。このとき，実数 p, q の値を求めよ。

(3) (2) で求めた p, q の値に対して，
3次方程式 $kx^3+(x^2+px+q)=0$ の解の1つが純虚数であるとき，この方程式を解け。ただし，k は実数とする。

高次方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

17 x の3次式 $P(x)=2x^3-2(a-2)x^2-(a+4)x-3a^2+4a$ がある。ただし，a は実数の定数とする。

(1) $P(a)$ の値を求めよ。

(2) $P(x)$ を $x-a$ で割ったときの商を求めよ。また，方程式 $P(x)=0$ が1つの実数解と2つの虚数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，方程式 $P(x)=0$ の実数解を α，虚数解を β，γ とする。$2(\alpha+1)^2+(\beta+1)^2+(\gamma+1)^2=29$ が成り立つとき，a の値を求めよ。

高次方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

18 x の整式 $P(x) = x^3 - (a+3)x^2 + ax + 2a + 4$ がある。
ただし，a は実数の定数とする。

(1) $P(x)$ を $x-2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

(2) x の3次方程式 $P(x) = 0$ を解け。

(3) 3次方程式 $P(x) = 0$ が異なる3つの実数解 α, β, γ $(\alpha < \beta < \gamma)$ をもち，かつ，$2|\beta| = \alpha + \gamma$ が成り立つとき，a の値を求めよ。ただし，$a < 0$ とする。

19 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0 \cdots$ ①があり，その1つの解 α は，$\alpha=\dfrac{2}{1+i}$ である。ただし，i は虚数単位であり，a, b, c は実数の定数とする。

(1) α を解にもつような2次方程式のうち，x^2 の係数が1であるものを求めよ。

(2) b, c をそれぞれ a を用いて表せ。

(3) ①の3つの解 α, β, γ について，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=4$ が成り立つとき，a, b, c の値を求めよ。

高次方程式　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{20}}$ 整式 $P(x) = x^3 + (2a+5)x^2 + (2a+13)x + 9$ がある。
ただし，a を実数とする。

(1) $P(x)$ を $x+1$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) ３次方程式 $P(x) = 0$ が１つの実数解と２つの虚数解をもつとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，虚数解を $\alpha = p + qi$，$\beta = p - qi$ とする。ただし，i は虚数単位，p，q は実数であり，$q > 0$ とする。このとき，q^2 の最大値とそのときの a の値を求めよ。

高次方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

21 整式 $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2a$ があり，$P(x)$ は $x-2$ で割り切れる。ただし，a, b は実数の定数とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつとする。このような a の値のうち最大の整数を a_0 とするとき，a_0 の値を求めよ。

(3) (2) の a_0 の値に対して，$a = a_0$ のときの方程式 $P(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とする。このとき，$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ の値を求めよ。

高次方程式

平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

22 x の３次方程式 $x^3-(2p+1)x^2-(q+7)x+2q+7=0 \cdots$①がある。①の左辺は $x-1$ で割り切れる。ただし，p，q は実数の定数とする。

(1) q を p を用いて表せ。また，①の左辺を p を用いて因数分解せよ。

(2) ３次方程式①の３つの実数解を 1，α，β とする。α，β がともに１より小さくなるとき，p のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) ３次方程式①の解がすべて整数となるときの p の値を求めよ。

高次方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{23}}$ x の３次方程式 $x^3+(a+1)x^2+(a+2)x+b=0 \cdots$ ①は $x=1$ を解にもつ。ただし，a，b は実数の定数とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) 方程式①の左辺を因数分解せよ。

(3) 方程式①が異なる３つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。さらに，３つの実数解のうち，２つの解の和が残りの解に等しいとき，a の値を求めよ。

高次方程式　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

24 整式 $P(x)=(x-1)(x-2)(x-k)+ax+b$ があり，
$P(1)=-4,\ P(2)=0$ である。ただし，$a,\ b,\ k$ は実数の定数とする。

(1) $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) $P(x)$ を因数分解せよ。また，方程式 $P(x)=0$ の解がすべて実数であるとき，k の値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，方程式 $P(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とする。
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-19$ となる k の値を求めよ。

高次方程式　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{\mathbf{25}}$ x の3次の整式 $P(x)$ があり，

$$P(x) = kx^3 - (3k+1)x^2 - (k^3 - 2k^2 - k + a)x + (k-2)(k^2+1)$$

である。また，$P(1) = 0$ である。ただし，a，k は実数の定数であり，$0 < k < 1$ である。

(1) a の値を求めよ。

(2) 方程式 $P(x) = 0$ を解け。

(3) 方程式 $P(x) = 0$ の解のうち1でないものを α，β $(\alpha > \beta)$ とする。$\alpha - \beta$ を k で表せ。また，$\alpha - \beta$ のとりうる値の最小値とそのときの k の値を求めよ。

高次方程式　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

26 整式 $P(x) = x^3 + (2p-1)x^2 + 3x + q$ があり，$P(x)$ は $x-1$ で割り切れる。ただし，p，q は実数の定数とする。

(1) q を p を用いて表せ。

(2) $P(x)$ を因数分解せよ。また，方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつような p の値の範囲を求めよ。

(3) (2) のとき，方程式 $P(x) = 0$ の実数解を α，異なる 2 つの虚数解を β，γ とする。

2 次方程式 $x^2 - 2kx + 2k^2 - 5 = 0$ の 2 つの解が $\beta + 2\alpha$，$\gamma + 2\alpha$ であるとき，p，k の値を求めよ。ただし，k は実数の定数とする。

高次方程式

平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{27}}$ 整式 $x^{99} - 1$ を整式 $x^3 + x^2 + x + 1$ で割った余りを求めよ。[上智大]

高次方程式

平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{28}}$ x の多項式 $f(x)$ を $(x-1)^2$ および $(x+1)^2$ で割ったときの余りが，それぞれ $2x-1$，$3x-4$ であるとき，$f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割った余りを求めよ。[慶應義塾大]