

11)

(1)

$$2x^2 - 3x + y - 9 = 0$$

$$y = -2x^2 + 3x + 9 \dots \textcircled{1}$$

y は自然数であるから $y > 0$

よって

$$-2x^2 + 3x + 9 > 0$$

$$2x^2 - 3x - 9 < 0$$

$$(2x+3)(x-3) < 0$$

$$-\frac{3}{2} < x < 3$$

この範囲内の自然数 x は

$$x = 1, 2 \text{ のみ}$$

①より

$$x = 1 \text{ のとき } y = 10$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = 7$$

以上より

$$(x, y) = (1, 10), (2, 7)$$

(2)

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y = 10 - 3z \dots \textcircled{1}$$

ここで x, y は自然数より

$$x \geq 1, y \geq 1$$

$$\text{よって } x + 2y \geq 1 + 2 = 3$$

よって $x + 2y \geq 3$ が成り立つので

①より

$$10 - 3z \geq 3$$

$$\text{よって } z \leq \frac{7}{3}$$

が成り立つ。これを満たす

自然数 z は

$$z = 1, 2$$

のみである。

• $z = 1$ のとき

$$x + 2y + 3 = 10$$

$$x + 2y = 7$$

$$x = 7 - 2y \text{ として}$$

同方程に代入すると

$$7 - 2y \geq 1$$

$$y \leq 3$$

$$\text{よって } y = 1, 2, 3$$

$$\text{このとき } x = 5, 3, 1$$

• $z = 2$ のとき

$$x + 2y + 6 = 10$$

$$x + 2y = 4$$

$$x = 4 - 2y \text{ として}$$

同方程に代入すると

$$4 - 2y \geq 1$$

$$y \leq \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } y = 1$$

$$\text{このとき } x = 2$$

以上より

$$(x, y, z) = (5, 1, 1)$$

$$(3, 2, 1)$$

$$(1, 3, 1)$$

$$(2, 1, 2)$$

(3)

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$$

$$(x+y)^2 - y^2 + 3y^2 = 19$$

$$(x+y)^2 + 2y^2 = 19 \dots \textcircled{1}$$

よって

$$(x+y)^2 = 19 - 2y^2$$

と表せる。

$$19 - 2y^2 \geq 0$$

$$\text{よって } y^2 \leq \frac{19}{2} = 9.5$$

これを満たす y は $y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

これを満たす y は

$$y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

このとき

$$(x+y)^2 = 19 - 2y^2$$

①. $(x+y)$ は平方数であるから

(2) $x+y$ は平方数に等しいから

以下より

$$y = 0 \text{ のとき } (x+y)^2 = 19 \text{ 不適}$$

$$y = \pm 1 \text{ のとき } (x+y)^2 = 17 \text{ 不適}$$

$$y = \pm 2 \text{ のとき } (x+y)^2 = 11 \text{ 不適}$$

$$y = \pm 3 \text{ のとき } (x+y)^2 = 1 \text{ 不適}$$

$$\text{このとき } x+y = \pm 1$$

$$\text{よって } x = -y \pm 1 \text{ より}$$

$$y = 3 \text{ のとき } x = -3 \pm 1 = -4, -2$$

$$y = -3 \text{ のとき } x = 3 \pm 1 = 4, 2$$

以上より

$$(x, y) = (-4, 3), (-2, 3)$$

$$(4, -3), (2, -3)$$

2

(1)

$$3x + y = 15$$

$$2y = 15 - 3x$$

$$2y = 3(5 - x) \dots \textcircled{1}$$

よ、 y は自然数より $y > 0$

右辺も正に一致する

$$5 - x > 0 \Rightarrow x < 5$$

x も自然数より $0 < x < 5 \dots \textcircled{2}$

すなわち、 $\textcircled{1}$ より、 2 と 3 は互いに素

$5 - x$ は 2 の倍数である。

$\textcircled{2}$ の中より、 $5 - x$ は偶数である。

$$x = 1, 3 \text{ のみ}$$

$$x = 1 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ より } 2y = 3 \times 4 \Rightarrow y = 6$$

$$x = 3 \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ より } 2y = 3 \times 2 \Rightarrow y = 3$$

以上より

$$(x, y) = (1, 6), (3, 3)$$

(2)

$$x^2 = y^2 + 24$$

$$\text{よ、 } x^2 - y^2 = 24$$

$$\text{すなわち } (x+y)(x-y) = 24 \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ より $x+y, x-y$ は整数である。

$x+y, x-y$ は 24 の素因数である。

すなわち、 x, y は自然数である。

$x+y > 0$ である。より $x-y$ も

正である。よ、 $x > y \dots \textcircled{2}$

より、

$$(x+y) + (x-y) = 2x = \text{偶数}$$

より、 $x+y$ と $x-y$ の両方とも偶数である。③

すなわち、 $y > 0$ である。 $x+y$ の方が $x-y$

より大きい。④

以上より、 24 の素因数のうち

②、③、④ を満たすものは

$$\begin{array}{c|c|c} x+y & 12 & 6 \\ \hline x-y & 2 & 4 \end{array} \text{ の場合のみ}$$

それぞれの場合に x, y は

$$\begin{array}{c|c|c} 2x & 14 & 10 \\ \hline 2y & 10 & 2 \end{array}$$

より

$$(x, y) = (7, 5), (5, 1)$$

(3)

$$x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2 = 0$$

$$(x^2 + 4x) - (y^2 - 2y) = 2$$

$$(x+2)^2 - 2^2 - (y-1)^2 + 1^2 = 2$$

$$(x+2)^2 - (y-1)^2 = 5$$

よ、左辺を因数分解して

$$\{(x+2) + (y-1)\} \{(x+2) - (y-1)\} = 5$$

$$(x+y+1)(x-y+3) = 5 \dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ より、 $x+y+1, x-y+3$ は素数

$x+y+1, x-y+3$ は 5 の素因数である。

すなわち、 x, y は自然数である。 $x+y+1 > 0$

である。 5 の正の素因数を考えると

すなわち、

$$(x+y+1) + (x-y+3)$$

$$= 2x + 4$$

$$= 2(x+2) = \text{偶数}$$

より、 $x+y+1$ と $x-y+3$ の

両方とも偶数である。

以上より

$$\begin{array}{c|c|c} x+y+1 & 1 & 5 \\ \hline x-y+3 & 5 & 1 \end{array}$$

の二通りあり、

それぞれの場合に x, y は

$$\begin{array}{c|c|c} 2x+4 & 6 & 6 \\ \hline 2y-2 & -4 & 4 \end{array}$$

より

$$\begin{array}{c|c|c} 2x & 2 & 2 \\ \hline 2y & -2 & 6 \end{array}$$

すなわち

$$\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 1 \\ \hline y & -1 & 3 \end{array}$$

($\because y$ は自然数より

$$(x, y) = (1, -1)$$

は不適。

以上より

$$(x, y) = (1, 3)$$

⑤ のとき C は

$$x^2 - y^2 + 4x + 2y - 2 = 0$$

下線部を考えると

$$(x+y+A)(x-y+B) = C$$

(A, B, C は定数)

A, B, C を決める。

展開して

$$x^2 - y^2 + (A+B)x + (-A+B)y + AB - C = 0$$

より

$$\begin{cases} A+B=4 & (x \text{ の係数}) \\ -A+B=2 & (y \text{ の係数}) \\ AB-C=-2 & (定数項) \end{cases}$$

を解いて

③

$$(1) \quad xy - 2x - 3y + 2 = 0$$

$$x(y-2) - 3y + 2 = 0$$

$$x(y-2) - 3(y-2+2) + 2 = 0$$

$$x(y-2) - 3(y-2) - 6 + 2 = 0$$

$$x(y-2) - 3(y-2) - 4 = 0$$

$$x(y-2) - 3(y-2) = 4$$

$$(x-3)(y-2) = 4 \quad \text{①}$$

x, y は自然数 ①より

$x-3, y-2$ は 4 の素因数分解である。

すなわち x, y は自然数 ①より

$x > 0, y > 0$ である。

$$x-3 > -3, y-2 > -2 \quad \text{②}$$

が成り立つ。よって ①, ②より

$x-3$	1	2	4
$y-2$	4	2	1

よって

x	4	5	7
y	6	4	3

したがって

$$(x, y) = (4, 6), (5, 4), (7, 3)$$

④

$$xy - 2x - 3y + 2 = 0$$

$$x(y-2) = 3y-2$$

$$y=2 \text{ とすると } x+0 = 3 \times 2 - 2$$

$$\text{すなわち } 0 = 4 \text{ となる。}\therefore \text{成り立たない。}$$

よって $y=2$ は不適当である。

よって $y-2$ で割る。

$$x = \frac{3y-2}{y-2}$$

よって

$$x = \frac{3(y-2+2)-2}{y-2}$$

$$= \frac{3(y-2)+6-2}{y-2}$$

$$= \frac{3(y-2)+4}{y-2}$$

$$= \frac{3(y-2)}{y-2} + \frac{4}{y-2}$$

$$= 3 + \frac{4}{y-2}$$

よって

$$x = 3 + \frac{4}{y-2} \quad \text{③}$$

よって x は自然数である。

よって x は自然数である。

$$\text{すなわち } \frac{4}{y-2} \text{ は整数である。}$$

よって $y-2$ は 4 の素因数分解である。

よって y は自然数である。

$$y-2 = 1, 2, 4, -1,$$

よって

$$x = 3+4, 3+2, 3+1, 3-4$$

$$\text{よって } y=1 \text{ として } x=-1 \text{ となる。}$$

x は自然数である。よって $x=1, 2, 3, 4$ である。

よって

$$(x, y) = (7, 3), (5, 4), (4, 6)$$

(2)

$$2xy + 3x + y - 9 = 0$$

$$x(2y+3) + y - 9 = 0$$

両辺 25 を加える。

$$2x(2y+3) + 2y - 18 = 0$$

$$2x(2y+3) + (2y+3) - 21 = 0$$

$$(2x+1)(2y+3) = 21 \quad \text{④}$$

x, y は自然数 ④より

$2x+1, 2y+3$ は 21 の素因数分解である。

④より $2x+1, 2y+3$ は 21 の素因数である。

よって $2x+1, 2y+3$ は 21 の素因数である。

$x \geq 0, y \geq 0$ より $2x+1 \geq 1, 2y+3 \geq 3$

である。よって 21 の素因数分解である。④より

$2x+1$	1	3	7
$2y+3$	21	7	3

よって

x	0	2	6
y	18	4	0

よって

x	0	1	3
y	9	2	0

よって

$$(x, y) = (0, 9), (1, 2), (3, 0)$$

⑤

$$2xy + 3x + y - 9 = 0$$

$$x(2y+3) + y - 9 = 0$$

$$x(2y+3) + \frac{1}{2}(2y+3) - \frac{19}{2} = 0$$

$$x(2y+3) + \frac{1}{2}(2y+3) = \frac{19}{2}$$

$$(x+\frac{1}{2})(2y+3) = \frac{19}{2}$$

よって $x+\frac{1}{2}, 2y+3$ は 19 の素因数である。

(素数) × (素数) = 素数

の形に素因数分解できる。

よって 19 の素因数分解である。

4

(1) $x^2 - 2xy - 3y^2 + 4x + 10y - 17 = 0 \dots ①$

下線部が $(x-3y)(x+y)$ と

因数分解できる = 2 加え、① が

$$(x-3y+A)(x+y+B) = C \dots ②$$

と展開できるが、② を展開して

$$(x-3y)(x+y) + B(x-3y)$$

$$+ A(x+y) + AB = C$$

$$x^2 - 2xy - 3y^2 + (A+B)x + (A-3B)y$$

$$+ (AB-C) = 0 \dots ③$$

② と ① を比較して

$$\begin{cases} A+B = 4 & (x \text{ の係数}) \\ A-3B = 12 & (y \text{ の係数}) \\ AB-C = -17 & (\text{定数項}) \end{cases}$$

解いて $A=6, B=-2, C=5$

つまり ① は

$$(x-3y+6)(x+y-2) = 5 \dots ④$$

と展開できる。 x, y は整数より

$$x-3y+6, x+y-2 \text{ は整数である。}$$

④ より 5 の約数である。

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x-3y+6 & 5 & 1 & -5 & -1 \\ \hline x+y-2 & 1 & 5 & -1 & -5 \end{array}$$

より

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -4y+8 & 4 & -4 & -4 & 4 \\ \hline 4x & 8 & 16 & -8 & -16 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow (\pm x) - (7y) \\ \leftarrow (\pm x) + 3 \times (7y) \end{array}$$

より

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} -4y & -4 & -12 & -12 & -4 \\ \hline x & 2 & 4 & -2 & -4 \end{array}$$

以上より

$$(x, y) = (2, 1), (4, 3), (-2, 3), (-4, 1)$$

(2)

$$5x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 4y + 11 = 0 \dots ①$$

下線部が「因数分解できない」と

① を y の 2 次方程式と見て考える

$$y^2 + 2(x+1)y + (5x^2 - 12x + 11) = 0 \dots ②$$

この 2 次方程式が実数解を持つのは

$$\Delta \geq 0$$

$$D/4 = (x+1)^2 - (5x^2 - 12x + 11)$$

$$= -4x^2 + 16x - 7$$

$$= -(2x-1)(2x-7) \geq 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}$$

つまり満たす整数は $x=1, 2, 3$ のみ

② を y について解く

$$y = \frac{-(x+1) \pm \sqrt{D/4}}{1} = -(x+1) \pm \sqrt{D/4}$$

よって $D/4$ が 0 以上の平方数である必要がある。

$$D/4 = -(2x-1)(2x-7) \text{ である}$$

$$\cdot x=1 \text{ のとき } D/4 = -1 \times (-5) = 5 \text{ 不適}$$

$$\cdot x=2 \text{ のとき } D/4 = -3 \times (-3) = 9$$

$$\cdot x=3 \text{ のとき } D/4 = -5 \times (-1) = 5 \text{ 不適}$$

$$\therefore x=2 \text{ のとき } y = -(2+1) \pm \sqrt{9}$$

$$= -3 \pm 3 = -6, 0$$

以上より

$$(x, y) = (2, -6), (2, 0)$$

(注) $ax^2 + bxy + cy^2$ の部分のみ

因数分解できないか？

判断する。

5

(1)

$$x + y + z = xyz \quad \dots ①$$

①は x, y, z に対して

対称である。つぎ ① を満たす

(x, y, z) の組が 1 つあるから、

x, y, z の順番を変えても

① の解になる。したがって

$$x \leq y \leq z \quad \dots ②$$

と大小関係を定めた中で、① の解を見つけていく。

②より $x \leq z, y \leq z$ より

$$x + y + z \leq z + z + z$$

が成り立つ。つまり

$$x + y + z \leq 3z \quad \dots ③$$

である。③は ① を代入すると

$$xyz \leq 3z$$

より、 $z > 0$ であるから、両辺を z で割ると

$$xy \leq 3 \quad \dots ④$$

が成り立つ。②と④を

満たす自然数 x, y の組は

$$(x, y) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$$

のみである。

• $(x, y) = (1, 1)$ の時

①を代入して

$$1 + 1 + z = 1 \times 1 \times z$$

(ただし $z = 0$ は不適)

• $(x, y) = (1, 2)$ の時

$$1 + 2 + z = 1 \times 2 \times z$$

$$3 + z = 2z$$

$$\text{よって } z = 3$$

これは ② を満たす。

• $(x, y) = (1, 3)$ の時

$$1 + 3 + z = 1 \times 3 \times z$$

$$4 + z = 3z$$

$$\text{よって } z = 2$$

(ただしこれは ② を

満たさず不適)

以上より

$$(x, y, z) = (1, 2, 3)$$

とばかり、② の条件をはずし、

順番をかえてもその解

になる。

$$(x, y, z) = (1, 2, 3), (1, 3, 2)$$

$$(2, 1, 3), (2, 3, 1)$$

$$(3, 1, 2), (3, 2, 1)$$

$$(1) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \quad \dots ①$$

(1) と同様にして

$$x \leq y \leq z \quad \dots ②$$

と大小関係を定める。②より

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} \quad \dots ③$$

である。③より

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}$$

①を代入して

$$\frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$$

$$\text{よって } 3x \leq 6 \quad \text{つまり } x \leq 2$$

これは満たす自然数 x は

$$x = 1, 2 \text{ のみ}$$

• $x = 1$ の時

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \quad \dots ④$$

④を代入して

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2}{y}$$

$$\text{つまり } y \leq 4$$

$$\text{②から } x = 1 \text{ より } 1 \leq y$$

$$\text{つまり } y = 1, 2, 3, 4$$

$$y = 1 \text{ のとき } \frac{1}{2} = -\frac{1}{z} \quad (\text{不適})$$

$$y = 2 \text{ のとき } \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{不適})$$

$$y = 3 \text{ のとき } \frac{1}{2} = \frac{1}{z} \quad \text{つまり } z = 6$$

$$y = 4 \text{ のとき } \frac{1}{2} = \frac{1}{z} \quad \text{つまり } z = 4$$

• $x = 2$ のとき

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{2}$$

$$\text{よって } \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \quad \dots ⑤$$

同様にして

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$$

$$1 \leq \frac{2}{y}$$

$$\text{よって } y \leq 2 \text{ より}$$

$$\text{②から } x = 2 \text{ より } 2 \leq y$$

$$\text{つまり } y = 2 \text{ (ただし } ⑤ \text{ を満たさず不適)}$$

⑤から

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{z} \quad \text{つまり } z = 2$$

以上より

$$(x, y, z) = (1, 3, 6), (1, 6, 3)$$

$$(3, 1, 6), (3, 6, 1)$$

$$(6, 1, 3), (6, 3, 1)$$

$$(1, 4, 4), (4, 1, 4)$$

$$(4, 4, 1), (2, 2, 2)$$

6

(1)

$\sqrt{x^2-12}$ が整数 n に $0 \leq x \leq 3$ 。

おと

$$\sqrt{x^2-12} = n$$

左辺は正数 右辺 $n > 0$ 。

両辺を2乗して

$$x^2 - 12 = n^2$$

おと

$$x^2 - n^2 = 12$$

$$(x+n)(x-n) = 12 \dots ①$$

$x+n$ と $x-n$ も整数より

①を満足する x, n は

$x+n$ と $x-n$ も12の約数で
みればいい。

また

$$(x+n) + (x-n) = 2x \\ = \text{偶数}$$

よ、 $x+n$ と $x-n$ の偶奇は
一致する。②

③ $x+n > x-n$ である。

$$x+n > x-n \dots ③$$

である。以上より ②, ③を

両方満足する①を満足する組を
考えよう。

$$\begin{array}{c|c|c} x+n & 6 & -2 \\ \hline x-n & 2 & -6 \end{array} \text{ のみで } x, n \text{ を求める。}$$

おと

$$\begin{array}{c|c|c} 2x & 8 & -8 \\ \hline 2n & 4 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 4 & -4 \\ \hline n & 2 & 2 \end{array}$$

よ、求める整数 x は

$$x = \pm 4$$

(2)

$\sqrt{x^2+x-1}$ が整数 m に $0 \leq x \leq 3$ 。

おと

$$\sqrt{x^2+x-1} = m$$

左辺は正数 右辺 $m > 0$

両辺を2乗して

$$x^2 + x - 1 = m^2$$

左辺を平方完成して

$$(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = m^2$$

両辺を4倍して

$$4(x + \frac{1}{2})^2 - 5 = 4m^2$$

$$\{ 2(x + \frac{1}{2}) \}^2 - 5 = (2m)^2$$

$$(2x+1)^2 - 5 = (2m)^2$$

$$(2x+1)^2 - (2m)^2 = 5$$

$$(2x+1 + 2m)(2x+1 - 2m) = 5 \dots ④$$

$$2x+2m+1 \text{ と } 2x-2m+1 \text{ は}$$

整数より、④を満足する x, m は

$$2x+2m+1 \text{ と } 2x-2m+1 \text{ は } 5 \text{ の}$$

約数でみればいい。

また、 $2(x+m)+1$, $2(x-m)+1$ は

表せる。④を満足する組を
考えよう。

よ、 $m > 0$ である。

$$2x+1 + 2m > 2x+1 - 2m \dots ⑤$$

である。以上より ②, ③を両方満足する

④を満足する組を考えよう。

$$\begin{array}{c|c|c} 2x+1+2m & 5 & -1 \\ \hline 2x+1-2m & 1 & -5 \end{array} \text{ のみで } x, m \text{ を求める。}$$

おと

$$\begin{array}{c|c|c} 4x+2 & 6 & -6 \\ \hline 4m & 4 & 4 \end{array}$$

おと

$$\begin{array}{c|c|c} 4x & 4 & -8 \\ \hline 4m & 4 & 4 \end{array}$$

おと

$$\begin{array}{c|c|c} x & 1 & -2 \\ \hline m & 1 & 1 \end{array}$$

よ、求める整数 x は

$x = 1, -2$

$$x = 1, -2$$

⑦

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{5x+1}{3x-2} &= \frac{5(3x-2+2)+1}{3x-2} \\ &= \frac{5(3x-2)+10+1}{3x-2} \\ &= \frac{5(3x-2)}{3x-2} + \frac{11}{3x-2} \\ &= 5 + \frac{11}{3x-2} \end{aligned}$$

よ7. $5 + \frac{11}{3x-2}$ が整数と

なる7. $\frac{11}{3x-2}$ が整数と

なる7. $3x-2$ が11の約数となる7.

よ7. $3x-2$ が11の約数となる7.

よ7. $3x-2$ が11の約数となる7.

$$3x-2 = 1, 11, -1, -11$$

よ7

$$3x = 3, 13, 1, -9$$

$$x = 1, \frac{13}{3}, \frac{1}{3}, -3$$

$$x \text{ は整数より } x = 1, -3$$

⑧ 分母にない7. 分子の次数が

分母の次数より大きい時は

割り算を行7. 分子の次数の分

が低い状態を作る。

例1. 仮分母を帯分母1に変え7

1/x-3と置く。

$$(2) \quad \frac{4x}{x^2+2x+2} \text{ が } k \text{ という整数}$$

1=2. 7=233. 733

$$\frac{4x}{x^2+2x+2} = k$$

が成り立つ。分母を0と7

整理する。

$$kx^2+2(k-2)x+2k=0 \dots ①$$

となる。このxの2次方程式が

実数解をもつ7.

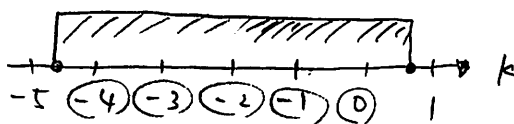
$$D/4 = (k-2)^2 - k \cdot 2k \geq 0$$

整理して

$$k^2+4k-4 \leq 0$$

解いて

$$-2-2\sqrt{2} \leq k \leq -2+2\sqrt{2}$$



この範囲を通過する整数は

$$k = -4, -3, -2, -1, 0$$

の5つである。また、2次方程式①

の解はk≠0の時。

$$x = \frac{-(k-2) \pm \sqrt{D/4}}{k} \dots ②$$

である。D/4が0または平方数

1=233必要7.

$$D/4 = (k-2)^2 - 2k^2$$

8)

$$\bullet k = -4 \text{ の時}$$

$$D/4 = 4$$

$$\bullet k = -3 \text{ の時}$$

$$D/4 = 7 \text{ 不適}$$

$$\bullet k = -2 \text{ の時}$$

$$D/4 = 8 \text{ 不適}$$

$$\bullet k = -1 \text{ の時}$$

$$D/4 = 7 \text{ 不適}$$

よ7 k = -4 の時 233.

この時 ②より x の値を

求める

$$x = \frac{-(-4-2) \pm \sqrt{4}}{-4}$$

$$= \frac{6 \pm 2}{-4} = -1, -2$$

よ7 x も確かに整数となる。

$$k = 0 \text{ の時 } ① \text{ より}$$

$$2(-2)x + 0 = 0$$

$$\text{よ7 } x = 0$$

よ7. x は整数となる。

よ7. k が整数と

なるようxは

$$x = 0, -1, -2$$

++

8

$$(1) x^3 + y^3 = 91$$

左辺を因式分解して、

$$(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 91$$

$$\therefore x+y \text{ と } x^2 - xy + y^2 \text{ は}$$

$$\text{整数より } x+y \text{ と } x^2 - xy + y^2 \text{ は}$$

91の約数である。

よって

$$(x^2 - xy + y^2) - (x+y)$$

$$= x^2 - xy + y^2 - x - y$$

$$= x^2 - (y+1)x + (y^2 - y)$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 + (y^2 - y)$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 - \frac{y^2 + 2y + 1}{4} + \frac{4y^2 - 4y}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3y^2 - 6y - 1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3(y^2 - 2y) - 1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3(y-1)^2 - 3 - 1}{4}$$

$$= \left(x - \frac{y+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y-1)^2 - 1$$

$$\geq -1 \quad \left(\begin{array}{l} ()^2 \geq 0 \\ \text{より} \end{array} \right)$$

が成り立つので、 $x^2 - xy + y^2$ と $x+y$ の

差は -1 以上である。... ①

$$\text{また、} x^2 - xy + y^2$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 + y^2$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

よって $x^2 - xy + y^2$ は 0 以上の整数... ②

である。91 = 7 × 13 であるから、①、②より

足すことで考えよう

$$\begin{array}{c|c|c} x^2 - xy + y^2 & 91 & 13 \\ \hline x+y & 1 & 7 \end{array}$$

よって 2通りである。

$$\cdot \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 91 \\ x+y = 1 \end{cases} \text{ の時}$$

$$y = 1 - x \text{ として代入すると}$$

$$x^2 - x(1-x) + (1-x)^2 = 91$$

整理して

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$(x-6)(x+5) = 0$$

$$x = 6, -5$$

$$\therefore \text{よって } y = -5, 6$$

$$\cdot \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 13 \\ x+y = 7 \end{cases} \text{ の時}$$

$$y = 7 - x \text{ として代入し、整理}$$

$$\text{すると } x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\text{よって } x = 3, 4 \text{ である}$$

$$\therefore \text{よって } y = 4, 3$$

以上より

$$(x, y) = (6, -5), (-5, 6)$$

$$(3, 4), (4, 3)$$

$$(2) x^3 - y^3 = 217$$

左辺を因式分解して

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2) = 217$$

$$\therefore x-y \text{ と } x^2 + xy + y^2 \text{ は}$$

$$\text{整数より } x-y \text{ と } x^2 + xy + y^2 \text{ は}$$

217の約数である。

よって

$$(x^2 + xy + y^2) - (x-y)$$

$$= x^2 + (y-1)x + (y^2 + y)$$

$$= \left(x + \frac{y-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}(y+1)^2 - 1 \geq -1$$

$$\text{よって } x^2 + xy + y^2 \text{ と } x-y \text{ の差は}$$

-1 以上である。... ①

$$\text{また、} x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$$

よって $x^2 + xy + y^2$ は 0 以上の整数

である。... ②

$$217 = 7 \times 31 \text{ であるから}$$

①、②より足すことで

$$\begin{array}{c|c|c} x^2 + xy + y^2 & 217 & 31 \\ \hline x-y & 1 & 7 \end{array} \quad \text{よって 2通りである。}$$

$$\cdot \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 217 \\ x-y = 1 \end{cases} \text{ の時}$$

$$y = x-1 \text{ として代入して整理すると}$$

$$x^2 - x - 72 = 0$$

$$x = 9, -8$$

$$\therefore \text{よって } y = 8, -9$$

$$\cdot \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 31 \\ x-y = 7 \end{cases} \text{ の時}$$

$$y = x-7 \text{ として代入して}$$

整理すると

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x = 1, 6$$

$$\therefore \text{よって } y = -6, -1$$

以上より

$$(x, y) = (9, 8), (-8, -9)$$

$$(1, -6), (6, -1)$$

9

$$x^2 = 2^y + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

右辺は (偶数) + (奇) 奇数である。

よって $x^2 = (\text{奇数})$ である。

x は奇数であることがわかる。

よって $2^y > 0$ である。

$$x^2 > 1 \quad \text{である。}$$

つまり x は 1 より大きい奇数である。

(したがって)

$$x = 2k+1 \quad (k \text{ は自然数})$$

よって、①に代入すると

$$(2k+1)^2 = 2^y + 1$$

$$4k^2 + 4k + 1 = 2^y + 1$$

$$4k^2 + 4k = 2^y$$

$$4k(k+1) = 2^y$$

両辺4で割り、

$$k(k+1) = \frac{2^y}{4} = \frac{2^y}{2^2} = 2^{y-2} \quad \dots \textcircled{2}$$

よって x は 3以上の奇数である。

$$2^y = x^2 - 1 \geq 3^2 - 1 = 8$$

$$\text{よって } 2^y \geq 2^3 \text{ より } y \geq 3 \text{ である。}$$

②より k と $k+1$ は連続する2整数である。

よって k は奇数で $k+1$ は偶数である。

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} k = 1 \\ k+1 = 2^{y-2} \end{array} \right. \quad (1) \left\{ \begin{array}{l} k = 2^{y-2} \\ k+1 = 1 \end{array} \right.$$

よって k は奇数である。 k は自然数より $k=0$ である。

(1) は不適である。

$$\text{よって } k=1, k+1=2^{y-2}$$

である。

$$x = 2k+1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

また、

$$k+1 = 2^{y-2}$$

$$1+1 = 2^{y-2}$$

$$2^1 = 2^{y-2}$$

両辺の指数を比較して

$$1 = y-2 \quad \text{よって } y=3$$

以上より

$$(x, y) = (3, 3)$$

++

(10)

$$(1) \quad 9x - 5y = 3$$

より

$$9x - 3 = 5y$$

$$3(3x - 1) = 5y$$

3と5は互いに素より

y は3の倍数である。

より、 y は1桁の正の整数より

$$y = 3, 6, 9$$

1) $y = 3$ のとき

$$9x - 5 \cdot 3 = 3$$

$$9x - 15 = 3$$

$$9x = 18 \quad x = 2$$

$$2) \quad y = 6 \text{ のとき}$$

$$9x - 5 \cdot 6 = 3$$

$$9x - 30 = 3 \quad x = \frac{11}{3} \quad (\text{不適})$$

$$3) \quad y = 9 \text{ のとき}$$

$$9x - 5 \cdot 9 = 3$$

$$9x - 45 = 3 \quad x = \frac{16}{3} \quad (\text{不適})$$

以上より

$$(x, y) = (2, 3)$$

(2)

(1) より

$$9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 3$$

生成元より、より

$$9x - 5y = 3$$

$$9 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 3$$

$$9(x-2) - 5(y-3) = 0$$

$$9(x-2) = 5(y-3) \quad (*)$$

と変換する

$$9x - 5y = 3 \quad (*)$$

$$x - 2 = 5k$$

と変換する $(*)$ より

$$9 \cdot 5k = 5(y-3)$$

$$9k = y - 3$$

以上より

$$(x, y) = (5k+2, 9k+3)$$

(3)

① x, y は整数

(2) より $x, y \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} x = 5k+2 \\ y = 9k+3 \end{cases}$$

と変換する

$$3x - y = 3(5k+2) - (9k+3)$$

$$= 15k+6-9k-3$$

$$= 6k+3$$

$$= 3(2k+1) \quad (*)$$

(*) が 9 の倍数より

$$3(2k+1) = 9m$$

より

$$2k+1 = 3m$$

$$k=1, m=1 \text{ 以上}$$

との等式は 3 の倍数より

$$2k+1 = 3m$$

$$2k+1 = 3 \cdot 1$$

$$2(k-1) = 3(m-1)$$

3と2は互いに素より

$$k-1 = 3\ell \text{ である。}$$

$$\begin{cases} k = 3\ell + 1 \\ m = 2\ell + 1 \end{cases}$$

より x, y は $(4, 1)$ より

$$3x - y = 3 \quad \begin{cases} 2(3\ell+1) + 1 \end{cases}$$

$$= 3(6\ell+3)$$

$$= 18\ell+9 \quad (*)$$

より ℓ は 1 である。

$3x - y$ は 9 の倍数より

整数 x, y は 1 の倍数。

より $3x - y$ は 3 の倍数の自然数である。(*) より

$$100 \leq 18\ell + 9 < 1000$$

$$91 \leq 18\ell < 991$$

$$\frac{91}{18} \leq \ell < \frac{991}{18}$$

$$5 \cdot \frac{1}{18} \leq \ell < 55 \cdot \frac{1}{18}$$

より ℓ は整数より

$$6 \leq \ell \leq 55$$

2と3は互いに素より

5050より、3桁の数

x, y は 5050 である。

より $\frac{10}{18}$ は 2 の倍数

$\ell = 55$ のときより

$$k = 3\ell + 1 = 3 \times 55 + 1 = 166$$

より

$$x = 5 \times 166 + 2 = 832$$

$$y = 9 \times 166 + 3 = 1497$$

11

(1)

$$63 = 3^2 \times 7$$

$$105 = 3 \times 5 \times 7$$

最小公倍数 $G = 3 \times 7 = 21$

最小公倍数 $L = 3^2 \times 5 \times 7 = 315$

(2)

m, n は 2 桁の自然数. $m > n$

$G = 13$ で割り切れる

$$\begin{cases} m = 13m' \\ n = 13n' \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} m' \text{ と } n' \text{ は} \\ \text{互いに素} \end{array} \right)$$

よって、最小公倍数は $13m'n'$

と表すことができる。ここで問題より

$L = 455$ より

$13m'n' = 455$

つまり

$m'n' = 35 \dots \textcircled{1}$

が成り立つ。 $m > n$ より $13m' > 13n'$

より $m' > n' \dots \textcircled{2}$ でみよ。

①より m', n' は 35 の正の約数より

②でみることを考えよ

$(m', n') = (35, 1), (7, 5)$

の対である。 $m = 13m', n = 13n'$ に代入して

$(m, n) = (455, 13), (91, 65)$

でみよ。 m, n は 2 桁の自然数でみよ。

$(m, n) = (455, 13)$ は不適でみよ。

以上より

$(m, n) = (91, 65)$

(3) (1)より $m = 91, n = 65$ でみよ。

$mx + ny = 13$ は $91x + 65y = 13$

両辺 13 で割り、

$7x + 5y = 1 \dots \textcircled{3}$

とみる。 $x = -2, y = 3$ は ③ の解の 1 つでみよ。

$7x + 5y = 1$

$- \quad 7(-2) + 5 \cdot 3 = 1$

$7(x+2) + 5(y-3) = 0$

$7(x+2) = -5(y-3) \dots \textcircled{4}$

④より 7 と 5 は互いに素より $x+2 = 5k$ (任意)

とみる。④より代入すると

$7 \cdot 5k = -5(y-3)$

$7k = -y+3$

より $y = -7k+3$

以上より ③ を満たす整数解は

$(x, y) = (5k-2, -7k+3)$ と表す。

よって、 $\sqrt{x+y}$ が 30 以下で整数となる

$x+y$ が 30^2 以下の平方数となるのは

$x+y = (5k-2) + (-7k+3) = -2k+1$

より、 k が整数でみよ。 $-2k+1$ は

可べつな奇数と表すことができる。

つまり、 30^2 以下の平方数のうち奇数で

表すものは k の値を適当に選ぶと

表すことができる。 $\sqrt{x+y}$ が 30 以下の

整数となるのは

$-2k+1 = 1^2, 3^2, 5^2, \dots, 29^2$

より $15 \leq k$

(12)

(1)

$$p = \sqrt{56n}$$

$$= \sqrt{2^3 \times 7 \times n}$$

よ、 p が自然数となるには

根号内の整数を素因数分解

(ただし、指数が偶数で偶数

になるように。よ、 n は

最低限、2 と 7 が 1 ずつ

必要である。

$$n = 2 \times 7 \times (\text{自然数})^2$$

とすれば p は根号内はすべて

平方自然数となる。

つまり、 n の値が、 $\frac{10}{42}$ のとき p は

$$n = 2 \times 7 \times 1^2 = 14$$

でよい。このとき

$$p = \sqrt{2^3 \times 7 \times 2 \times 7}$$

$$= \sqrt{2^4 \times 7^2}$$

$$= 2^2 \times 7 = 28$$

(2)

(1) より $p = 28$ である。

このとき

$$N = \sqrt{m^2 - 28}$$

よ、 N が自然数となるには

根号内は平方数でなければならない。

つまり、 $m^2 - 28$ が平方数となるように。

$$m^2 - 28 = k^2 \quad (k \text{ 整数})$$

よ、

$$m^2 - k^2 = 28$$

$$(m+k)(m-k) = 28 \dots \textcircled{1}$$

よ、

$$(m+k) + (m-k) = 2m = \text{偶数}$$

よ、 $m+k$ と $m-k$ の偶奇は一致する。... $\textcircled{2}$

また、 $\textcircled{1}$ より、 $m+k$ と $m-k$ は整数である。

$\textcircled{1}$ を満たすためには、 $m+k$ と $m-k$ は

28 の素因数でなければならない。

$\textcircled{2}$ を考えれば、

$m+k$	2	14	-2	-14
$m-k$	14	2	-14	-2

1 = 28 の場合。この場合の組み合わせは、

$2m$	16	16	-16	-16
$2k$	-12	12	12	-12

つまり

m	8	8	-8	-8
k	-6	6	6	-6

よ、 m は自然数である。

$m = -8$ は不適。

$$\text{よ、よ、} m = 8$$

13

(1)

$$N = 4 \text{ 以下}$$

$$m^2(n-1) = 4$$

$$\text{よって } m^2(n-1) = 2^2 \dots \textcircled{1}$$

ここで m^2 は平方数である ($m^2 > 0$)

であるから、 $\textcircled{1}$ より 2^2 の素因数の中

で平方数となるのは 1^2 と 2^2 のみ。

つまり m^2 は 1^2 か 2^2 のどちらかである。

$$\bullet m^2 = 1^2 \text{ の場合}$$

$$1^2(n-1) = 2^2 \text{ より } n = 5$$

$$\bullet m^2 = 2^2 \text{ の場合}$$

$$2^2(n-1) = 2^2 \text{ より } n = 2$$

以上より

$$(m, n) = (1, 5), (2, 2)$$

(2)

$$N = 600 \text{ 以下}$$

$$m^2(n-1) = 600$$

右辺を素因数分解して

$$m^2(n-1) = 2^3 \times 3 \times 5^2 \dots \textcircled{2}$$

(1) と同様で、 $2^3 \times 3 \times 5^2$ の素因数の中

で平方数となるのは

$$m^2 = 1^2, 2^2, 5^2, (2 \times 5)^2$$

のどれかである。

$$\bullet m^2 = 1^2 \text{ の場合}$$

$$1^2(n-1) = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$n-1 = 600 \text{ より } n = 601$$

$$m = 1 \text{ と } n = 601 \text{ の } \frac{601}{600} \text{ は素数でない}$$

$$m \text{ と } n \text{ は } \frac{601}{600} = \frac{601}{2^3 \times 3 \times 5^2} \text{ である}$$

$$\bullet m^2 = 2^2 \text{ の場合}$$

$$2^2(n-1) = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$n-1 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$n-1 = 150$$

$$n = 151$$

$$m = 2 \text{ と } n = 151 \text{ は } \frac{151}{2} = \frac{151}{2} \text{ である}$$

$$\bullet m^2 = 5^2 \text{ の場合}$$

$$5^2(n-1) = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$n-1 = 2^3 \times 3$$

$$n-1 = 24$$

$$n = 25$$

$$m = 5 \text{ と } n = 25 \text{ は } \frac{25}{5} = 5 \text{ である}$$

$$\bullet m^2 = (2 \times 5)^2 \text{ の場合}$$

$$(2 \times 5)^2(n-1) = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$2^2 \times 5^2(n-1) = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

$$n-1 = 2 \times 3$$

$$n-1 = 6$$

$$n = 7$$

$$m = 10 \text{ と } n = 7 \text{ は } \frac{7}{10} = \frac{7}{2 \times 5} \text{ である}$$

以上より

$$(m, n) = (1, 601), (2, 151), (10, 7)$$

14

$$(1) \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$$

よ、

$$G = 2^2 \times 3 = 12$$

$$L = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$$

(2) $P = pG, Q = qG$

(p, q は互いに素)

で、 P, Q の最小公倍数は pqG と表せる。

よ、 L で割ると

$$L = pqG \dots (1)$$

が成り立つ。(1)より $G = 2^2 \times 3$,

$$L = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = pq \times 2^2 \times 3$$

よ、

$$3 \times 5 \times 7 = pq \dots (2)$$

よ、

$$pq = 105$$

また、 $P + Q$ が最小になることは

表せる。

$$P + Q = pG + qG$$

$$= (p + q)G$$

よ、 $p + q$ が最小になることは $P + Q$ が最小になる。

よ、 $P > Q$ で割ると

$$pG > qG \quad \text{よ、} \quad p > q \dots (3)$$

よ、(2), (3) を満たす p, q の組で p, q が互いに素になるものは

p	$3 \times 5 \times 7$	5×7	3×7	3×5
q	1	3	5	7

の4通りがある。よ、

$$(p, q) = (105, 1), (35, 3)$$

$$(21, 5), (15, 7)$$

で、 p, q の中で $p + q$ が最小

$$(p, q) = (15, 7)$$

で、よ、

$$P = pG = 15 \times 12 = 180$$

$$Q = qG = 7 \times 12 = 84$$

よ、

$$(P, Q) = (180, 84)$$

(3)

$$Pa + Qb = 96$$

(2)より

$$180a + 84b = 96$$

両辺12で割ると

$$15a + 7b = 8 \dots (1)$$

$$\therefore a = 1, b = -1$$

(1)の整数解のみで、

$$15a + 7b = 8$$

$$- \quad 15 \times 1 + 7 \times (-1) = -8$$

$$15(a-1) + 7(b+1) = 0$$

$$15(a-1) = -7(b+1) \dots (2)$$

(2)より15と7は互いに

素で割るので、 $a-1$ は

7の倍数で、

よ、 $a-1 = 7k$

$$a-1 = 7k$$

よ、(2)より15と7は互いに

$$15 \times 7k = -7(b+1)$$

$$15k = -(b+1)$$

$$15k = -b-1$$

$$b = -15k-1$$

よ、 L は551

$$(a, b) = (7k+1, -15k-1)$$

(k は整数)

15

(1)

Nが9の倍数の時

Nの各位の数字を足して

9の倍数になる場合はいい。

よって

$$N = \overbrace{1}^+ \overbrace{a}^0 \overbrace{1}^+ \overbrace{b}^-$$

よって

$$1 + a + 1 + b = (9 \text{ の倍数})$$

$$(0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9) \dots \textcircled{1}$$

よって

$$a + b + 2 = (9 \text{ の倍数})$$

となる場合はいい。ここで①より

$$0 \leq a + b \leq 18$$

よって

$$2 \leq a + b + 2 \leq 20$$

よって、この範囲で9の倍数となるのは

$$a + b + 2 = 9, 18$$

のみである。よって

$$a + b = 7, 16$$

(2)

9と5は互いに素である。

Nが9の倍数かつ5の倍数

となる場合 Nは45の倍数である。

Nが5の倍数となるのは

一の位が0か5になる場合である。

・ $b = 0$ のとき

$$(1) \text{より } a + 0 = 7, 16$$

$$0 \leq a \leq 9 \text{ より } a = 16 \text{ は不適}$$

・ $b = 5$ のとき

$$a + 5 = 7, 16$$

よって

$$a = 2, 11$$

$$0 \leq a \leq 9 \text{ より } a = 11 \text{ は不適}$$

よって

$$(a, b) = (7, 0), (2, 5)$$

であるから

$$N = 1710, 1215$$

(3)

(1)のNの中で最小のもの

$$1215 \text{ より } M = 1215$$

ここで

$$M = 45 \times 27$$

$$= (9 \times 5) \times (9 \times 3)$$

$$= 3^2 \times 5 \times 3^3$$

$$= 3^5 \times 5$$

である。

M以下の自然数で

Mとの最大公約数が

9になるようなものの個数を求める。

$$M = 3^5 \times (3^2 \times 5)$$

$$= 9 \times 135$$

である。

$$x = 9 \times k$$

(k は135と互いに素)

と互いに素の自然数 x は

Mとの最大公約数が9になる。

x はM以下より

$$x \leq M$$

$$9k \leq 9 \times 135$$

$$\text{よって } k \leq 135 \text{ である。}$$

よって、求める x の個数は

135以下の自然数で

135と互いに素であるものの

個数に等しい。

$$135 = 3^3 \times 5 \text{ より}$$

3の倍数でも5の倍数でもない

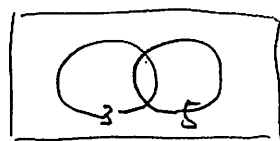
もの個数を求める。

135以下で

$$3 \text{ の倍数} \dots 135 \div 3 = 45 \text{ 個}$$

$$5 \text{ の倍数} \dots 135 \div 5 = 27 \text{ 個}$$

$$15 \text{ の倍数} \dots 135 \div 15 = 9 \text{ 個}$$



135個

よって

(3の倍数でも5の倍数でもないもの)

であるものは

$$45 + 27 - 9 = 63 \text{ 個}$$

である。

(3の倍数でも5の倍数でもないもの)

$$\text{は } (135) - 63$$

$$= 135 - 63 = 72 \text{ 個。}$$

よって、Mとの最大公約数が

9になるものは

$$72 \text{ 個}$$

である。

16

(1)

$$xy - x - 3y + 3 = p \dots ①$$

$$x(y-1) - 3(y-1) = p$$

$$(x-3)(y-1) = p$$

今、 $p = 5$ と仮定する

$$(x-3)(y-1) = 5 \dots ②$$

x, y は自然数より、 $x-3$ と

$y-1$ も素数で表せる。②より

$x-3$ と $y-1$ は 5 の素因数で表せる。③

$x > 0, y > 0$ より $x-3 > -3, y-1 > -1$ ④

よって ③, ④ を満たす x, y は

② を満たす素数は

$$\begin{array}{c|c|c} x-3 & 5 & 1 \\ \hline y-1 & 1 & 5 \end{array} \text{のみで表せる。}$$

つまり

$$\begin{array}{c|c|c} x & 8 & 4 \\ \hline y & 2 & 6 \end{array}$$

よって

$$(x, y) = (8, 2), (4, 6)$$

(2)

(1) と同様にして

$$(x-3)(y-1) = p \dots ①$$

と仮定すると、 x, y は 2014 年、自然数より

$$0 < x \leq 20, 0 < y \leq 20$$

よって

$$-3 < x-3 \leq 17, -1 < y-1 \leq 19 \dots ②$$

また、 p は素数で表せるが、①より素数 p が

2 密に現れることは、 $x-3$ と $y-1$ の

と仮定すると $-1 < x-3 < 17$ と仮定。

② と仮定すると

$$x-3=1, x-3=-1, y-1=1$$

の 3 つの組み合わせのみで表せる。

• $x-3=1$ のとき (つまり $x=4$) のとき

$$①より y-1=p \text{ と仮定}$$

よって ② に代入すると

$$-1 < p \leq 19 \dots ③$$

と仮定する。 p は素数より ③ を満たす素数は

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 \text{ の 8 個} ④$$

よって $y = 3, 4, 6, 8, 12, 14, 18, 20$ と仮定。

• $x-3=-1$ のとき (つまり $x=2$) のとき

$$①より (-1)(y-1) = p \text{ より } y-1 = -p \text{ と仮定}$$

② に代入して

$$-1 < -p \leq 19 \text{ より } -19 \leq p < 1 \dots ⑤$$

(つまり ⑤) を満たす素数は存在しない。

• $y-1=1$ のとき (つまり $y=2$) のとき

$$①より x-3=p \text{ と仮定}$$

$$よって ② に代入すると $-3 < p \leq 17 \dots ⑥$$$

⑥ を満たす素数は

$$p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \text{ の 7 個} ⑦$$

よって $x = 5, 6, 8, 10, 14, 16, 20$ と仮定。

よって ④, ⑦ の 15 個の組み合わせは重複はない。

$$xy - x - 3y + 3 = p \text{ を満たす } (x, y, p) \text{ の}$$

$$\text{組は } \underline{15 \text{ 個}}$$

17

(1)

• $a+15$ は b で割る余りが 2 で余り k である

$$a+15 = b \times 2 + k \dots ①$$

また、余りは 0 より小さい。 $0 \leq k < b \dots (*)$

• $b+2$ は a で割る余りが 4 である

$$b+2 = a \times k \dots ②$$

よって ①より

$$a+15 = 2b + k \dots ③$$

②より

$$b+2 = ak \dots ④$$

④より $b = ak - 2$ として ③に代入すると

$$a+15 = 2(ak-2) + k$$

$$a+15 = 2ak - 4 + k$$

よって

$$2ak + k - a - 19 = 0$$

(2)

(1) の条件より

$$2ak + k - a - 19 = 0$$

$$2k(a+1) - a - 19 = 0$$

$$2k(a+1) - (a+1) - 19 = 0$$

$$2k(a+1) - (a+1) + 1 - 19 = 0$$

$$2k(a+1) - (a+1) - 18 = 0$$

$$2k(a+1) - (a+1) = 18$$

$$(2k-1)(a+1) = 18 \dots ⑤$$

a, k は自然数

$2k-1, a+1$ は整数

よって ⑤より $2k-1, a+1$ は

18 の約数

また、 $2k-1$ は奇数

よって、 a は自然数

$a+1$ は正の数、⑤より

$2k-1$ も正の数

よって ⑤より ⑤を満たす組は

$$\begin{array}{c|c|c|c} 2k-1 & 1 & 3 & 9 \\ \hline a+1 & 18 & 6 & 2 \end{array} \text{ の 3 組あり}$$

また

$$\begin{array}{c|c|c|c} k & 2 & 4 & 10 \\ \hline a & 17 & 5 & 1 \end{array}$$

よって

$$\begin{array}{c|c|c|c} k & 1 & 2 & 5 \\ \hline a & 17 & 5 & 1 \end{array}$$

よって $a=17, b=15, k=1$ (1)より $b = ak - 2$

である

$$\begin{array}{c|c|c|c} k & 1 & 2 & 5 \\ \hline a & 17 & 5 & 1 \\ \hline b & 15 & 8 & 3 \end{array}$$

よって、(1) の (*) を満たす組は

$(a, b, k) = (17, 15, 1)$ のみ

$0 \leq 2 \times 1 < 15$ より 条件 あり

$(a, b, k) = (5, 8, 2)$ のみ

$0 \leq 2 \times 2 < 8$ より 条件 あり

$(a, b, k) = (1, 3, 5)$ のみ

$0 \leq 1 \times 5 < 3$ は 条件 あり

よって

$(a, b, k) = (17, 15, 1), (5, 8, 2)$

⑧

(1) 6の約数は1, 2, 3, 6 8y
 $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

すなわち素数aの約数は1とa
 であるから

$$S(a) = a + 1$$

(2) a, b が素数のとき
 ab の約数は1, a, b, ab
 のみである。

$$S(ab) = 1 + a + b + ab$$

$$\therefore S(ab) = ab + 9 \text{ であるから}$$

$$1 + a + b + ab = ab + 9$$

$$\therefore a + b = 8 \dots ①$$

すなわち $a > b \dots ②$ である。

a, b は素数であるから、②を満たす素数の組は①を満たす組は

$$(a, b) = (7, 1) \quad (6, 2) \quad (5, 3)$$

x x 0.4

(1は素数でない)

$$\therefore a = 5, b = 3$$

正整数a, b である。

(3) a, b が素数のとき
 ab^2 の約数は
 1, a, b, ab, b^2, ab^2

の6個である。

$$S(ab^2) = 1 + a + b + ab + b^2 + ab^2$$

$$\therefore S(ab^2) = ab^2 + 4$$

$$\therefore 1 + a + b + ab + b^2 + ab^2 = ab^2 + 4$$

$$\therefore a + b + ab + b^2 = 4$$

左辺を因数分解して

$$a + b + b(a + b) = 4$$

$$(a + b)(1 + b) = 4 \dots ①$$

$\therefore a, b$ は素数の組である。

$$a > 1 \text{ より } a + b > 1 + b$$

より $a + b$ の方が $1 + b$ より大きい。②

$$\therefore a + b \text{ と } 1 + b \text{ の差をとると}$$

$$(a + b) - (1 + b) = a - 1 = \text{偶数}$$

$$\left(\begin{array}{l} a > b \text{ より } a \text{ は2より} \\ \text{大きい素数} \rightarrow a \text{ は奇数} \end{array} \right)$$

より $a + b$ と $1 + b$ の偶奇は

$$\text{一致する} \dots ③$$

①より $a + b$ と $1 + b$ は40の正の約数である。②, ③より

$$\begin{array}{c|c|c} a+b & 20 & 10 \\ \hline 1+b & 2 & 4 \end{array}$$

のみである。すなわち2組あり。

$$\bullet a + b = 20, 1 + b = 2 \text{ のとき}$$

$$a = 19, b = 1$$

(a, b) = (1, 1) は素数の組

ではないから不適。

$$\bullet a + b = 10, 1 + b = 4 \text{ のとき}$$

$$a = 7, b = 3$$

より適当。

よって

$$a = 7, b = 3$$

19

$$5x = 7(y-1) \dots ①$$

(1)

①より、5と7は互いに素であるから

x は7の倍数である。

$10 \leq x \leq 30$ であるから、

この範囲内で7の倍数は

$$x = 14, 21, 28 \text{ のみ}$$

・ $x = 14$ のとき

$$5 \times 14 = 7(y-1)$$

$$5 \times 2 = y-1 \quad \therefore y = 11$$

・ $x = 21$ のとき

$$5 \times 21 = 7(y-1)$$

$$5 \times 3 = y-1 \quad \therefore y = 16$$

・ $x = 28$ のとき

$$5 \times 28 = 7(y-1)$$

$$5 \times 4 = y-1 \quad \therefore y = 21$$

以上より

$$(x, y) = (14, 11), (21, 16), (28, 21)$$

(2)

y は11で割ると5余るから、商を k とし

$$y = 11k + 5 \dots ②$$

と書ける。一方①より $y-1$ は5の倍数

であるから、 ℓ を整数とし

$$y-1 = 5\ell \dots ③$$

と書ける。②と③に代入して

$$(11k+5)-1 = 5\ell$$

より

$$5\ell - 11k = 4 \dots ④$$

とある。 ℓ と k は④を満たす

整数であることが必要。

ここで $\ell = 3, k = 1$ は④の

整数解の1つである。

より

$$5\ell - 11k = 4$$

$$- \quad 5 \times 3 - 11 \times 1 = 4$$

$$5(\ell-3) - 11(k-1) = 0$$

$$5(\ell-3) = 11(k-1) \dots ⑤$$

⑤より 5×11 は互いに素

であるから、

$k-1$ は5の倍数

とあるから、 m を整数とし

$$k-1 = 5m$$

と書ける。⑤に代入して

$$5(\ell-3) = 11 \times 5m$$

$$\ell-3 = 11m$$

$$\ell = 11m + 3$$

とある。以上より

④を満たす ℓ と k は

$$\begin{cases} \ell = 11m + 3 \\ k = 5m + 1 \end{cases} \dots ⑥$$

と m を用いて表すことができる。

⑥と③に代入して

$$y = 11(5m+1) + 5$$

$$= 55m + 16$$

より、3桁で最も小さい y

を求めればよい。

$$55m + 16 \geq 100$$

を満たす最小の m を求める。

$$m = 1 \text{ のとき } y = 71$$

$$m = 2 \text{ のとき } y = 126$$

より $m = 2$ である。

③と①に代入して

$$5x = 7 \times 5\ell$$

より $x = 7\ell$ である。

⑥と③に代入して

$$x = 7(11m+3)$$

$$= 77m + 21$$

$$m = 2 \text{ のとき } x = 175$$

以上より

$$(x, y) = (175, 126)$$

(1)

$$126 \times 2 =$$

$$2 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2 = 63 \text{ 個}$$

$$2^2 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2^2 = 31 \text{ 個}$$

$$2^3 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2^3 = 15 \text{ 個}$$

$$2^4 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2^4 = 7 \text{ 個}$$

$$2^5 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2^5 = 3 \text{ 個}$$

$$2^6 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2^6 = 1 \text{ 個}$$

$$2^7 \text{ の倍数} \dots 126 \div 2^7 = 0 \text{ 個}$$

$$N = 126! \text{ であり}$$

N を素因数分解すると

素因数2の個数 p は

$$p = 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1$$

$$> 120$$

20

$$(1) \quad x = 84 = 2^2 \times 3 \times 7$$

$$y = 98 = 2 \times 7^2$$

よ7

$$\frac{10}{12} \text{ 最大公約数 } G = 2 \times 7 = 14$$

$$\frac{10}{12} \text{ 最小公倍数 } L = 2^2 \times 3 \times 7^2 = 588$$

(2)

12と7の $LG = xy$

が成り立つので、代入して

$$172 \times G = 432$$

$$G = 432 \div 172$$

$$= \underline{6}$$

よ7 最大公約数の $G = 6$ あり

$$\begin{cases} x = 6x' \\ y = 6y' \end{cases} \quad (x', y' \in \mathbb{N}, 1 \leq x' \leq 12, 1 \leq y' \leq 7) \dots \textcircled{1}$$

よ7 $L = 6x'y'$

よ7 12と7の $L = 172$ あり

$$172 = 6x'y'$$

よ7

$$12 = x'y' \dots \textcircled{2}$$

よ7 12と7の $L = 172$ あり

$$6x' > 6y' \text{ かつ } x' > y' \dots \textcircled{3}$$

よ7. ② かつ x' と y' は 12 の正の約数

よ7. ③ かつ $x' > y'$ のとき

x'	12	4
y'	1	3

よ7 2組あり

① 12と7の

x	12	14
y	6	18

よ7

$$(x, y) = (12, 6), (14, 18)$$

(3)

$$\begin{cases} x = x'G \\ y = y'G \end{cases} \quad (x', y' \in \mathbb{N}, 1 \leq x' \leq 12, 1 \leq y' \leq 7) \dots \textcircled{1}$$

よ7 $x + y = 96$ 12と7の

$$x'G + y'G = 9G$$

よ7 $x' + y' = 9 \dots \textcircled{2}$

よ7 x, y は自然数より $x > 0, y > 0$

よ7 $x' > 0, y' > 0 \dots \textcircled{3}$

よ7 $x > y$ より $x'G > y'G$, かつ $x' > y' \dots \textcircled{4}$

② かつ $x' = 9 - y'$ ④ 12と7の

$$9 - y' > y' \text{ かつ } y' < \frac{9}{2}$$

④ かつ $0 < y' < \frac{9}{2}$

よ7 ④ かつ y' は自然数 $y' = 1, 2, 3, 4$

よ7. ② かつ

x'	8	7	6	5
y'	1	2	3	4

よ7 $(x', y') = (6, 3)$ は ① 2組あり ② 1組あり ③ 1組あり ④ 1組あり

よ7 $\frac{y}{x}$ の値は ① 2組あり ② 1組あり ③ 1組あり ④ 1組あり

$$\frac{y}{x} = \frac{y'G}{x'G} = \frac{y'}{x'}$$

よ7 $\frac{y'}{x'}$ の値は ① 2組あり ② 1組あり ③ 1組あり ④ 1組あり

よ7 $(x', y') = (8, 1)$ のとき $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{1}{8}$

よ7 $(x', y') = (7, 2)$ のとき $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{2}{7}$

よ7 $(x', y') = (5, 4)$ のとき $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'} = \frac{4}{5}$