

①

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3-1} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{2} \\
 &= \sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \\
 &= 3-\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3-\sqrt{3})^2 - 6(3-\sqrt{3}) + 6 \\
 &= (9-6\sqrt{3}+3) - 18 + 6\sqrt{3} + 6 \\
 &= 12-6\sqrt{3}-12+6\sqrt{3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

とある。よって、 $a=3-\sqrt{3}$ である。

$$a^2-6a+6 \neq 0 \text{ である。}$$

よって、(*) 式は X^3-4X^2-4X+6 とある。

$$\begin{aligned}
 &a^3-4a^2-4a+6 \\
 &= (a+2)(a^2-6a+6) + (2a-6) \\
 &= (a+2) \times 0 + (2a-6) \\
 &= 0 + (2a-6) \\
 &= 2a-6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &X^3-4X^2-4X+6 \text{ と} \\
 &X^2-6X+6 \text{ と}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 X^2-6X+6 \overline{) X^3-4X^2-4X+6} \\
 \underline{X^3-6X^2+6X} \\
 2X^2-10X+6 \\
 \underline{2X^2-12X+12} \\
 2X-6
 \end{array}$$

$$\text{よって } X+2 \text{ を } 2X-6 \text{ と}$$

(3) (2) の結果より

$$X^3-4X^2-4X+6$$

$$= (X+2)(X^2-6X+6) + (2X-6) \quad a^2-6a+9=3$$

とある。よって、(1) の結果より

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = 3-\sqrt{3}$$

である。 a^2-6a+6 の値を求めると

$$a^2-6a+6$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(3-\sqrt{3})-6 \\
 &= 6-2\sqrt{3}-6 \\
 &= -2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

よって

$$a=3-\sqrt{3} \text{ である}$$

$$a=3-\sqrt{3}$$

$$a-3=-\sqrt{3}$$

両辺2乗して

$$\dots (*) \quad (a-3)^2 = (-\sqrt{3})^2$$

$$a^2-6a+9=3$$

$$a^2-6a+6=0$$

2

(1) $x = -1 + \sqrt{7}$ を代入

$$x^2 + 2x - 6$$

$$= (-1 + \sqrt{7})^2 + 2(-1 + \sqrt{7}) - 6$$

$$= (1 - 2\sqrt{7} + 7) - 2 + 2\sqrt{7} - 6$$

$$= (8 - 2\sqrt{7}) - 8 + 2\sqrt{7}$$

$$= 0$$

例

$x = -1 + \sqrt{7}$ を代入

$$x + 1 = \sqrt{7}$$

両辺2乗して

$$x^2 + 2x + 1 = 7$$

$$\therefore x^2 + 2x - 6 = 0$$

(2)

$$P = 2x^3 + 7x^2 + (a-6)x + a^2 - 24$$

$x^2 + 2x - 6$ で割ると、 $\frac{2x+3}{1}$ と余り

が得られる。

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x - 6 \overline{) 2x^3 + 7x^2 + (a-6)x + a^2 - 24} \\ \underline{2x^3 + 4x^2 - 12x} \\ 3x^2 + (a+6)x + (a^2-24) \\ \underline{3x^2 + 6x - 18} \\ ax + a^2 - 6 \end{array}$$

$\frac{1}{10}$ $2x+3$

余り $ax + a^2 - 6$

(3)

(1) の結果より

$$2x^3 + 7x^2 + (a-6)x + a^2 - 24 \dots (*)$$

$$= (x^2 + 2x - 6)(2x + 3) + (ax + a^2 - 6)$$

これが割り切れる。

(1) より $x = -1 + \sqrt{7}$ を代入

$$x^2 + 2x - 6$$

(*) より $x = -1 + \sqrt{7}$ を代入すると

$$P = 2x^3 + 7x^2 + (a-6)x + a^2 - 24$$

$$= (x^2 + 2x - 6)(2x + 3) + (ax + a^2 - 6)$$

$$= 0 \cdot (2x + 3) + (ax + a^2 - 6)$$

$$= 0 + (ax + a^2 - 6)$$

$$= ax + a^2 - 6$$

$$= a(-1 + \sqrt{7}) + a^2 - 6$$

$$= -a + \sqrt{7}a + a^2 - 6 \dots (*)$$

これが0になるためには、 $P = \sqrt{7}a$

と仮定すると、 $-a + \sqrt{7}a + a^2 - 6 = \sqrt{7}a$

(*) より

$$-a + \sqrt{7}a + a^2 - 6 = \sqrt{7}a$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$(a-3)(a+2) = 0$$

$$\therefore a = 3, -2$$

3

(1)

$$a = t^2 + 2t$$

$\Rightarrow$

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$$

$$= \sqrt{2}-1$$

5)

$$a = t^2 + 2t$$

$$= (\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1)$$

$$= (2-2\sqrt{2}+1) + 2\sqrt{2}-2$$

$$= (3-2\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}-2$$

$$= 1$$

(2) (1) 5) $a = 1$ である。

$\Rightarrow$

$$3x^3 - 4x^2 - 7x - 1$$

$$= (x^2+2x-1)(bx+c) + dx + e$$

が $x=1$ のとき成り立つ。よって、(右辺)

を展開して、係数を比較して整理すると

$$(右辺) = (x^2+2x-1)(bx+c) + dx + e$$

$$= bx^3 + 2bx^2 - bx + cx^2 + 2cx - c + dx + e$$

$$= bx^3 + (2b+c)x^2 + (-b+2c+d)x + (-c+e)$$

よって、(左辺)と係数を比較して

$$\begin{cases} 3 = b & (x^3) \\ -4 = 2b+c & (x^2) \\ -7 = -b+2c+d & (x) \\ -1 = -c+e & (定数) \end{cases}$$

解いて、

$$b=3, c=-10, d=16, e=-11$$

(2) 6)

$$3x^3 - 4x^2 - 7x - 1 \div x^2 + 2x - 1$$

商は

$$\begin{array}{r} 3x-10 \\ x^2+2x-1 \overline{) 3x^3-4x^2-7x-1} \\ \underline{3x^3+6x^2-3x} \\ -10x^2-4x-1 \\ \underline{-10x^2-20x+10} \\ 16x-11 \end{array}$$

商は $3x-10$ 、余りは $16x-11$

よって、

$$3x^3 - 4x^2 - 7x - 1$$

$$= (x^2+2x-1)(3x-10) + 16x-11$$

と変換できる。よって係数を比較して

$$b=3, c=-10, d=16, e=-11$$

$$(3) (1) 5) f = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\text{よって } f = \sqrt{2}-1 \text{ である。}$$

$$t^2 + 2t = 1$$

である。よって

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

が成り立つ。

また (2) の結果から、

よって x の値は $\sqrt{2}-1$ である。

$$3x^3 - 4x^2 - 7x - 1$$

$$= (x^2+2x-1)(3x-10) + 16x-11$$

が成り立つので、 $x=1$ のとき

f の値は

$$3t^3 - 4t^2 - 7t - 1$$

$$= (t^2+2t-1)(3t-10) + 16t-11$$

$$= 0 \cdot (3t-10) + 16t-11$$

$$= 0 + 16t-11$$

$$= 16t-11$$

$$= 16(\sqrt{2}-1)-11$$

$$= 16\sqrt{2}-16-11$$

$$= 16\sqrt{2}-27$$

4

$$(1) \begin{array}{r} 2x-3 \\ x^2+4x+2 \overline{) 2x^3+5x^2-2x+4} \\ \underline{2x^3+8x^2+4x} \\ -3x^2-6x+4 \\ \underline{-3x^2-12x-6} \\ 6x+10 \end{array}$$

商 $2x-3$ 余 $6x+10$

(2) $x = -2 + \sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned} B &= x^2 + 4x + 2 \\ &= (-2 + \sqrt{2})^2 + 4(-2 + \sqrt{2}) + 2 \\ &= (4 - 4\sqrt{2} + 2) - 8 + 4\sqrt{2} + 2 \\ &= (6 - 4\sqrt{2}) - 6 + 4\sqrt{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(1) 同様に A と B の商 1 , 余 $6x+10$ 同様に

$$A = B(2x-3) + (6x+10) \dots (4)$$

と $\frac{1}{10}$ 以上 0 . $\therefore x = -2 + \sqrt{2}$ のとき

$$B = 0 \text{ のとき, } (4) \text{ より } x = -2 + \sqrt{2}$$

を代入して

$$\begin{aligned} A &= 0 \cdot (2x-3) + (6x+10) \\ &= 0 + (6x+10) \\ &= 6x+10 \\ &= 6(-2+\sqrt{2})+10 \\ &= -12+6\sqrt{2}+10 \\ &= -2+6\sqrt{2} \end{aligned}$$

(3)

$$2x^3 + (5-a)x^2 - (2+5a)x$$

と p と 0 の関係

$$\begin{aligned} p &= (2x^3 + 5x^2 - 2x) - ax^2 - 5ax \\ &= (2x^3 + 5x^2 - 2x) - a(x^2 + 5x) \dots (5) \end{aligned}$$

と 0 の関係 $x = -2 + \sqrt{2}$ のとき A, B の

値は (2) より $A = -2 + 6\sqrt{2}$, $B = 0$ である。 p と 0 の関係 A と B のとき

$$A = 2x^3 + 5x^2 - 2x + 4$$

より

$$2x^3 + 5x^2 - 2x = A - 4 \dots (7)$$

また

$$B = x^2 + 4x + 2$$

両辺に x を加えると

$$B + x = x^2 + 5x + 2$$

より

$$x^2 + 5x = B + x - 2 \dots (1)$$

よって (7) と (1) より (5) を代入すると

$$p = (A - 4) - a(B + x - 2)$$

と 0 の関係 $x = -2 + \sqrt{2}$ のとき

代入すると $x = -2 + \sqrt{2}$ のとき

$$(2) \text{ より } A = -2 + 6\sqrt{2}, B = 0 \text{ である}$$

$$p = \{(-2+6\sqrt{2}) - 4\} - a\{0 + (-2+\sqrt{2}) - 2\}$$

$$= (-6+6\sqrt{2}) - a(-4+\sqrt{2})$$

$$= -6(1-\sqrt{2}) + a(4-\sqrt{2})$$

と 0 の関係。今 $p > 0$ と仮定すると a の範囲を求めると

$$-6(1-\sqrt{2}) + a(4-\sqrt{2}) > 0$$

$$a(4-\sqrt{2}) > 6(1-\sqrt{2})$$

$$\therefore 4-\sqrt{2} \text{ の両辺に } \frac{1}{4-\sqrt{2}}$$

$$\frac{a(4-\sqrt{2})}{4-\sqrt{2}} > \frac{6(1-\sqrt{2})}{4-\sqrt{2}}$$

$$a > \frac{6(1-\sqrt{2})}{4-\sqrt{2}}$$

$$\frac{6(1-\sqrt{2})}{4-\sqrt{2}} = \frac{6(1-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}{(4-\sqrt{2})(4+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{6(4+\sqrt{2}-4\sqrt{2}-2)}{16-2}$$

$$= \frac{6(2-3\sqrt{2})}{14}$$

$$= \frac{3(2-3\sqrt{2})}{7}$$

$$= \frac{6-9\sqrt{2}}{7}$$

$$a > \frac{6-9\sqrt{2}}{7}$$

(5)

(1)

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 \\ x^2 - 2x \overline{) x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 10} \\ \underline{x^4 - 2x^3} \\ -2x^3 + x^2 \\ \underline{-2x^3 + 4x^2} \\ -3x^2 + 6x \\ \underline{-3x^2 + 6x} \\ -10 \end{array}$$

商 $x^2 - 2x - 3$. 余り -10

(2)

(1) の結果より

P は $x^2 - 2x$ で割り, T は商が

$x^2 - 2x - 3$. 余り -10 である

$P = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) - 10 \dots (*)$

が成り立つ。 $\therefore x = 1 - \sqrt{3}$ のとき

$x^2 - 2x$ の値は

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= (1 - \sqrt{3})^2 - 2(1 - \sqrt{3}) \\ &= (1 - 2\sqrt{3} + 3) - 2 + 2\sqrt{3} \\ &= (4 - 2\sqrt{3}) - 2 + 2\sqrt{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore (*)$ は $2(-10) = -20$ となる

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3) - 10 \\ &= \underline{(x^2 - 2x)} \{ \underline{(x^2 - 2x - 3)} \} - 10 \\ &= 2(2 - 3) - 10 = 2(-1) - 10 \\ &= -12 \end{aligned}$$

(3)

$$x^4 - (4+a)x^3 + (1+2a)x^2 + 6x - 10 > 0$$

$\therefore$ 不等式が成り立つとき a の範囲を求めよ。

まず

$$\begin{aligned} Q &= x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 10 - ax^3 + 2ax^2 \\ &= (x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x - 10) - a(x^3 - 2x^2) \\ &= P - a(x^3 - 2x^2) \dots (**) \end{aligned}$$

$\therefore Q > 0$ となる a の範囲を求めよ。

$x^3 - 2x^2 = x(x^2 - 2x)$ である。

(2) より $x = 1 - \sqrt{3}$ のとき

$P = -12$, $x^2 - 2x = 2$

$\therefore (*)$ は $-12 - 2a$ となる

$Q = P - a(x^3 - 2x^2)$

$= -12 - a(1 - \sqrt{3}) \cdot 2$

$= -12 + 2(\sqrt{3} - 1)a$

$\therefore Q > 0$ となる a の範囲を求めよ。

$-12 + 2(\sqrt{3} - 1)a > 0$

$2(\sqrt{3} - 1)a > 12$

$(\sqrt{3} - 1)a > 6$

両辺 $\sqrt{3} - 1$ で割る

$\sqrt{3} - 1$ は正の数である。

不等式の向きは変わらない。

$\therefore a > \frac{6}{\sqrt{3} - 1}$

右辺を有理化して

$\frac{6}{\sqrt{3} - 1} = \frac{6(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{6(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} \\ &= \frac{6(\sqrt{3} + 1)}{2} \end{aligned}$$

$= 3(\sqrt{3} + 1)$

$= 3\sqrt{3} + 3$

$\therefore a > 3\sqrt{3} + 3$

$\therefore$ a の最小値は $3\sqrt{3} + 3$ である。

$3\sqrt{3} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{27}$

また

$\sqrt{25} < \sqrt{27} < \sqrt{36}$

$\therefore$

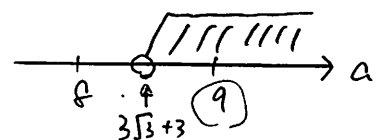
$5 < 3\sqrt{3} < 6$

$\therefore 8 < 3\sqrt{3} + 3 < 9$

$\therefore a > 3\sqrt{3} + 3$ となる a の範囲は

$a > 3\sqrt{3} + 3$ である。

$a > 3\sqrt{3} + 3$ となる a の範囲は



$\therefore a > 3\sqrt{3} + 3$ となる a の範囲は

$a > 3\sqrt{3} + 3$ である。

よって

$a = 9$

(6)

(1)

$$x^2 - 4x$$

$$= (2 - \sqrt{3})^2 - 4(2 - \sqrt{3})$$

$$= (4 - 4\sqrt{3} + 3) - 8 + 4\sqrt{3}$$

$$= (7 - 4\sqrt{3}) - 8 + 4\sqrt{3}$$

$$= -1$$

(2)

$$77 \text{ 項式 } x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

$$\text{を } x^2 - 4x + 1 \text{ で割る。}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - x - 1 \\ x^2 - 4x + 1 \overline{) x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2} \\ \underline{x^4 - 4x^3 + x^2} \\ -x^3 + 3x^2 + 3x \\ \underline{-x^3 + 4x^2 - x} \\ -x^2 + 4x + 2 \\ \underline{-x^2 + 4x - 1} \\ 3 \end{array}$$

$$\text{よって (1) の } x^2 - x - 1, \text{ 余りが } 3 \text{ あり}$$

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

$$= (x^2 - 4x + 1)(x^2 - x - 1) + 3 \quad \dots (*)$$

この式を等式が成り立つ。

よって、 x が $x^2 - 4x + 1 = 0$ の解である。

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \text{ と代入する。すると } x = 2 - \sqrt{3}$$

より、(1) から

$$x^2 - 4x = -1$$

$$\therefore x^2 - 4x + 1 = 0$$

が成り立つ。

$$\text{よって } (*) \text{ の } x = 2 - \sqrt{3}$$

代入する。

$$x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2$$

$$= 0 \cdot (x^2 - x - 1) + 3$$

$$= 0 + 3$$

$$= 3$$

$$\frac{5}{2 - \sqrt{3}} = \frac{5(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{10 + 5\sqrt{3}}{4 - 3} = 10 + 5\sqrt{3}$$

$$\frac{4}{2 - \sqrt{3}} = \frac{4(2 + \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}$$

$$= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4 - 3} = 8 + 4\sqrt{3}$$

ゆえに、

$$-10 - 5\sqrt{3} < a < -8 - 4\sqrt{3}$$

(3)

$$A = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + (a+3)x + 4$$

$$= (x^4 - 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2) + ax + 2$$

よって、(2) の結果より上式下線部分

の値は結果は 3 である。

$$x = 2 - \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$$A = 3 + a(2 - \sqrt{3}) + 2$$

$$= 5 + a(2 - \sqrt{3})$$

よって、 a の範囲は $0 < A < 1$ である。

代入して

$$0 < 5 + a(2 - \sqrt{3}) < 1$$

$$a(2 - \sqrt{3}) < -4$$

$$-5 < a(2 - \sqrt{3}) < -4$$

よって、 $a(2 - \sqrt{3})$ の範囲は

$$2 - \sqrt{3} \text{ は } \sqrt{4} - \sqrt{3} \text{ である}$$

正の数で割るので、不等号

正の数で割るので、不等号

の向きは変わらない。

$$\therefore -\frac{5}{2 - \sqrt{3}} < a < -\frac{4}{2 - \sqrt{3}}$$

有理化すると

よって、 a の範囲は

整数 a の範囲は

整数 a の範囲は

$$5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$\text{よって } \sqrt{64} < \sqrt{75} < \sqrt{81}$$

$$\therefore 8 < 5\sqrt{3} < 9$$

(1) の範囲は

$$-8 > -5\sqrt{3} > -9$$

よって、 a の範囲は

$$-18 > -10 - 5\sqrt{3} > -19$$

よって、 $-8 - 4\sqrt{3}$ は

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}$$

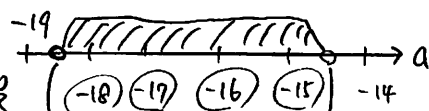
$$\sqrt{36} < \sqrt{48} < \sqrt{49}$$

よって

$$-14 > -8 - 4\sqrt{3} > -15$$

よって、(3) の範囲は

整数 a の範囲は



よって

$$-10 - 5\sqrt{3} < a < -8 - 4\sqrt{3}$$

よって、整数 a は

$$a = -18, -17, -16, -15 \text{ の } 4 \text{ 個}$$

7

$$(1) p = x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax$$

と $x^2 - x + a$ を割る

$$\begin{array}{r} x^2 - x + a \\ x^2 - x \\ \hline x^4 - 2x^3 + (a+1)x^2 - ax \\ -x^3 + (a+1)x^2 \\ \hline -x^3 + x^2 \\ \hline ax^2 - ax \\ \hline ax^2 - ax \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore x^2 - x + a \text{ が } 0$$

(2) (1) の結果より

$$p = (x^2 - x)(x^2 - x + a) + 0$$

より

$$p = (x^2 - x)(x^2 - x + a)$$

と等しい。よって $x^2 - x$ の因数が p の因数である。

$$x = \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x &= \left(\frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \right)^2 - \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \\ &= \frac{1 + 2\sqrt{4b+1} + (\sqrt{4b+1})^2}{4} - \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \\ &= \frac{1 + 4b + 1 + 2\sqrt{4b+1}}{4} - \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \\ &= \frac{2 + 4b + 2\sqrt{4b+1}}{4} - \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \\ &= \frac{1 + 2b + \sqrt{4b+1}}{2} - \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \\ &= \frac{1 + 2b + \sqrt{4b+1} - 1 - \sqrt{4b+1}}{2} = \frac{2b}{2} = b \end{aligned}$$

よって

$$p = (x^2 - x)(x^2 - x + a) = b(b + a)$$

(3) 1

$$x^2 - x = x(x - 1)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{4b+1} - 2}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4b+1} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{4b+1} - 1}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{4b+1})^2 - 1}{4}$$

$$= \frac{4b + 1 - 1}{4} = b$$

(3) 2

$$x = \frac{1 + \sqrt{4b+1}}{2}$$

両辺 2 を掛ける

$$2x = 1 + \sqrt{4b+1}$$

$$2x - 1 = \sqrt{4b+1}$$

両辺 2 を掛ける

$$(2x - 1)^2 = 4b + 1$$

展開する

$$4x^2 - 4x + 1 = 4b + 1$$

$$4x^2 - 4x = 4b$$

両辺 4 で割る

$$x^2 - x = b$$

$$(3) (2) \text{ より } p = b(b + a)$$

より $a \in b \in \mathbb{N}$ である

$b \in b + a \in \mathbb{N}$ である。

今 p の素因数 61 を考える

2 の素因数 b と $a + b$ と

11 と 7 と 61 と 7 と 3 と 2 と 3 と

b と $a + b$ は 61 の因数である。

よって b の正因数は 2 と 3 と

(i) (ii) (iii) (iv)

b	1	2	3	6
a+b	6	3	2	1

の4通りである。

$$(i) \text{ のとき } b = 1, a + b = 6$$

$$\therefore b = 1, a = 5$$

$$(ii) \text{ のとき } b = 2, a + b = 3$$

$$\therefore b = 2, a = 1$$

$$(iii) \text{ のとき } b = 3, a + b = 2$$

$$\therefore b = 3, a = -1$$

a が自然数でないため不適

$$(iv) \text{ のとき } b = 6, a + b = 1$$

$$\therefore b = 6, a = -5$$

a が自然数でないため不適

以上より

$$(a, b) = (5, 1), (1, 2)$$

(おしまい)

$$b \text{ と } a + b \text{ は } 61 \text{ の素因数}$$

$a + b$ の素因数 b より大きいから

(i) (ii) の場合 b は素数である。

[8]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \alpha - \frac{1}{\alpha} &= -1 \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}-1} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}-1-(\sqrt{5}+1)}{2} \\
 &= \frac{-2}{2} = -1
 \end{aligned}$$

すなわち $\alpha - \frac{1}{\alpha} = -1$

の両辺を2乗すると

$$\begin{aligned}
 \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 &= (-1)^2 \\
 \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 &= 1 \\
 \alpha^2 - 2 + \frac{1}{\alpha^2} &= 1 \\
 \therefore \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2} &= 3
 \end{aligned}$$

(2) (1)より $\alpha - \frac{1}{\alpha} = -1$

が成り立つ。(両辺)1乗

α と $\frac{1}{\alpha}$ と

$$\alpha^2 - 1 = -\alpha$$

$$\therefore \alpha^2 = -\alpha + 1$$

よって

$$\alpha^2 = s\alpha + t$$

1 = s' と仮定

$$-\alpha + 1 = s\alpha + t$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ と仮定}$$

$$-\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = s \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + t$$

両辺を2乗して

$$-\sqrt{5} + 1 + 2 = (\sqrt{5}-1)s + 2t$$

$$-\sqrt{5} + 3 = \sqrt{5}s - s + 2t$$

$$\therefore \sqrt{5}s + \sqrt{5} - s + 2t - 3 = 0$$

$$\therefore (s+1)\sqrt{5} + (-s+2t-3) = 0$$

$\therefore s, t$ は有理数

$$s+1 \in \mathbb{Z}, -s+2t-3 \in \mathbb{Z}$$

有理数は整数

よって $s+1=0$ と $-s+2t-3=0$

$$\begin{cases} s+1=0 \\ -s+2t-3=0 \end{cases}$$

で $s=-1, t=1$

$$\therefore s=-1, t=1$$

(3) (2)より

$$\alpha^2 = -\alpha + 1 \quad \dots (*)$$

が成り立つ。= α の両辺1乗 α と $\frac{1}{\alpha}$ と

$$\alpha^3 = -\alpha^2 + \alpha$$

$\therefore \alpha^3 = -\alpha + 1$ と仮定

$$\alpha^3 = -(-\alpha + 1) + \alpha$$

$$= \alpha - 1 + \alpha = 2\alpha - 1 \quad \dots (**)$$

よって (*) (**) より

$$\alpha^3 + p\alpha^2 + q\alpha - 1 = \sqrt{5}$$

1 = s' と仮定

$$(2\alpha - 1) + p(-\alpha + 1) + q\alpha - 1 = \sqrt{5}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ と仮定}$$

$$\left(2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1\right) + p\left(-\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1\right) + q\frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 = \sqrt{5}$$

両辺を2乗して

$$(2\sqrt{5}-4) + p(-\sqrt{5}+3) + q(\sqrt{5}-1) - 2 = 2\sqrt{5}$$

整理して

$$\sqrt{5}(-p+q) + (-6+3p-q) = 0$$

p, q は有理数

$$-p+q \in \mathbb{Z}, -6+3p-q \in \mathbb{Z}$$

有理数は整数

(2) と同様で

$$\begin{cases} -p+q=0 \\ -6+3p-q=0 \end{cases}$$

$\therefore$

$$p=3, q=3$$

9

(1) $x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ あり

$$\begin{aligned} B &= x^2 + x \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \frac{2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $A \in B$ とき

$$\begin{array}{r} x + (a-1) \\ x^2 + x \overline{) x^3 + ax^2 + 4x + b} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ (a-1)x^2 + 4x \\ \underline{(a-1)x^2 + (a-1)x} \\ (5-a)x + b \end{array}$$

商は $x + (a-1)$

余りは $(5-a)x + b$

今、この2つが等しいとき

$$x + (a-1) = (5-a)x + b$$

が恒等式である。ゆえに

$$\begin{cases} 1 = 5-a & (x \text{ の係数}) \\ a-1 = b & (\text{定数項}) \end{cases}$$

$\therefore a = 4, b = 3$

(2) の (1) A は 3次式で B は 2次式

余りは 1次式 である。

よって、余りは $cx + d$ とおける

条件より、商は $(cx + d)$ とおける。

ゆえに

$$A = B(cx + d) + (cx + d)$$

と書ける。 A と B を代入する

$$x^3 + ax^2 + 4x + b = (x^2 + x)(cx + d) + (cx + d)$$

(右辺) を展開する

$$(右辺) = (x^2 + x)(cx + d) + (cx + d)$$

$$= cx^3 + dx^2 + cx^2 + dx + cx + d$$

$$= cx^3 + (d+c)x^2 + (c+d)x + d$$

(左辺) と係数を比較して

$$\begin{cases} 1 = c & (x^3 \text{ の係数}) \\ a = d + c & (x^2 \text{ の係数}) \\ 4 = c + d & (x \text{ の係数}) \\ b = d & (\text{定数項}) \end{cases}$$

解いて

$$a = 4, b = 3, c = 1, d = 3$$

(3) (2) より $a = 4, b = 3$ である。

よって、 $A \in B$ のとき、 $T = 1$ のとき

$$は、\pm 1 = x + 3 \text{ である。}$$

ゆえに

$$A = B(x+3) + (x+3)$$

と書ける。 ± 3 に

よって (右辺) は $(x+3)$ で

因数分解できる。

$$A = (B+1)(x+3) \dots (*)$$

今、 $x = \frac{1}{1-\sqrt{3}}$ とおける。

有理化して

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1-\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1+\sqrt{3}}{1-3} \\ &= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} B &= x^2 + x \\ &= \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1+2\sqrt{3}+3}{4} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって (*) より

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{2} + 1\right) \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2} + 3\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{-1-\sqrt{3}+6}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{15-3\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

10

(1)

$$X^3 + mX^2 + 3nX + m + n - 1 = 0$$

∴ $X = -1$ 是 $f(x) = 0$ の根

代入すると

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + 3n(-1) + m + n - 1 = 0$$

$$-1 + m - 3n + m + n - 1 = 0$$

$$2m - 2n - 2 = 0$$

$$m - n - 1 = 0$$

$$\therefore m = n + 1$$

(2) (1)より $m = n + 1$

∴

$$X^3 + (n+1)X^2 + 3nX + (n+1) + n - 1 = 0$$

∴

$$X^3 + (n+1)X^2 + 3nX + 2n = 0 \dots (*)$$

3次方程式 (*) は $X = -1$ 是 $f(x) = 0$ の根

∴ (*) の左辺は $X + 1$ で

割り切れる。

∴

$$\begin{array}{r} X^2 + nX + 2n \\ X+1 \overline{) X^3 + (n+1)X^2 + 3nX + 2n} \\ \underline{X^3 + X^2} \\ nX^2 + 3nX \\ \underline{nX^2 + nX} \\ 2nX + 2n \\ \underline{2nX + 2n} \\ 0 \end{array}$$

∴ (商) $X^2 + nX + 2n$, 余り 0

∴ (*) の左辺は

$$X^3 + (n+1)X^2 + 3nX + 2n$$

$$= (X+1)(X^2 + nX + 2n)$$

∴ 因数分解が完了した。(*) は

$$(X+1)(X^2 + nX + 2n) = 0$$

∴

$$X+1=0, X^2 + nX + 2n=0$$

と置くと $X+1=0$ からは $X=-1$

と因数分解がでてくる。

$$2次方程式 $X^2 + nX + 2n = 0$$$

∴ 因数分解が出来る。

よして、判別式 $D \geq 0$ が必要

よして

∴

$$D = n^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2n$$

$$= n^2 - 8n$$

$$D \geq 0$$

$$n^2 - 8n \geq 0$$

$$n(n-8) \geq 0$$

∴

$$n \leq 0, n \geq 8$$

(3) (2) のとき

① の根が $-1, \alpha, \beta$

と置くと、② の α, β は

2次方程式

$$X^2 + nX + 2n = 0$$

の2根である。

よして、根と係数の

関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -n \\ \alpha\beta = 2n \end{cases}$$

よして

$$\alpha + \beta = -n, \alpha\beta = 2n \dots (A)$$

が成り立つ。今、与えられた

$$\alpha^3 + \beta^3 = 32$$

$$113. \therefore \alpha^3 + \beta^3 = 32$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

と置くと、(A) を代入すると

$$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 32$$

$$(-n)^3 - 3 \cdot 2n \cdot (-n) = 32$$

$$\therefore -n^3 + 6n^2 - 32 = 0$$

$$n^3 - 6n^2 + 32 = 0 \dots (**)$$

∴ (**) の左辺は $n-2$

で代入すると

$$(-2)^3 - 6(-2)^2 + 32$$

$$= -8 - 24 + 32 = 0$$

よして (**) の左辺は $n-2$

で割り切れる。

$$\begin{array}{r} n^2 - 8n + 16 \\ n+2 \overline{) n^2 - 6n^2 + 32} \\ \underline{n^2 + 2n^2} \\ -8n^2 - 16n \\ \underline{-8n^2 - 16n} \\ 16n + 32 \\ \underline{16n + 32} \\ 0 \end{array}$$

(商) $n^2 - 8n + 16$, 余り 0

∴ (*) の左辺は

$$n^3 - 6n^2 + 32 = (n+2)(n^2 - 8n + 16)$$

$$= (n+2)(n-4)^2$$

∴ 因数分解が完了した。

与えられた (*) の根は

$$(n+2)(n-4)^2 = 0$$

$$\therefore n = -2, 4$$

よして、(2) の

$$n \leq 0, n \geq 8$$

と置くと、3つの

$$n = -2$$

のみ。

(11)

$$(1) \quad x^3 - (a+1)x^2 + 2ax + b = 0$$

(2) $x=1$ とき $x=1$ は方程式の解である。

$$1^3 - (a+1) \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0$$

$$1 - a - 1 + 2a + b = 0$$

$$b + a = 0 \quad \therefore b = -a$$

(2) (1) より $b = -a$ とおける。

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a = 0 \quad (*)$$

方程式 (*) は $x=1$ とき $x=1$ は方程式の解である。

(*) の方程式は $x-1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r} x^3 - ax^2 + ax - a \\ x-1 \overline{) x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ -ax^2 + 2ax \\ \underline{-ax^2 + ax} \\ ax - a \\ \underline{ax - a} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore x^2 - ax + a$$

余り 0

よって (*) の方程式は

$$x^3 - (a+1)x^2 + 2ax - a = (x-1)(x^2 - ax + a)$$

よって方程式 (*) は $x=1$ とき $x=1$ は方程式の解である。

方程式 (*) は

$$(x-1)(x^2 - ax + a) = 0$$

$$\therefore x-1=0, x^2 - ax + a=0$$

よって $x-1=0$ より $x=1$ である。

実数解が 2 つあるとき (*) は

虚数解を 2 つ持つとき (*) は

2 次方程式 $x^2 - ax + a = 0$

が虚数解を 2 つ持つとき (*) は

2 つ

2 つ $D < 0$ である。

$$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a$$

$$= a^2 - 4a$$

$$\therefore D < 0 \text{ かつ}$$

$$a^2 - 4a < 0$$

$$a(a-4) < 0$$

よって

$$0 < a < 4$$

(3) (2) のとき、2 つの虚数解

と α, β がある。このとき α, β は

$$2$$
 次方程式 $x^2 - ax + a = 0$

の 2 解であり、解と係数の

関係から

$$\alpha + \beta = -\frac{-a}{1}, \alpha\beta = \frac{a}{1}$$

よって

$$\alpha + \beta = a, \alpha\beta = a \quad (**)$$

が成り立つ。今、方程式 $x^2 - ax + a = 0$ の

$$x^2 + cx + 4a^2 - a - 6 = 0$$

2 解 α, β がある。このとき α, β は

$$(**) \text{ より } \alpha + \beta = a, \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = a^2$$

よって

$$2$$
 次方程式 $x^2 + cx + 4a^2 - a - 6 = 0$

の 2 解は a と a^2

である。よって、解と係数の

関係から

$$\begin{cases} a + a^2 = -\frac{c}{1} \\ a \cdot a^2 = \frac{4a^2 - a - 6}{1} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} a + a^2 = -c \quad \dots \quad (1) \\ a^3 = 4a^2 - a - 6 \end{cases}$$

よって (1) より

$$a^3 - 4a^2 + a + 6 = 0 \quad (2)$$

(2) の方程式は $a = -1$ とき (*) は

$$(-1)^3 - 4(-1)^2 + (-1) + 6$$

$$= -1 - 4 - 1 + 6 = 0$$

よって (2) の方程式は $a = -1$ とき (*) は

2 つの解がある。

$$\begin{array}{r} a^3 - 4a^2 + a + 6 \\ a+1 \overline{) a^3 - 4a^2 + a + 6} \\ \underline{a^3 + a^2} \\ -5a^2 + a \\ \underline{-5a^2 - 5a} \\ 6a + 6 \\ \underline{6a + 6} \\ 0 \end{array}$$

よって $a^2 - 5a + 6 = 0$ 、余り 0

よって (2) は

$$(a+1)(a^2 - 5a + 6) = 0$$

$$(a+1)(a-2)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = -1, 2, 3$$

$$= 2 \text{ とき } 0 < a < 4$$

$$a = 2, 3$$

よって (2) のとき (*) は

$$-c = a + a^2$$

$$\therefore c = -(a + a^2)$$

$$= -(2 + 2^2)$$

$$= -(2 + 4) = -6$$

よって (2) のとき (*) は

$$-c = a + a^2$$

$$c = -(a + a^2)$$

$$= -(3 + 3^2)$$

$$= -(3 + 9) = -12$$

よって (*) は

$$c = -6, -12$$

12

$$(1) x^3 + px^2 + (1-p)x + 2 = 0$$

∵ $x=2$ は解であるから

$$2^3 + p \cdot 2^2 + (1-p) \cdot 2 + 2 = 0$$

$$8 + 4p + 2 - 2p + 2 = 0$$

$$10 + 2p + 2 = 0$$

$$\therefore p = -2p - 10$$

$$(2) (1) \text{より } p = -2p - 10$$

$$\therefore x^3 + px^2 + (1-p)x + (-2p-10) = 0 \quad (*)$$

また $(*)$ の解として $x=2$ は解であるから

$$x-2 \overline{) x^3 + px^2 + (1-p)x + (-2p-10)}$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$(p+2)x^2 + (1-p)x$$

$$(p+2)x^2 - 2(p+2)x$$

$$(p+5)x + (-2p-10)$$

$$(p+5)x - 2(p+5)$$

$$\therefore x^2 + (p+2)x + (p+5) = 0 \quad \text{余り } 0$$

よって、方程式 $(*)$ は

$$x^3 + px^2 + (1-p)x + (-2p-10) = 0$$

$$\therefore (x-2) \{ x^2 + (p+2)x + (p+5) \} = 0$$

よって

$$x-2=0 \text{ または } x^2 + (p+2)x + (p+5) = 0 \quad \Rightarrow (2) \text{ を用いて}$$

$$\Rightarrow x-2=0 \text{ より } x=2$$

よって $x=2$ は $(*)$ の解であるから

$$x^2 + (p+2)x + (p+5) = 0$$

1) 虚数解を持つとき

$$\therefore D = (p+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p+5)$$

$$= p^2 + 4p + 4 - 4p - 20$$

$$= p^2 - 16$$

虚数解を持つとき $D < 0$ より

$$p^2 - 16 < 0$$

$$(p-4)(p+4) < 0$$

$$\therefore -4 < p < 4$$

$$(3) (2) \text{より } x^2 + (p+2)x + (p+5) = 0$$

2つの解 α, β は

$$x^2 + (p+2)x + (p+5) = 0$$

∴ 2つの解 α, β は

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(p+2) \\ \alpha\beta = p+5 \end{cases}$$

また

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(p+2) \\ \alpha\beta = p+5 \end{cases} \quad (2)$$

が成り立つとき、 α, β は方程式 $x^2 + kx + 4 = 0$ の2つの解である

$$x^2 + kx + 4 = 0 \text{ の2つの解 } \alpha, \beta$$

よって、2つの解 α, β は

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{k}{1} \\ \alpha^2\beta^2 = \frac{4}{1} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = -k \\ \alpha^2\beta^2 = 4 \end{cases}$$

変形すると

$$\begin{cases} (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = -k \\ (\alpha\beta)^2 = 4 \end{cases}$$

(2)より

$$\begin{cases} (p+2)^2 - 2(p+5) = -k \\ (p+5)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\therefore (p+5)^2 = 4$$

∴

$$p+5 = \pm 2$$

$$p = -5 \pm 2$$

$$\therefore p = -7, -3$$

$$(2) \text{より } -4 < p < 4$$

よって $p = -3$ である

$$p = -3$$

∴

$$(p+2)^2 - 2(p+5) = -k$$

$$\therefore k = -(p+2)^2 + 2(p+5)$$

$$= -(-3+2)^2 + 2(-3+5)$$

$$= -(-1)^2 + 2 \cdot 2$$

$$= -1 + 4 = 3$$

よって

$$(p, k) = (-3, 3)$$

(13)

$$\begin{aligned} (1) \frac{10}{3+i} &= \frac{10(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{10(3-i)}{3^2-i^2} \\ &= \frac{10(3-i)}{9-(-1)} \\ &= \frac{10(3-i)}{10} \\ &= \underline{3-i} \end{aligned}$$

(2) 3: 2 次方程式

$$(x-a)(x^2+bx+c)=0$$

α 解は

$$x-a=0 \text{ かつ } x^2+bx+c=0$$

である。 $x-a=0$ より $x=a$

という実数解が成り立つ。よって、

2: 2 次方程式

$$x^2+bx+c=0 \text{ は虚数解}$$

を持つ。すなわち、実数解と

$$\text{虚数解の } \frac{10}{3+i}$$

つまり $3-i$ である。よって $a=2$

のとき、虚数解 α は $1-i$ と $1+i$ である。

$$a+\alpha=3-i$$

$$2+\alpha=3-i$$

$$\therefore \alpha=1-i$$

である。 α は 2: 2 次方程式

$$x^2+bx+c=0 \text{ の解である。}$$

代入して

$$(1-i)^2+b(1-i)+c=0$$

$$1-2i+i^2+b-bi+c=0$$

$$1-2i+(-1)+b-bi+c=0$$

$$(b+c)-(2+b)i=0$$

$$\therefore b+c=2+b \text{ かつ } -(2+b)=0$$

$$\begin{cases} b+c=0 \\ 2+b=0 \end{cases}$$

$$\text{よって } b=-2, c=2$$

(2) $\alpha=1+i$ と同じこと

$$2: 2 \text{ 次方程式 } x^2+bx+c=0$$

は $\alpha=1-i$ と $\alpha=1+i$ の解を持つ。

$$\therefore \alpha=1-i$$

$$\alpha-1=-i$$

両辺を2乗して

$$\alpha^2-2\alpha+1=-1$$

$$\therefore \alpha^2-2\alpha+2=0$$

$$\text{よって } x^2+bx+c=0$$

$$\text{と係数比較して } b=-2, c=2$$

(3) $\alpha=1+i$ と同じこと

$$2: 2 \text{ 次方程式 } x^2+bx+c=0$$

が $\alpha=1-i$ と $\alpha=1+i$ の解を持つ。

α の共役な複素数である

$$1+i \text{ と } 1-i \text{ の積は } 2 \text{ である。}$$

よって、解は $1-i$ と $1+i$ の積である。

$$\begin{cases} (1+i)+(1-i)=-\frac{b}{1} \\ (1+i)(1-i)=\frac{c}{1} \end{cases}$$

$$\therefore b=-2, c=2$$

(3) (2) と同じこと

虚数解 α は $1-i$

$$a+\alpha=3-i$$

$$\therefore \alpha=3-a-i$$

と表すことができる。よって

$$\alpha=(3-a)-i$$

$$2: 2 \text{ 次方程式 } x^2+bx+c=0$$

α の共役な複素数である

よって、解は $1-i$ と $1+i$ の積である。

$$(3-a)+i$$

α の共役な複素数である

よって、解は $1-i$ と $1+i$ の積である。

よって、

$$a, (3-a)+i, (3-a)-i$$

と表すことができる。

$$\therefore 3-a-i \text{ と } 3-a+i \text{ の積は } 4 \text{ である。}$$

$$a^2+\{(3-a)+i\}^2+\{(3-a)-i\}^2=4$$

$$\therefore$$

$$(3-a)^2=a^2$$

$$+ \{(3-a)^2+2(3-a)i+i^2\}$$

$$+ \{(3-a)^2-2(3-a)i+i^2\}$$

$$= a^2+2(3-a)^2+2i^2$$

$$= a^2+2(9-6a+a^2)-2$$

$$= 3a^2-12a+16$$

よって

$$3a^2-12a+16=4$$

$$3a^2-12a+12=0$$

$$a^2-4a+4=0$$

$$(a-2)^2=0$$

$$\therefore a=2$$

14

(1) 3-8 1/2 1/2 1/2

$$x^3 + (a+5)x^2 + (2a+b+12)x + a^2 - b = 0$$

or $x = -2$ is a root, so it is a factor

$$(-2)^3 + (a+5)(-2)^2 + (2a+b+12)(-2) + a^2 - b = 0$$

$$-8 + 4a + 20 - 4a - 2b - 24 + a^2 - b = 0$$

$$a^2 - b - 12 = 0$$

$$\therefore b = a^2 - 12$$

(2) (1) 5-1 $b = a^2 - 12$ is a factor

$$x^3 + (a+5)x^2 + (2a+a^2-12+12)x + a^2 + a^2 - 12 = 0$$

$$\therefore x^3 + (a+5)x^2 + (2a+a^2)x + 2a^2 - 12 = 0 \dots (*) \quad a < -2\sqrt{3}, a > 1+2\sqrt{3}$$

$\therefore$ the factor of (*) is $x = -2$ is a factor

(*) on 2 is $x+2$ is a factor

$$\begin{array}{r} x^2 + (a+3)x + (a^2-6) \\ x+2 \overline{) x^3 + (a+5)x^2 + (2a+a^2)x + 2a^2-12} \\ \underline{x^3 + 2x^2} \\ (a+3)x^2 + (2a+a^2)x + 2a^2-12 \\ \underline{(a+3)x^2 + 2(a+3)x} \\ (a^2-6)x + 2a^2-12 \\ \underline{(a^2-6)x + 2(a^2-6)} \\ 0 \end{array}$$

$$\therefore x^2 + (a+3)x + (a^2-6) \text{ is a factor}$$

or 1/2 1/2 1/2 (*) is

$$(x+2) \{ x^2 + (a+3)x + (a^2-6) \} = 0$$

or 1/2 1/2 1/2 is a factor

$$x+2=0 \text{ or } x^2 + (a+3)x + (a^2-6) = 0$$

$$x+2=0 \text{ or } x = -2 \text{ is a factor}$$

or 1/2 1/2 1/2 (*) is a factor

$$2-1/2 1/2 1/2 x^2 + (a+3)x + (a^2-6) = 0$$

or 1/2 1/2 1/2 is a factor

or 1/2 1/2 1/2

$$\begin{aligned} D &= (a+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2-6) \\ &= a^2 + 6a + 9 - 4a^2 + 24 \\ &= -3a^2 + 6a + 33 \end{aligned}$$

$$\therefore -3a^2 + 6a + 33 < 0$$

$$a^2 - 2a - 11 > 0$$

$$\therefore a^2 - 2a - 11 = 0$$

$$\therefore a = \frac{2 \pm \sqrt{4+44}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

$$a^2 + 6a + 9 + a^2 - 6 = 11$$

$$2a^2 + 6a - 8 = 0$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$(a+4)(a-1) = 0$$

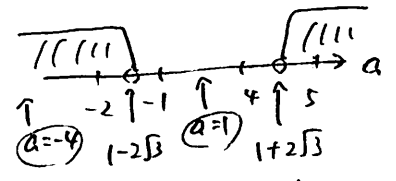
$$\therefore a = -4, 1$$

$$= -7, 2 \text{ is a factor}$$

$$a < -2\sqrt{3}, a > 1+2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{12} \text{ is a factor}$$

$$3 < \sqrt{12} < 4 \text{ is a factor}$$



$$a = 1 \text{ is a factor}$$

$$\therefore a = -4$$

(3) 1/2 1/2 1/2 (*) is a factor

or 1/2 1/2 1/2, or 1/2 1/2

or 1/2 1/2 1/2, or 1/2 1/2

$$2-1/2 1/2 1/2 x^2 + (a+3)x + (a^2-6) = 0$$

$$x^2 + (-4+3)x + (-4)^2 - 6 = 0$$

$$\therefore x^2 - x + 10 = 0$$

$$or 1/2 1/2 1/2$$

$$x = 1 \text{ or } x = -10$$

$$\therefore x^2 - x + 10 = 0$$

$$\therefore x^2 = x - 10$$

$$or 1/2 1/2 1/2$$

$$\therefore \begin{cases} x + y = -(a+3) \\ xy = a^2 - 6 \end{cases}$$

$$or 1/2 1/2 1/2 \therefore x + y = 11$$

$$x^2 + 3xy + y^2 = 11$$

$$or 1/2 1/2 1/2$$

$$(x+y)^2 + xy = 11$$

$$or 1/2 1/2 1/2 (x+y)^2 + (a^2-6) = 11$$

$$(a+3)^2 + (a^2-6) = 11$$

$$or 1/2 1/2 1/2$$

$$\begin{aligned} (x+y)^2 + xy &= (1-10) + 3(1-10) \\ &= 4 + 4(-10) \\ &= 4 - 40 \\ &= -36 \end{aligned}$$

$$\therefore (x+y)^2 + xy = -36$$

$$\therefore (x+y)^2 + xy = -36$$

$$\therefore (x+y)^2 + xy = -36$$

$$\therefore (x+y)^2 + xy = -36$$

15

$$(1) P(x) = x^3 + (a-2)x^2 + (4-2a)x - 8$$

5.7

$$P(2) = 2^3 + (a-2) \cdot 2^2 + (4-2a) \cdot 2 - 8$$

$$= 8 + 4a - 8 + 8 - 4a - 8$$

$$= 0$$

ゆえに $X=2$ のとき $P(x)$ の値は 0 となる

$P(x)$ は $X-2$ で割り切れる

$$\begin{array}{r} X^2 + ax + 4 \\ X-2 \overline{) X^3 + (a-2)x^2 + (4-2a)x - 8} \\ \underline{X^3 - 2x^2} \\ 4x^2 + (4-2a)x - 8 \end{array}$$

$$\underline{4x^2 - 2ax}$$

$$4x - 8$$

$$\underline{4x - 8}$$

$$0$$

$$\text{商 } X^2 + ax + 4$$

$$\text{余り } 0$$

ゆえに

$$P(x) = (x-2)(x^2 + ax + 4)$$

(2) 方程式 $P(x) = 0$ の解は

(1) より

$$(x-2)(x^2 + ax + 4) = 0$$

$$\therefore x-2=0 \text{ または } x^2 + ax + 4 = 0$$

よって $\alpha = b + \sqrt{3}i$ が $P(x) = 0$ の解

である。また α は 2 -乗根である

$$x^2 + ax + 4 = 0 \text{ の解である}$$

ゆえに α は 1 の 2 乗根

$$(b + \sqrt{3}i)^2 + a(b + \sqrt{3}i) + 4 = 0$$

$$(b^2 + 2b\sqrt{3}i + 3i^2) + ab + a\sqrt{3}i + 4 = 0$$

$$b^2 + 2b\sqrt{3}i - 3 + ab + a\sqrt{3}i + 4 = 0$$

ゆえに

$$(b^2 + ab + 1) + (2b\sqrt{3} + a\sqrt{3})i = 0$$

$$\therefore b^2 + ab + 1 \text{ と } 2b\sqrt{3} + a\sqrt{3} \text{ は}$$

実数である

$$\begin{cases} b^2 + ab + 1 = 0 \dots (1) \\ 2b\sqrt{3} + a\sqrt{3} = 0 \dots (2) \end{cases}$$

(2) より

$$a\sqrt{3} = -2b\sqrt{3}$$

$$\therefore a = -2b$$

$$\therefore a = -2b \text{ と } 1 = \lambda \text{ と}$$

$$b^2 + (-2b) \cdot b + 1 = 0$$

$$-b^2 + 1 = 0$$

$$\therefore b = \pm 1$$

$$\therefore b > 0 \text{ より } b = 1$$

$$a = -2b \text{ より } a = -2$$

(2) (3) より

$$\alpha = b + \sqrt{3}i \text{ かつ } 2\alpha^2 + a\alpha + 4 = 0$$

$$x^2 + ax + 4 = 0 \text{ の解である}$$

$$\alpha \text{ の共役複素数 } \bar{\alpha} \text{ である}$$

$$b - \sqrt{3}i \text{ かつ } 1 = \lambda \text{ と}$$

ゆえに α と $\bar{\alpha}$ は $x^2 + ax + 4 = 0$ の解

$$\begin{cases} (b + \sqrt{3}i) + (b - \sqrt{3}i) = -\frac{a}{1} \\ (b + \sqrt{3}i)(b - \sqrt{3}i) = \frac{4}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2b = -a \\ b^2 + 3 = 4 \end{cases}$$

よって

$$b^2 + 3 = 4$$

$$b > 0 \text{ より } b = 1$$

よって

$$2b = -a \therefore a = -2$$

(3) (2) より $P(x) = 0$ の 2 つの解は

$$\alpha, \beta \text{ は } 2\alpha^2 + a\alpha + 4 = 0 \text{ の解}$$

である。また α と β は $x^2 + ax + 4 = 0$ の解

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{a}{1} \\ \alpha\beta = \frac{4}{1} \end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \dots (3) \\ \alpha\beta = 4 \dots (4) \end{cases}$$

また α と β は 2 乗根である

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= 2^2 - 2 \cdot 4$$

$$= 4 - 8$$

$$= -4 \dots (5)$$

また

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 4 \cdot 2$$

$$= 8 - 24$$

$$= -16 \dots (6)$$

ゆえに (5), (6) より

$$(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) = (-4) \cdot (-16)$$

また α と β は 2 乗根である

$$\alpha^5 + \alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2 + \beta^5 = 64$$

$$(\alpha^5 + \beta^5) + (\alpha^2\beta^3 + \alpha^3\beta^2) = 64$$

$$(\alpha^5 + \beta^5) + \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) = 64$$

$$\therefore (\alpha^5 + \beta^5) + (\alpha\beta)^2(\alpha + \beta) = 64$$

(3), (4) より

$$(\alpha^5 + \beta^5) + 4^2 \cdot 2 = 64$$

$$\alpha^5 + \beta^5 = 64 - 32$$

$$= 32 \dots (7)$$

よって (5), (6), (7) より

$$\alpha^5 + \beta^5 + 4\alpha^3 + 4\beta^3$$

$$= (\alpha^5 + \beta^5) + 4(\alpha^3 + \beta^3)$$

$$= 32 + 4 \cdot (-16)$$

$$= 32 - 64$$

$$= -32$$

(2) 項定理より

$$(\alpha + \beta)^5 = {}_5C_0 \alpha^5 + {}_5C_1 \alpha^4 \beta + {}_5C_2 \alpha^3 \beta^2$$

$$+ {}_5C_3 \alpha^2 \beta^3 + {}_5C_4 \alpha \beta^4 + {}_5C_5 \beta^5$$

$$= \alpha^5 + 5\alpha^4 \beta + 10\alpha^3 \beta^2 + 10\alpha^2 \beta^3 + 5\alpha \beta^4 + \beta^5$$

より

$$(\alpha + \beta)^5 = (\alpha^5 + \beta^5) + 5(\alpha^4 \beta + \alpha \beta^4) + 10(\alpha^3 \beta^2 + \alpha^2 \beta^3)$$

$$= (\alpha^5 + \beta^5) + 5\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) + 10\alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta)$$

と変形する。また α と β は 2 乗根である

(16)

$$(1) \quad (1-2i)(a+bi) = \frac{-4+3i}{10}$$

$$a+bi-2ai-2bi^2 = \frac{-4+3i}{10}$$

$$a+bi-2ai-2b(-1) = \frac{-4+3i}{10}$$

$$\therefore (a+2b) + (b-2a)i = -\frac{4}{10} + \frac{3}{10}i$$

$a+2b, b-2a$ 係数比較より

$$\begin{cases} a+2b = -\frac{4}{10} \\ b-2a = \frac{3}{10} \end{cases}$$

a, b の連立方程式を解く

$$a = -\frac{1}{5}, b = -\frac{1}{10}$$

$$(2) \quad \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i}$$

分子・分母に 10 をかけると

$$\frac{1}{-\frac{1}{5} - \frac{1}{10}i} = \frac{10}{-2-i}$$

$$= -\frac{10}{2+i}$$

$$= -\frac{10(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$= -\frac{10(2-i)}{4-i^2}$$

$$= -\frac{10}{5}(2-i)$$

$$= -2(2-i)$$

$$= -4+2i$$

$$\therefore \frac{1}{a+bi} = -4+2i$$

である。

$z = i$

$$x^2 + px + q = 0$$

の解が a かつ $-4+2i$ である

代入して

$$(-4+2i)^2 + p(-4+2i) + q = 0$$

$$(16-16i+4i^2) - 4p + 2pi + q = 0$$

$$16-16i-4-4p+2pi+q=0$$

$$(12-4p+q) + (-16+2p)i = 0$$

$$12-4p+q, -16+2p$$

$$\begin{cases} 12-4p+q=0 \\ -16+2p=0 \end{cases}$$

$$\therefore p = 8, q = 20$$

$$(17) \quad x^2 + px + q = 0$$

解が a かつ $-4+2i$ である

もう一つの解は共役な

複素数の $-4-2i$ である。

$\therefore$ 解と係数の関係より

$$\begin{cases} (-4-2i) + (-4+2i) = -\frac{p}{1} \\ (-4-2i)(-4+2i) = \frac{q}{1} \end{cases}$$

$\therefore$

$$-8 = -p$$

$$16-4i^2 = q$$

$$\therefore p = 8, q = 20$$

$$(3) (2) \text{より } p = 8, q = 20$$

3次方程式

$$kx^3 + x^2 + px + 20 = 0$$

の解が a かつ i かつ i である。

i と i と $(i \text{ は実数})$ 。代入して

$$k(i)^3 + (i)^2 + 8(i) + 20 = 0$$

$$k(-i) - 1 + 8i + 20 = 0$$

$\therefore$

$$(-1+20) + (-k+8)i = 0$$

$$\therefore -1+20, -k+8$$

係数比較より

$$\begin{cases} -1+20 = 0 \\ -k+8 = 0 \end{cases}$$

$$-k+8 = 0$$

$$\therefore k = 8, q = 20$$

$$\frac{2}{5}x^3 + x^2 + 8x + 20 = 0$$

$$2x^3 + 5x^2 + 40x + 100 = 0$$

$$\therefore \text{解は } 2\sqrt{5}i \text{ と } -2\sqrt{5}i$$

と i である。

$$(x-2\sqrt{5}i)(x+2\sqrt{5}i)$$

で割り切れる。 $\therefore$ 求める

$$(x-2\sqrt{5}i)(x+2\sqrt{5}i)$$

$$\begin{array}{r} 2x+5 \\ x^2+20 \overline{) 2x^3+5x^2+40x+100} \\ \underline{2x^3 \quad + 40x} \\ 5x^2 \quad + 100 \\ \underline{5x^2 \quad + 100} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$

$$2x^3 + 5x^2 + 40x + 100 = 0$$

$$(2x+5)(x^2+20) = 0$$

$$\therefore 2x+5=0 \text{ かつ } x^2+20=0$$

$$2x+5=0 \text{ より } x = -\frac{5}{2}$$

$$x^2+20=0 \text{ より } x = \pm 2\sqrt{5}i$$

以上より

$$x = -\frac{5}{2}, \pm 2\sqrt{5}i$$

17

(1) $P(x) = 2x^3 - 2(a-2)x^2 - (a+4)x - 3a^2 + 4a$

∴

$$\begin{aligned} P(a) &= 2a^3 - 2(a-2)a^2 - (a+4)a - 3a^2 + 4a \\ &= 2a^3 - 2a^3 + 4a^2 - a^2 - 4a - 3a^2 + 4a \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) (1)より $P(a) = 0$ であり、

$P(x)$ は $x-a$ で割り切れる。したがって、

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 4x + (3a-4) \\ x-a \overline{) 2x^3 - 2(a-2)x^2 - (a+4)x - 3a^2 + 4a} \\ \underline{2x^3 - 2ax^2} \\ 4x^2 - (a+4)x \\ \underline{4x^2 - 4ax} \\ (3a-4)x - 3a^2 + 4a \\ \underline{(3a-4)x - 3a^2 + 4a} \\ 0 \end{array}$$

よって $\frac{2x^3 + 4x + (3a-4)}{x-a}$

すなわち、

$P(x) = (x-a) \{ 2x^2 + 4x + (3a-4) \}$

∴ 因数分解したところ、方程式 $P(x) = 0$

は $(x-a) \{ 2x^2 + 4x + (3a-4) \} = 0$

∴ $x-a=0$ 、すなわち $2x^2 + 4x + (3a-4) = 0$

より $x=a$ という実数解が1つ得られる。

また、2次方程式 $2x^2 + 4x + (3a-4) = 0$

は虚数解と実数解とを2つ持つ。すなわち $\Delta \geq 0$

$D < 0$ である。

$D/4 = 2^2 - 2 \cdot (3a-4)$

$= 4 - 6a + 8$

$= 12 - 6a$

よって $12 - 6a < 0$

$-6a < -12$

$\therefore a > 2$

(3)

(1)より、実数解 α は $x=a$ である。 $\therefore \alpha = a$

すなわち、虚数解 β, γ は 2次方程式 $2x^2 + 4x + (3a-4) = 0$ の2解である。解と係数の関係より

$$\begin{cases} \beta + \gamma = -\frac{4}{2} \\ \beta\gamma = \frac{3a-4}{2} \end{cases}$$

∴

$$\begin{cases} \beta + \gamma = -2 \\ \beta\gamma = \frac{3a-4}{2} \end{cases} \quad \text{--- (2)}$$

∴ 2次方程式、

$2(\alpha+1)^2 + (\beta+1)^2 + (\gamma+1)^2 = 29$

が成り立ち、7になる。 $\alpha = a$ であり、すなわち必要部分に代入する。

$2(a+1)^2 + (\beta+1)^2 + (\gamma+1)^2 = 29$

$2(a^2 + 2a + 1) + (\beta^2 + 2\beta + 1) + (\gamma^2 + 2\gamma + 1) = 29$

$2a^2 + 4a + 2 + \{ (\beta+\gamma)^2 - 2\beta\gamma \} + 2(\beta+\gamma) - 2 = 0$

(2)より代入して

$2a^2 + 4a + 2 + \{ (-2)^2 - 2 \cdot \frac{3a-4}{2} \} + 2(-2) - 2 = 0$

$2a^2 + 4a + 2 + \{ 4 - (3a-4) \} - 4 - 2 = 0$

$2a^2 + 4a + 2 + 8 - 3a - 4 - 2 = 0$

$2a^2 + a - 2 = 0$

$(2a+7)(a-3) = 0$

∴ $a = -\frac{7}{2}, 3$

∴ (2)より $a > 2$ であるから $a = -\frac{7}{2}$ は不適

$\therefore a = 3$

18

$$(1) P(x) = x^3 - (a+3)x^2 + ax + (2a+4)$$

$$x - 2z = 3$$

$$\begin{array}{r}
 x^2 + (-a-1)x + (-a-2) \\
 x-2 \overline{) x^3 - (a+3)x^2 + ax + (2a+4)} \\
 \underline{x^3 - 2x^2} \\
 (-a-1)x^2 + ax \\
 \underline{(-a-1)x^2 - 2(-a-1)x} \\
 (-a-2)x + (2a+4) \\
 \underline{(-a-2)x - 2(-a-2)} \\
 0
 \end{array}$$

(8) $x^2 + (-a-1)x + (-a-2)$
余 0

(2) (1)の結果より

$$p(x) = x^3 - (a+3)x^2 + ax + (2a+4)$$

$$= (x-2) \{ x^2 + (-a-1)x + (-a-2) \}$$

① 因数分解できる。ニニで

$$x^2 + (-a-1)x + (-a-2)$$

1 = 7117

$$\begin{array}{rcl} 1 & 1 & \rightarrow 1 \\ 1 & x & -a-2 \rightarrow -a-2 \\ & & \hline & & -a-1 \end{array}$$

51

$$\begin{aligned} & x^2 + (-a-1)x + (-a-2) \\ &= (x+1) \{ x+(-a-2) \} \\ &= (x+1)(x-a-2) \end{aligned}$$

①因式分解できる。 $421 =$

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x-2) \{ x^2 + (-a-1)x + (-a-2) \} \\
 &= (x-2)(x+1)(x-a-2)
 \end{aligned}$$

272307. $\frac{1}{h} \oint_{\Gamma} P(x) = 0$ の証明

$$x-2=0 \quad \text{für } x=2 \quad x+1=0 \quad \text{für } x=-1 \quad x-9-2=0$$

$$\therefore x = 2 - 1 \cdot a + 2$$

13) $3 \times 10^8 \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot P(x) = 0$ का.

$\alpha < \beta < r$ 的 3 个实数解 α, β, r 的 1 个。

(2) 5). $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ $2, -1, a+2$ a Эйлеровы.

$$= 7. a < 0 \text{ 且 } \frac{2}{3} \leq a < 1. a+2 \text{ 与 } 2 \text{ 互质。}$$

ゆえに: $x=2$ が $2, -1, a+2$ の中で一番大きいから

$r = 2$ のとき上下、 -1 と $a+2$ の大小関係で場合分け。

• $a + 2a \frac{1}{n} - 1$ (1.1.1)

$$a+2 > -1 \quad \therefore a > -3 \quad \text{and} \quad a < 0.5$$

$$-3 < a < 0.5$$

2003) $\alpha = -1$, $\beta = a+2$, $\gamma = 2$ ("

$$2|\beta| = 2 + r \Leftrightarrow 2|a+2| = (-1)^{r+2}$$

5.7 $2|a+2|=1$

$$\therefore |a+2| = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = \pm \frac{1}{2} \quad a = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$

$\therefore 31253t \quad -3 < a < 0 \text{ 且 } 7=7$

• $-1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\Rightarrow -1 \leq \frac{1}{n} \leq 1$

$$-1 > a + 2 \quad \therefore a < -3 \quad \text{a.b.}$$

$$= a^{10} \quad \alpha = a+2, \beta = -1, r = 2 \text{ s.t.}$$

$$2|\beta| = \alpha + r \Leftrightarrow 2|-1| = (\alpha + 2) + 2$$

$$2 = a + 4$$

$\varphi_{ji} = \begin{matrix} Q = -2 & (K = 412 \\ Q = -3 \text{ 且 } \left(\frac{5}{3}\right) = 1.67 \end{matrix}$

以上より、求める Q の値は

$$Q = -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$$

(19)

$$(1) \alpha = \frac{2}{1+i}$$

$$= \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= \frac{2(1-i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{2(1-i)}{2}$$

$$= 1-i$$

よて $\alpha = 1-i$ と仮定して
 与えられた方程式で
 x^2 の係数を比較して
 α の値を求める。

$$\alpha = 1-i$$

$$\alpha - 1 = -i$$

両辺を2乗して

$$(\alpha - 1)^2 = (-i)^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = -1$$

$$\therefore \alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0$$

$$\text{よて } \alpha = 1-i \text{ は}$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

の解である。

(20)

$$\alpha = 1-i$$

が解であることは、

α の共役複素数

である $1+i$ は

与えられた方程式の解である。

$$\text{よて } 1-i \text{ と } 1+i$$

が解であることは、与えられた方程式で

$$\text{両辺 } (1-i) + (1+i)$$

$$= 2$$

$$\text{両辺 } (1-i)(1+i)$$

$$= 1-i^2 = 2$$

よて

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

である。

(2) 3つの方程式

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{が } \alpha = 1-i \text{ と } \beta = 1+i \text{ の解である。}$$

代入して

$$(1-i)^3 + a(1-i)^2 + b(1-i) + c = 0$$

展開して

$$(1-3i+3i^2-i^3) + a(1-2i+i^2) + b(1-i) + c = 0$$

$$(-2-2i) + a(-2i) + b - bi + c = 0$$

$\therefore$

$$(-2+b+c) + (-2-2a-b)i = 0$$

$$-2+b+c \text{ と } -2-2a-b \text{ は実数である}$$

$$\begin{cases} -2+b+c = 0 & \dots \textcircled{1} \\ -2-2a-b = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\therefore \textcircled{2} \text{ より } b = -2a-2$$

$$\textcircled{1} \text{ に代入して}$$

$$-2-2a-2+c = 0$$

$$\therefore c = 2a+4$$

$$\textcircled{3} \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \text{ において}$$

$$x = \alpha \text{ と } \beta \text{ は与えられた方程式の}$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \text{ の解である。}$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-p)(x^2 - 2x + 2)$$

と因数分解できることを示す。

$$(左辺) = x^3 - 2x^2 + 2x - px^2 + 2px - 2p$$

$$= x^3 + (-2-p)x^2 + (2+2p)x - 2p$$

係数を比較して

$$\begin{cases} -2-p = a & (x^2 \text{ の係数}) \dots \textcircled{1}' \\ 2+2p = b & (x \text{ の係数}) \dots \textcircled{2}' \\ -2p = c & (\text{定数項}) \dots \textcircled{3}' \end{cases}$$

$$\textcircled{1}' \text{ より } p = -2-a$$

$$\textcircled{2}' \text{ に代入して } b = 2+2(-2-a) = -2a-2$$

$$\textcircled{3}' \text{ に代入して } c = -2(-2-a) = 2a+4$$

$$(3) (2) \text{ より } b = -2a-2, c = 2a+4$$

$$\text{よて } x^3 + ax^2 + (-2a-2)x + (2a+4) = 0$$

$$\text{左辺は } x^2 - 2x + 2 \text{ の } 1 \text{ 乗と } 4 \text{ の和である。}$$

$$\begin{array}{r} x + (a+2) \\ x^2 - 2x + 2 \overline{) x^3 + ax^2 + (-2a-2)x + (2a+4)} \\ \underline{x^3 - 2x^2 + 2x} \\ (a+2)x^2 + (-2a-4)x + (2a+4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (a+2)x^2 - 2(a+2)x + 2(a+2) \\ \underline{ 0} \end{array}$$

$$\therefore \{x + (a+2)\}(x^2 - 2x + 2) = 0$$

$$\text{よて } \alpha = 1-i, \beta = 1+i \text{ の場合も成り立つ}$$

$$x + a + 2 = 0 \quad \therefore x = -a-2$$

$$\therefore \alpha = -a-2 \text{ と } \beta = -a-2$$

である。

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 4 \dots (4)$$

$$\text{よて } \alpha + \beta = (1-i) + (1+i) = 2$$

$$\alpha\beta = (1-i)(1+i) = 1-i^2 = 2$$

よて

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = -4$$

$$\text{よて } \gamma = -a-2 \text{ より } (4) \text{ に代入して}$$

$$-4 + (-a-2)^3 = 4$$

$$(-a-2)^3 = 8$$

$$\therefore x^3 = 8 \text{ の実数解は}$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\therefore x = 2, -1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\text{よて } x = 2 \text{ (あるいは)}$$

$$\therefore -a-2 = 2 \text{ より } a = -4$$

$$\therefore b = -2a-2 = -2(-4)-2$$

$$= 6$$

$$c = 2a+4 = 2(-4)+4 = -4$$

$\therefore$

$$(a, b, c) = (-4, 6, -4)$$

20

$$(1) P(x) = x^3 + (2a+5)x^2 + (2a+13)x + 9$$

2 $x+1$ で割り、た余り13. $P(x) \sim x+1$

$x=-1$ を代入 (1 = 計算結果に等しい)

$$\begin{aligned} \therefore P(-1) &= (-1)^3 + (2a+5)(-1)^2 + (2a+13)(-1) + 9 \\ &= -1 + 2a + 5 - 2a - 13 + 9 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果より $P(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r} x^2 + (2a+4)x + 9 \\ x+1 \overline{) x^3 + (2a+5)x^2 + (2a+13)x + 9} \\ \underline{x^3 + x^2} \\ (2a+4)x^2 + (2a+13)x \\ \underline{(2a+4)x^2 + (2a+4)x} \\ 9x + 9 \\ \underline{9x + 9} \\ 0 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 + (2a+5)x^2 + (2a+13)x + 9 \\ &= (x+1) \{ x^2 + (2a+4)x + 9 \} \end{aligned}$$

2 因数分解できる。よって、方程式 $P(x) = 0$

$$(x+1) = 0 \text{ かつ } x^2 + (2a+4)x + 9 = 0$$

1 = 等しい。よって $x=-1$ を代入して

$$x^2 + (2a+4)x + 9 = 0$$

は虚数解を持つ。よって、判別式 $D < 0$ である。

$$\begin{aligned} \therefore D/4 &= (a+2)^2 - 9 \\ &= \{ (a+2)+3 \} \{ (a+2)-3 \} \\ &= (a+5)(a-1) \end{aligned}$$

よって

$$(a+5)(a-1) < 0$$

よって

$$\underline{-5 < a < 1}$$

(3) 2 の $x^2 + (2a+4)x + 9 = 0$

$$x^2 + (2a+4)x + 9 = 0$$

2 の $x^2 + (2a+4)x + 9 = 0$ の解を α, β とする。

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{2a+4}{1} = -(2a+4) \\ \alpha\beta = \frac{9}{1} = 9 \end{cases} \quad \dots (*)$$

また、 $\alpha = p+qi, \beta = p-qi$

よって

$$\alpha - \beta = (p+qi) - (p-qi) = 2qi$$

よって

$$2qi = \alpha - \beta$$

両辺を 2 で割ると

$$(2qi)^2 = (\alpha - \beta)^2$$

$$4q^2i^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$4q^2(-1) = (\alpha^2 + \beta^2) - 2\alpha\beta$$

$$-4q^2 = \{ (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \} - 2\alpha\beta$$

$$\therefore q^2 = -\frac{1}{4} \{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \}$$

よって (*) を代入すると

$$q^2 = -\frac{1}{4} \{ (2a+4)^2 - 4 \cdot 9 \}$$

$$= -\frac{1}{4} \{ 4(a+2)^2 - 4 \cdot 9 \} = -(a+2)^2 + 9$$

よって (2) より、 $-5 < a < 1$ である。

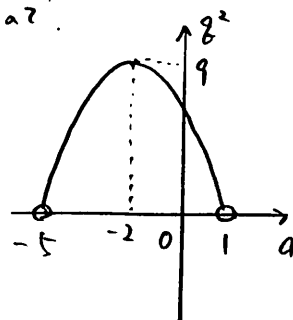
$$q^2 = -(a+2)^2 + 9$$

$$a \text{ の範囲は } -5 < a < 1$$

よって q の最大値は

$$a = -2 \text{ のとき } q^2 \text{ は最大値 } 9$$

である。



21

$$(1) f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2a$$

而 $x-2$ 是 $f(x)$ 的因式。

∴ $f(x) \div (x-2) = 2$ 余数为 0。

∴ 结果 1 是 0 是 2。

∴

$$f(2) = 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 2a$$

$$= 8 + 4a + 2b + 2a$$

$$= 6a + 2b + 8$$

∴

$$6a + 2b + 8 = 0$$

$$2b = -6a - 8$$

$$\therefore b = -3a - 4$$

(2)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (-3a-4)x + 2a$$

$f(x)$ 以 $x-2$ 为因式。

$$\begin{array}{r} x^2 + (a+2)x - a \\ x-2 \overline{) x^3 + ax^2 + (-3a-4)x + 2a} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \end{array}$$

$$x^3 - 2x^2$$

$$(a+2)x^2 + (-3a-4)x$$

$$(a+2)x^2 - 2(a+2)x$$

$$-ax + 2a$$

$$-ax + 2a$$

$$0$$

∴

$$f(x) = (x-2) \{ x^2 + (a+2)x - a \}$$

∴ $f(x) = 0$ 的根为 $x=2$ 或 $x^2 + (a+2)x - a = 0$ 的根。

$$x-2=0 \text{ 时 } x^2 + (a+2)x - a = 0 \text{ 的根为 } x=2 \text{ 或 } x=-a$$

∴ 根为 $x=2$ 或 $x=-a$ 。

$$x^2 + (a+2)x - a = 0$$

∴ 判别式 $D = (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a)$

$$D = (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a)$$

$$= a^2 + 4a + 4 + 4a$$

$$= a^2 + 8a + 4$$

$$\therefore a^2 + 8a + 4 < 0 \text{ 时 } \Delta < 0$$

$$a^2 + 8a + 4 = 0 \text{ 时 } \Delta = 64 - 16 = 48$$

$$a = -4 \pm \sqrt{16-4}$$

$$= -4 \pm 2\sqrt{3}$$

∴ $D < 0$ 时 $-4-2\sqrt{3} < a < -4+2\sqrt{3}$

$$-4-2\sqrt{3} < a < -4+2\sqrt{3}$$

$$= -2 \cdot 2\sqrt{3} = \sqrt{12} \text{ 时}$$

$$\sqrt{9} < \sqrt{12} < \sqrt{16}$$

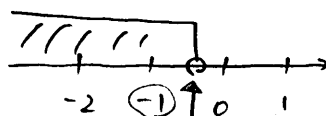
$$\therefore 3 < 2\sqrt{3} < 4$$

$$\therefore -4-2\sqrt{3} < a < -4+2\sqrt{3}$$

$$-1 < -4+2\sqrt{3} < 0$$

$$\therefore -4-2\sqrt{3} < a < -4+2\sqrt{3}$$

∴ 满足条件的 a 的范围是 $-4-2\sqrt{3} < a < -4+2\sqrt{3}$



$$a_0 = -1$$

(3) (1) 时 $a_0 = -1$

∴ $a_0 = -1$

$$f(x) = (x-2) \{ x^2 + (-1+2)x - (-1) \}$$

$$= (x-2)(x^2 + x + 1)$$

∴ $f(x) = 0$ 的根为 $x=2$ 或 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根。

∴ $x=2$ 或 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根。

$$x^2 + x + 1 = 0$$

∴ $x^2 + x + 1 = 0$ 的根为 $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

∴ 根为 $x = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 。

$$\begin{cases} \beta + r = -\frac{1}{1} = -1 \\ \beta r = \frac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

$$\beta r = \frac{1}{1} = 1$$

∴

$$a^3 + \beta^3 + r^3$$

$$= a^3 + (\beta^3 + r^3)$$

$$= a^3 + (\beta + r)^3 - 3\beta r(\beta + r)$$

$$= 2^3 + (-1)^3 - 3 \cdot 1 \cdot (-1)$$

$$= 8 + (-1) + 3 = 10$$

(3) 时 β, r 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根。

$$\beta, r \text{ 是 } x^2 + x + 1 = 0 \text{ 的根}$$

$$\begin{cases} \beta^2 + \beta + 1 = 0 \\ r^2 + r + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\beta^2 + \beta + 1 = 0$$

$$r^2 + r + 1 = 0$$

∴ $\beta^3 = 1, r^3 = 1$

$$\beta^3 = 1, r^3 = 1$$

∴ $\beta^3 = 1, r^3 = 1$

$$(\beta-1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$$

$$\therefore \beta^3 - 1 = 0$$

$$\beta^3 = 1$$

$$\therefore \beta^3 = 1, r^3 = 1$$

∴ $\beta^3 = 1, r^3 = 1$

$$\beta^3 = 1$$

$$a^3 + \beta^3 + r^3$$

$$= 2^3 + 1 + 1 = 10$$

(3) β, r 是 $x^2 + x + 1 = 0$ 的根。

$$1 \text{ 的三次根为 } 1$$

∴ $\beta^3 = 1, r^3 = 1$

22

$$(1) X^3 - (2p+1)X^2 - (p+7)X + 2p+7 = 0$$

2の左辺は $X=1$ で値 0 になる

$X=1$ を代入すると等式が成り立つ

0になる

$$1^3 - (2p+1) \cdot 1^2 - (p+7) \cdot 1 + 2p+7 = 0$$

$$1 - 2p - 1 - p - 7 + 2p + 7 = 0$$

$$-2p + p = 0$$

$$\therefore p = 2p$$

++

2の左辺は

$$X^3 - (2p+1)X^2 - (2p+7)X + 4p+7$$

5. $X=1$ で値 0 になる

$$\begin{array}{r} X^3 - (2p+1)X^2 - (2p+7)X + 4p+7 \\ X-1 \overline{) X^3 - (2p+1)X^2 - (2p+7)X + 4p+7} \\ \underline{X^3 - X^2} \end{array}$$

$$-2pX^2 - (2p+7)X$$

$$-2pX^2 + 2pX$$

$$(-4p-7)X + 4p+7$$

$$\begin{array}{r} (-4p-7)X - (-4p-7) \\ \hline 0 \end{array}$$

5.7 左辺は

$$X^3 - (2p+1)X^2 - (2p+7)X + 4p+7$$

$$= (X-1) \{ X^2 - 2pX - (4p+7) \}$$

12) ①の解は $1, \alpha, \beta$ と表せる

α, β は 2次方程式

$$X^2 - 2pX - (4p+7) = 0$$

2解を持つ。 α, β は

2次方程式の解

解は $1, \alpha, \beta$ である。 $\alpha < 1, \beta < 1$ となる

$$① D \geq 0$$

$$② (\alpha-1) + (\beta-1) < 0$$

$$③ (\alpha-1)(\beta-1) > 0$$

が成り立つ

同様に β の場合も

$$\alpha + \beta = 2p, \beta = -4p-7$$

∴

①より

$$D/4 = (-p)^2 - (-4p-7)$$

$$= p^2 + 4p + 7$$

$$= (p+2)^2 + 3$$

5.7 $D/4 > 0$ は常に成り立つ

$$②より \alpha + \beta < 2$$

∴

$$2p < 2 \text{ より } p < 1$$

$$③より \alpha(\beta-1) + 1 > 0$$

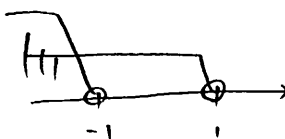
$$(-4p-7) - 2p + 1 > 0$$

$$-6p - 6 > 0$$

∴

$$p < -1$$

以上 ①②③より



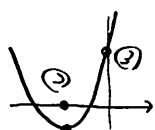
$$p < -1$$

④

$$y = X^2 - 2pX - (4p+7)$$

が X 軸の $X < 1$ の部分

で α と β の交点を持つ



$$y = (x-p)^2 - p^2 - 4p - 7$$

① 頂点の y 座標 < 0

② $x=1$

③ 軸 < 1

④ $x=1$ の時 $y > 0$

①②③は本解と同じ

4. 図に示す通り

13) 解が2つあるとき α, β の

$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ であるとき p の値を

求めよ。 (2)より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2p \\ \alpha\beta = -4p-7 \end{cases}$$

$$\alpha\beta = -4p-7$$

∴ α, β は $2p = \alpha + \beta$

$$\alpha\beta = -4p-7$$

$$\alpha\beta = -2(\alpha + \beta) - 7$$

∴

$$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta = -7$$

$$\alpha(\beta+2) + 2\beta = -7 \dots (A)$$

∴ α, β は

$$2\beta = 2(\beta+2-2)$$

$$= 2(\beta+2) - 4$$

5. α, β は $(\alpha+2)(\beta+2) = -3$

$$\alpha(\beta+2) + 2(\beta+2) - 4 = -7$$

$$(\alpha+2)(\beta+2) = -3$$

∴ α, β は $\alpha+2, \beta+2$ は

整数である。 $\alpha+2, \beta+2$ は -3 の

約数である。 $\alpha+2, \beta+2$ は -3 の

約数である。 $\alpha+2, \beta+2$ は -3 の

$\alpha+2$	3	-3	1	-1
$\beta+2$	-1	1	-3	3

5.7

α	1	-5	-1	-3
β	-3	-1	-5	1

$$(\alpha, \beta) = (1, -3), (-3, 1) \text{ のみ}$$

$$2p = \alpha + \beta = 1 + (-3) = -2$$

$$\therefore p = -1$$

$$(\alpha, \beta) = (-5, -1), (-1, -5) \text{ のみ}$$

$$2p = \alpha + \beta = (-1) + (-5) = -6$$

$$\therefore p = -3$$

以上より

$$p = -1, -3$$

[23]

$$(1) x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x + b = 0$$

は $x=1$ と $\beta+1 = \frac{1}{2}$ のとき、 $\beta+1$ は

$$1^3 + (a+1) \cdot 1^2 + (a+2) \cdot 1 + b = 0$$

が成り立つ。

$$1 + a + 1 + a + 2 + b = 0$$

$$b = -2a - 4$$

$$(2) (1) \text{より } b = -2a - 4$$

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x - 2a - 4 \dots (*)$$

(1) より $(*)$ は $x=1$ と $\beta+1$ のとき
 $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{2}$ のとき $0 = \frac{1}{2}$ のとき、 $(*)$ は
 $x=1$ と $\frac{1}{2}$ のとき。

$$\begin{array}{r} x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x - 2a - 4 \\ x-1 \overline{) } \\ \underline{x^3 - x^2} \\ (a+2)x^2 + (a+2)x - 2a - 4 \\ \underline{(a+2)x^2 - (a+2)x} \\ 2(a+2)x - 2a - 4 \\ \underline{2(a+2)x - 2a - 4} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^3 + (a+1)x^2 + (a+2)x - 2a - 4 \\ = (x-1) \{ x^2 + (a+2)x + 2(a+2) \} \end{aligned}$$

(3) 方程式の根、(2)より

$$x-1=0, \text{ あるいは } x^2 + (a+2)x + 2(a+2) = 0$$

異なる実数解を2つ持つ。

$$2\text{次方程式 } x^2 + (a+2)x + 2(a+2) = 0$$

は異なる2つの実数解を持つ。

$$\therefore D = (a+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2(a+2)$$

$$= (a+2)^2 - 8(a+2)$$

$$= (a+2) \{ (a+2) - 8 \}$$

$$= (a+2)(a-6)$$

1より、 $D > 0$ とおける

$$(a+2)(a-6) > 0$$

$$\therefore a < -2, a > 6 \dots (A)$$

2より、① 異なる2つの
 実数解を持つ。

1より、 $x=1$ と $\beta+1$ のとき。

4より、2つの根は

$$x^2 + (a+2)x + 2(a+2) = 0$$

は $x=1$ と $\beta+1 = \frac{1}{2}$ のとき、

2つの根は $0 = \frac{1}{2}$ のとき。

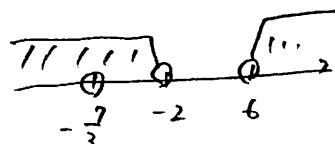
$$1^2 + (a+2) \cdot 1 + 2(a+2) = 0$$

$$1 + a + 2 + 2a + 4 = 0$$

$$a = -\frac{7}{3}$$

2より、2つの根は (A) のとき

3. 異なる2つの根を持つ。



$$\therefore a < -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3} < a < -2, a > 6 \dots (B)$$

4. 3つの異なる実数解を持つ。

1より、 $x=1$ と $\beta+1$ のとき。

2より、 $x=1$ と $\beta+1$ のとき。

3より、 $x=1$ と $\beta+1$ のとき。

$$2\text{次方程式 } x^2 + (a+2)x + 2(a+2) = 0$$

2つの異なる実数解を持つ。

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{a+2}{1} = -(a+2) \\ \alpha\beta = \frac{2(a+2)}{1} = 2(a+2) \end{cases} \dots (C)$$

4より、

$$(I) \alpha + \beta = 1 \text{ のとき}$$

$$(II) \alpha + \beta = -(a+2)$$

$$\therefore 1 = -(a+2) \quad a = -3$$

$$\therefore (a) \text{ のとき } T = 7$$

$$(II) \beta + 1 = \alpha \text{ のとき}$$

$$\therefore a < -2, a > 6 \dots (A)$$

$$\begin{cases} (\beta+1) + \beta = -(a+2) \\ (\beta+1)\beta = 2(a+2) \end{cases}$$

$$2\beta + 1 = -a - 2$$

$$\therefore \beta = -\frac{a+3}{2}$$

$$T = 1 = \beta + 1$$

$$\left(-\frac{a+3}{2} + 1\right) \left(-\frac{a+3}{2}\right) = 2(a+2)$$

$$\left(\frac{-a-1}{2}\right) \left(\frac{-a-3}{2}\right) = 2a+4$$

$$(a+1)(a+3) = 4(a+2)$$

$$a^2 + 4a + 3 = 4a + 8$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$a = 2 \pm \sqrt{4+5}$$

$$= 2 \pm \sqrt{9}$$

$$\therefore (a) \text{ のとき } T = 7$$

$$a = -3$$

$$a = -3, 2 \pm \sqrt{9}$$

24

(1)

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-k) + ax + b$$

$$P(1) = -4, P(2) = 0 \text{ である}$$

$$P(x) = x = 1, 2 \text{ 3 5 7 11}$$

$$P(1) = 0 \cdot (1-1) \cdot (1-k) + a \cdot 1 + b = 0 + a + b = a + b$$

$$\text{よって } a + b = -4 \dots \textcircled{1}$$

$$P(2) = 1 \cdot 0 \cdot (2-k) + a \cdot 2 + b = 0 + 2a + b = 2a + b$$

$$\text{よって } 2a + b = 0 \dots \textcircled{2}$$

①②より a と b の連立 2 方程式を解く

$$a = 4, b = -8$$

(2)

$$(1) \text{ より } a = 4, b = -8$$

よって

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-k) + 4x - 8$$

(x-2) を
2 3.

$$= (x-1)(x-2)(x-k) + 4(x-2)$$

$$= (x-2) \{ (x-1)(x-k) + 4 \}$$

$$= (x-2) \{ x^2 - (k+1)x + k + 4 \}$$

方程式 $P(x) = 0$ の解は

$$x-2 = 0, \text{ または } x^2 - (k+1)x + k + 4 = 0$$

である。 $x-2 = 0$ から $x = 2$ と実数解がある

出てくるので、2 は方程式 $x^2 - (k+1)x + k + 4 = 0$

の実数解である。つまり、2 はこの方程式の解である。

判別式 $D \geq 0$ が必要である。

$$D = (k+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k+4) = k^2 + 2k + 1 - 4k - 16 = k^2 - 2k - 15$$

よって $D \geq 0$ から

$$k^2 - 2k - 15 \geq 0$$

$$(k-5)(k+3) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -3, k \geq 5$$

$$(3) (1) \text{ の } P(x) = 0 \text{ の}$$

1) の解は $x = 2$ である。

よって、1 と 2 の間、 $a = 2$ と仮定する。

β と γ は 2 次方程式

$$x^2 - (k+1)x + k + 4 = 0$$

の 2 解である。よって

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \beta + \gamma = -\frac{-(k+1)}{1} \\ \beta\gamma = \frac{k+4}{1} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} \beta + \gamma = k+1 \dots \textcircled{A} \\ \beta\gamma = k+4 \end{cases}$$

が成り立つ。 $\therefore \beta, \gamma$ は

α, β, γ の 3 解は

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -19$$

が成り立つ。 $\alpha = 2$ より

$$2^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -19$$

$$\therefore \beta^3 + \gamma^3 = -27$$

左辺を因数分解して

$$(\beta + \gamma)^3 - 3\beta\gamma(\beta + \gamma) = -27$$

(A) より代入して

$$(k+1)^3 - 3(k+4)(k+1) = -27$$

$\therefore$ 展開して整理すると

$$(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - 3(k^2 + 5k + 4) = -27$$

$$\therefore k^3 - 12k + 16 = 0 \dots \textcircled{B}$$

(B) の左辺は $k = 2$ を代入すると

$$2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0$$

$$= 8 - 24 + 16 = 0$$

よって (B) の左辺は $k = 2$ で

0 になる。 $\therefore k = 2$ は解である。

$$k^3 - 12k + 16 = 0$$

$$(k-2)(k^2 + 2k - 8) = 0$$

$$k-2 \mid \frac{k^3 + 2k^2 - 8}{k^3 - 12k + 16} = \frac{k^3 - 2k^2 + 4k}{k^3 - 12k + 16} = \frac{2k^2 - 12k}{k^3 - 12k + 16} = \frac{2k^2 - 4k}{k^3 - 12k + 16} = \frac{-8k + 16}{k^3 - 12k + 16} = \frac{-8k + 16}{0}$$

$$\therefore (k-2) \cdot (k+4) \cdot (k-2) = 0$$

$$(k-2)^2 (k+4) = 0$$

$$\therefore k = 2, -4$$

$$\therefore k = 2 \text{ 5) } k \leq -3, k \geq 5$$

$$\therefore k = -4$$

(3) の (2)

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-k) + 4x - 8 = x^3 - (k+3)x^2 + (3k+6)x + (2k-8)$$

$P(x) = 0$ の 3 解は α, β, γ と仮定する

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -\frac{-(k+3)}{1} = k+3 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{3k+6}{1} = 3k+6 \\ \alpha\beta\gamma = -\frac{(2k-8)}{1} = -(2k-8) \end{cases}$$

が成り立つ。

また、 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -19$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)$$

$$\cdot \{ (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \}$$

$$- (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

が成り立つ。

$\therefore$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

より

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma) \{ (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \}$$

1 を代入して整理すると

26

(1) $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから

$P(x)$ の $x=1$ を代入すると

定数項が 0 になる。

$$P(1) = 1^3 + (2p-1) \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + q = 0$$

$$1 + 2p - 1 + 3 + q = 0$$

$$2p + 3 + q = 0$$

$$\therefore q = -2p - 3$$

(2) (1)より $q = -2p - 3$

よって

$$P(x) = x^3 + (2p-1)x^2 + 3x + (-2p-3) \quad (*)$$

つまり $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから

$$\begin{array}{r} x^3 + 2px + (2p+3) \\ x-1 \overline{) x^3 + (2p-1)x^2 + 3x + (-2p-3)} \\ \underline{x^3 - x^2} \\ 2px^2 + 3x \\ \underline{2px^2 - 2px} \\ (2p+3)x + (-2p-3) \\ \underline{(2p+3)x - (2p+3)} \\ 0 \end{array}$$

よって

$$P(x) = (x-1) \{ x^2 + 2px + (2p+3) \}$$

また、方程式 $P(x) = 0$ は

$$(x-1) \{ x^2 + 2px + (2p+3) \} = 0$$

$$\therefore x-1=0 \text{ または } x^2 + 2px + (2p+3) = 0$$

$$x-1=0 \text{ より } x=1 \text{ という実数解がある}$$

また、虚数解を持つ可能性がある

$$2\text{-次方程式 } x^2 + 2px + (2p+3) = 0$$

か？
また、 2-次方程式
判別式 D は $D < 0$ である。

$$D/4 = p^2 - 1 \cdot (2p+3)$$

$$= p^2 - 2p - 3$$

$$\therefore p^2 - 2p - 3 < 0$$

$$(p-3)(p+1) < 0$$

$$\therefore -1 < p < 3$$

(3) $P(x) = 0$ の

実数解の個数を求める

$$a=1$$

判別式 D は 2-次方程式

の判別式 p, r とすると p, r は

$$2\text{-次方程式 } x^2 + 2px + (2p+3) = 0$$

の解であるから、解は

係数の関係から

$$\begin{cases} p+r = -\frac{2p}{1} \\ pr = \frac{2p+3}{1} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p+r = -2p \quad \dots (1) \\ pr = 2p+3 \end{cases}$$

が成り立つ。つまり 2-次方程式

$$x^2 - 2kx + 2k^2 - 5 = 0$$

の 2-次方程式 の $p+2a, r+2a$

より、解と係数の関係から

から

$$\begin{cases} (p+2a) + (r+2a) = -\frac{2k}{1} \\ (p+2a)(r+2a) = \frac{2k^2-5}{1} \end{cases}$$

よって

$$\begin{cases} p+r+4a = 2k \quad \dots (1) \\ (p+2a)(r+2a) = 2k^2-5 \quad \dots (2) \end{cases}$$

①より

$$a=1, p+r = -2p$$

代入して

$$(-2p) + 4 \cdot 1 = 2k$$

$$\therefore k+p = 2 \quad \dots (3)$$

②より

$$pr + 2a(p+r) + 4a^2 = 2k^2 - 5$$

$$a=1, p+r = -2p \text{ を代入して}$$

$$(2p+3) + 2 \cdot 1 \cdot (-2p) + 4 \cdot 1^2 = 2k^2 - 5$$

$$2p+3-4p+4-2k^2+5=0$$

$$-2k^2-2p+12=0$$

$$\therefore k^2+p-6=0$$

$$\text{③より } k=2-p \text{ より}$$

$$(2-p)^2 + p - 6 = 0$$

$$(4-4p+p^2) + p - 6 = 0$$

$$p^2 - 3p - 2 = 0$$

$$p = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

つまり $4 < \sqrt{17} < 5$ より

$$\frac{3+4}{2} < \frac{3+\sqrt{17}}{2} < \frac{3+5}{2}$$

$$\therefore \frac{7}{2} < \frac{3+\sqrt{17}}{2} < 4$$

$$\text{よって } p = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \text{ は } -1 < p < 3 \text{ を満たす}$$

$$\text{また } \frac{3-4}{2} > \frac{3-\sqrt{17}}{2} > \frac{3-5}{2}$$

$$\therefore -1 < \frac{3-\sqrt{17}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\text{よって } p = \frac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ は } -1 < p < 3 \text{ を満たす}$$

$$\text{よって } k = 2-p = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

27

整式 $X^{99} - 1$ を 整式 $X^3 + X^2 + X + 1$

で割る。商 $Q(x)$ と 余り $R(x)$ を 求めよ。

余り $R(x)$ は $X^3 + X^2 + X + 1$ を 3 次式

と見て 2 次式 $aX^2 + bX + c$ と 置く。

ゆえに

$$X^{99} - 1 = (X^3 + X^2 + X + 1)Q(x) + aX^2 + bX + c$$

と置く。 $x = -1$ とする。

$$\begin{aligned} X^3 + X^2 + X + 1 &= (X^3 + X^2) + (X + 1) \\ &= X^2(X + 1) + (X + 1) \\ &= (X^2 + 1)(X + 1) \end{aligned}$$

よって 因数分解 出来る。

$$X^{99} - 1 = (X^2 + 1)(X + 1)Q(x) + aX^2 + bX + c \quad (*)$$

よって $x = -1$ のとき $X = -1$ と代入する。

$$X + 1 = (-1) + 1 = 0$$

$$(-1)^{99} - 1 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$\therefore -2 = a - b + c \quad \dots (1)$$

また $(*)$ に i を代入する。

$$X^2 + 1 = i^2 + 1 = (-1) + 1 = 0$$

$$i^{99} - 1 = a \cdot i^2 + bi + c$$

$\therefore$

$$i^{98} \cdot i - 1 = a(-1) + bi + c$$

$$(i^2)^{49} \cdot i - 1 = -a + bi + c$$

$$(-1)^{49} \cdot i - 1 = (-a + c) + bi$$

$$\therefore -i - 1 = (-a + c) + bi \quad \dots (2)$$

(2) より $-a + c, b$ は実数

$$\text{両辺比較して} \quad \begin{cases} -1 = -a + c & (\text{実部}) \\ -1 = b & (\text{虚部}) \end{cases}$$

$$\text{ゆえに } a - c = 1, b = -1 \quad \dots (4)$$

$$(1) \text{より } b = -1 \text{ と代入}$$

$$-2 = a - (-1) + c$$

$$\therefore a + c = -3 \quad \dots (5)$$

(4)(5) より

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ a + c = -3 \end{cases}$$

$\therefore$

$$a = -1, c = -2$$

よって

$$a = -1, b = -1, c = -2$$

よって 求める 余り

$$\underline{-X^2 - X - 2}$$

28

$f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割る, $T = \text{商}$ と $Q(x)$

とある。また、 $T = \text{余り}$ は $(x-1)^2(x+1)$ か

3次式で表すので、 ax^2+bx+c と

2次式で表す。ゆえに

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)Q(x) + ax^2+bx+c \quad (*)$$

とある。ゆえに、 $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割る, $T = \text{余り}$ は

$2x-1$ のとき、 $T = \text{余り}$ は

$$\begin{array}{r} (x+1)Q(x) + a \\ (x-1)^2 \overline{) (x-1)^2(x+1)Q(x) + ax^2+bx+c} \\ \underline{(x-1)^2(x+1)Q(x)} \\ ax^2+bx+c \\ \underline{ax^2-2ax+a} \\ (b+2a)x+(c-a) \end{array}$$

より、 $T = (b+2a)x + (c-a)$

とある。ゆえに、 $2x-1 = -3x$ のとき

$$(b+2a)x + (c-a) = 2x-1$$

が恒等式より

$$(*) \quad \begin{cases} b+2a = 2 & \dots (x \text{ の係数}) \\ c-a = -1 & \dots (\text{定数項}) \end{cases}$$

が成り立つ。

また、 $f(x)$ を $(x+1)^2$ で割る, $T = \text{余り}$ は $3x-4$

より、 $T = Q'(x)$ とある

$$f(x) = (x+1)^2 Q'(x) + 3x-4 \quad (**)$$

とある。ゆえに、 $(**) \text{に } x = -1$ と

代入すると $(x+1)^2 = \{(-1)+1\}^2 = 0$ より

$$f(-1) = 3(-1) - 4 = -7$$

ゆえに、 $(*) \text{に } x = -1$ と代入すると

$$f(-1) = 0 + a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$\therefore -7 = a - b + c$$

また、 $(*)$ と $(**)$ より

$$\begin{cases} a - b + c = -7 \\ 2a + b = 2 \\ -a + c = -1 \end{cases}$$

解いて $a = -1, b = 4, c = -2$

ゆえに、求める余りは

$$-x^2 + 4x - 2$$

29

$f(x)$ を $(x-1)^2$ で割る, $T = \text{余り}$ は $2x-1$ より

$T = Q(x)$ とある

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) + 2x-1 \quad (I)$$

とある。ゆえに、 $Q(x)$ を $(x+1)$ で割ると

1次式で割る, $T = \text{余り}$ は定数とある。

ゆえに、 $T = R$ とし、 $T = Q'(x)$ とある

$$Q(x) = (x+1)Q'(x) + R$$

とある。ゆえに、 $(I) \text{に } x = -1$ と代入すると

$$f(x) = (x-1)^2 \{ (x+1)Q'(x) + R \} + 2x-1$$

$$= (x-1)^2(x+1)Q'(x) + R(x-1)^2 + 2x-1 \quad (II)$$

とある。ゆえに、この式は $f(x)$ を $(x-1)^2(x+1)$ で割る, $T = \text{商}$ は $Q'(x)$, 余り は $R(x-1)^2 + 2x-1$ とある。ゆえに、 R を求める。

本問と同様に、 $f(-1) = -7$ より

$$(II) \text{に } x = -1 \text{ と代入すると}$$

$$f(-1) = 0 + R(-1-1)^2 + 2(-1) - 1$$

$$= R \cdot 4 - 2 - 1$$

$$= 4R - 3$$

$$\therefore -7 = 4R - 3 \quad \therefore 4R = -4 \quad \text{より } R = -1$$

ゆえに、求める余りは

$$R(x-1)^2 + 2x-1 = -(x-1)^2 + 2x-1 = -x^2 + 4x - 2$$