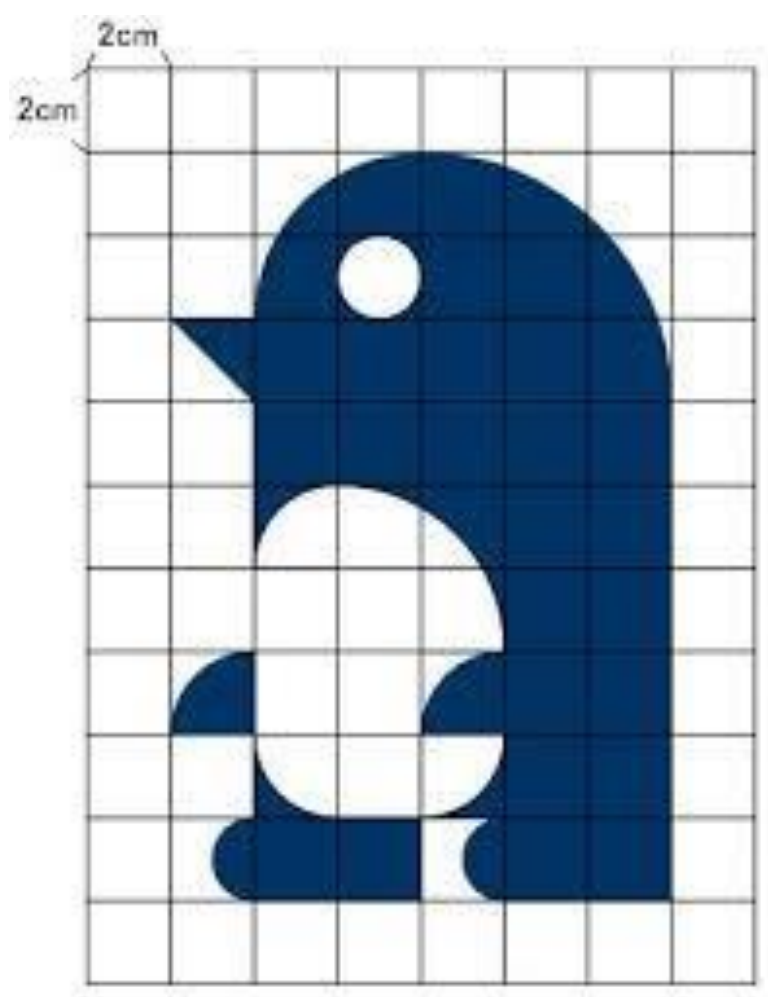


数学発展課題

elementary geometry

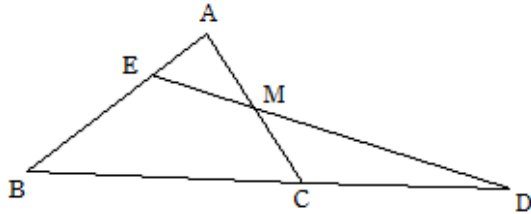


()年()組()番 氏名()

平面図形

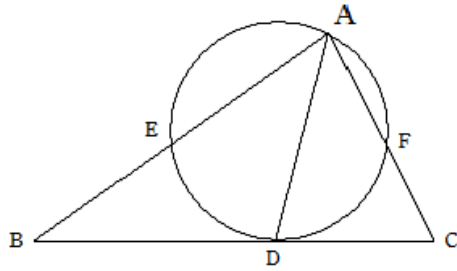
平成 ____ 年 ____ 月 ____ 日

- 1 $AB=5$, $BC=6$, $CA=4$ の $\triangle ABC$ があり, 辺 AC の中点を M とする。図のように, 辺 BC の C を越える延長線上に点 D をとり, 直線 DM と辺 AB の交点を E とすると, $\triangle ABC$ と $\triangle AME$ が相似になった。また, $\triangle ABC$ の面積を S とする。



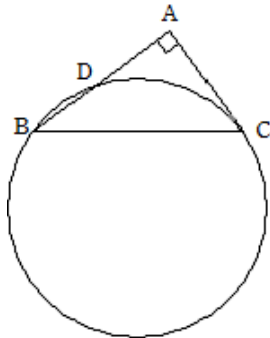
- (1) 線分 AE の長さを求めよ。また, $\triangle AME$ の面積を S で表せ。
- (2) 線分 CD の長さを求めよ。
- (3) 直線 BM と線分 AD の交点を F とするとき, $\triangle MDF$ の面積を S で表せ。

- 2 図のように $\triangle ABC$ があり、 $AB : AC = 3 : 2$ 、 $BC = 10$ である。 A の二等分線と辺 BC の交点を D とし、辺 BC に点 D で接して点 A を通る円と辺 AB 、 AC の交点のうち、 A でない方をそれぞれ E 、 F とする。



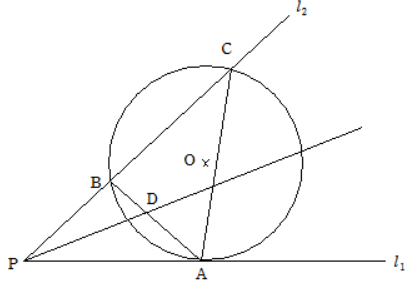
- (1) 線分 BD の長さを求めよ。
- (2) $AB = 9$ のとき、線分 BE の長さを求めよ。またこのとき、線分 AF の長さを求めよ。
- (3) (2) のとき、線分 AD 、 CE の交点を G とする。 $\triangle ABC$ の面積を S とするとき、 $\triangle AGF$ の面積を S を用いて表せ。

- 3 図のように $AB=4$, $BC=5$, $\angle BAC=90^\circ$ の直角三角形 ABC と, 点 B を通り, 直線 AC と点 C で接する円 O がある。また, 円 O と辺 AB の交点のうち, B でない方の点を D とする。



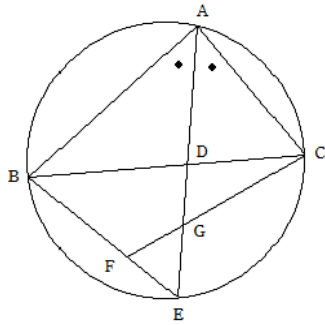
- (1) 辺 AC の長さを求めよ。また, 線分 AD の長さを求めよ。
- (2) $\angle ABC$ の二等分線と辺 AC の交点を E とするとき, 線分 BE の長さを求めよ。
- (3) (2) のとき, 線分 BE と線分 CD の交点を F とする。このとき, $\frac{BF}{FE}$ の値を求めよ。また, 四角形 $ADFE$ の面積を求めよ。

- 4 図のように円 O と、円外の点 P を通る直線 l_1, l_2 がある。 l_1 は円 O の接線で、点 A は接点である。また、 l_2 は円 O と 2 点で交わり、交点を点 P に近い方から順に B, C とする。 APC の二等分線と線分 AB の交点を D とする。このとき、 $PA=6$ 、 $AD:DB=3:2$ である。



- (1) 線分 PB の長さを求めよ。
- (2) 線分 BC の長さを求めよ。また、 $AB=a$ のとき、線分 AC の長さを a を用いて表せ。
- (3) 直線 CD と線分 PA の交点を E とするとき、 $PE:EA$ を求めよ。また、点 D が $\triangle PAC$ の内心であるとき、(2) の a の値を求めよ。

- 5 図のように、円 O に内接する $\triangle ABC$ があり、 $AB : AC = 4 : 3$, $BC = 8$ を満たしている。 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D , $\angle BAC$ の二等分線と円 O との交点のうち A でない方を E とする。また、線分 BE を $2 : 1$ に内分する点を F , 線分 CF と AE の交点を G とする。

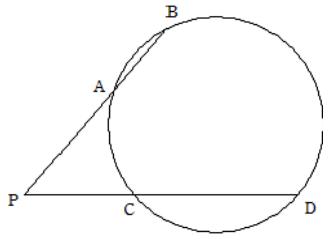


- (1) $BD : DC$ を最も簡単な整数比で表せ。また、線分 BD の長さを求めよ。
- (2) $\frac{CG}{GF}$ の値を求めよ。
- (3) 直線 BG と線分 CE の交点を H とする。このとき、 $\frac{HC}{EH}$ の値を求めよ。また、 $BE = 5$ のとき、 $\triangle CGH$ の面積を求めよ。

平面図形

平成 ____ 年 ____ 月 ____ 日

- 6 図のように、円周上に 4 点 A, B, C, D があり、直線 AB, CD の交点を P とするとき、 $PA=5, PC=4, CD=6$ である。

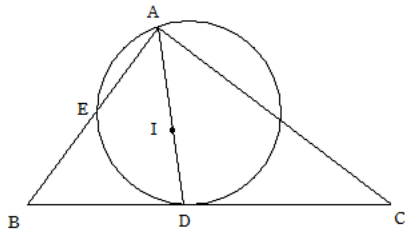


- (1) 線分 PB の長さを求めよ。
- (2) 直線 AD と BC の交点を Q 、直線 PQ と BD の交点を R とする。直線 BC が $\triangle PBD$ の二等分線であるとき、線分 BD の長さを求めよ。また、 $BR : RD$ を最も簡単な整数比で表せ。
- (3) (2) のとき、 $\triangle BPD$ の面積 S とする。このとき、 $\triangle CQR$ の面積を S を用いて表せ。

平面図形

平成 ____ 年 ____ 月 ____ 日

- 7 $AB=3, BC=5, CA=4$ である $\triangle ABC$ がある。 $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とし、 $\triangle ABC$ の内心を I とする。また、点 D で辺 BC に接して点 A を通る円と辺 AB との交点のうち、 A でない方の点を E とする。

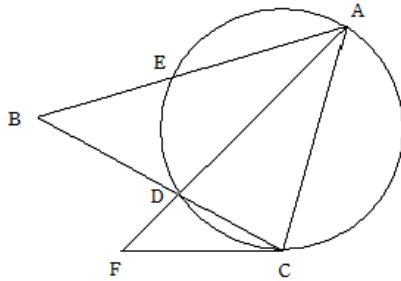


- (1) 線分 BD の長さを求めよ。
- (2) $AI : ID$ を最も簡単な整数の比で表せ。また、線分 BE の長さを求めよ。
- (3) 線分 BI と線分 DE の交点を F とする。 $\frac{BF}{FI}$ の値を求めよ。また、 $\triangle AFI$ の面積を求めよ。

平面図形

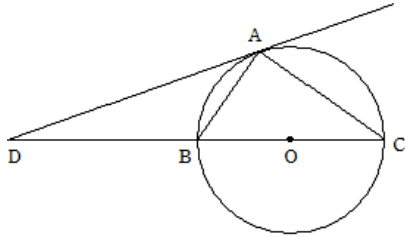
平成 ____ 年 ____ 月 ____ 日

- 8 図のような $\triangle ABC$ があり、 $\angle A$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。また、 $\triangle ACD$ の外接円と辺 AB の交点のうち A でない方を E 、点 C における円の接線と直線 AD の交点を F とする。このとき、 $CF=4$ 、 $DF=2$ である。



- (1) 線分 AF の長さを求めよ。
- (2) $\triangle ABD$ と $\triangle CFD$ が相似であることを証明せよ。また、 $CD=3$ であるとき、線分 BD 、辺 AC の長さをそれぞれ求めよ。
- (3) (2) のとき、線分 BE の長さを求めよ。また、2 直線 CE 、 AD の交点を G とするとき、 $\frac{DG}{GA}$ の値を求めよ。

- 9 図のように、 $BC=6$ である $\triangle ABC$ があり、辺 BC は $\triangle ABC$ の外接円 O の直径である。点 A における円 O の接線と直線 BC との交点を D とすると、 $BD=6$ となった。

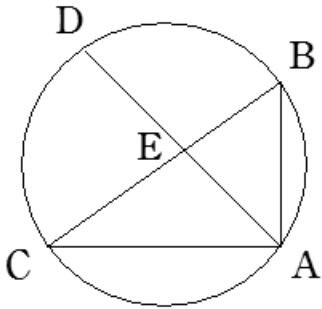


- (1) 線分 AD の長さを求めよ。
- (2) $\frac{AC}{AB}$ の値を求めよ。また、辺 AC の長さを求めよ。
- (3) 点 D を通り直線 BC に垂直な直線と直線 AC との交点を E とする。線分 CE の長さを求めよ。また、 $\angle BCA$ の二等分線と線分 AD 、 DE との交点をそれぞれ F 、 G とする。 $\frac{CF}{FG}$ の値を求めよ。

10

ABC において、 $\angle A = 90^\circ$ 、 $AB = 3$ 、 $AC = 4$ である。 $\angle A$ の二等分線がこの三角形の外接円と交わる点のうち A と異なる方を D とし、線分 AD と辺 BC の交点を E とする。

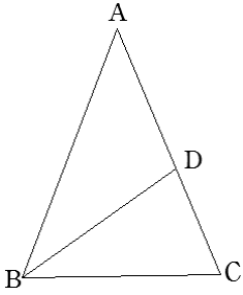
- (1) 線分 BC、BE の長さを求めよ。
- (2) 線分 CD の長さを求めよ。
- (3) 線分 ED、AD の長さを求めよ。
- (4) ABC の外接円の弧 (点 D を含まない方) 上に点 P をとり、線分 DP と辺 BC との交点を Q とする。 $\angle DEQ = \angle DPA$ であることを示し、これを用いて線分 DP、DQ の長さの積 $DP \cdot DQ$ を求めよ。



11

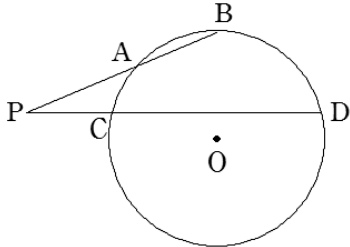
ABC において、 $\angle B$ の二等分線と辺 AC との交点を D とすると、 $AB = 5$ 、 $AD = 3$ 、 $DC = 2$ である。

- (1) 線分 BC の長さを求めよ。
- (2) ABC の重心を G とするとき、線分 AG の長さを求めよ。
- (3) ABC の重心を G、内心を I とするとき、 $\triangle DGI$ の面積を求めよ。



12 図のように、円 O の弦 AB と弦 CD のそれぞれの延長の交点を P とすると、 $AB=2$ 、 $PA=3$ 、 $PC=2$ である。

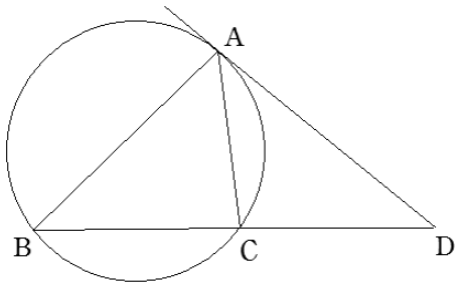
- (1) 線分 PD の長さを求めよ。
- (2) $BD=3$ のとき、線分 AC の長さを求めよ。
- (3) (2) のとき、点 P における $\triangle PAC$ の外接円の接線に平行に点 C から直線を引き、直線 PA との交点を Q とする。このとき、線分 CQ の長さを求めよ。



13 $BC=5$, $AB > AC$ であるような $\triangle ABC$ がある。

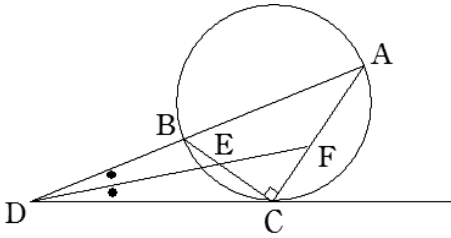
$\triangle ABC$ の外接円の点 A における接線が直線 BC と交わる点 D とすると, $CD=4$ である。

- (1) DA の長さを求めよ。
- (2) $\angle ACB = 2\angle ABC$ のとき, AB , AC の長さをそれぞれ求めよ。
- (3) 直線 AD に平行で, 辺 AB , AC と交わる直線を引き, 交点をそれぞれ E , F とする。(2) のとき, $AE=x$ として, CF の長さを x で表せ。
- (4) (3) において, $AE = CF$ のとき, EF の長さを求めよ。



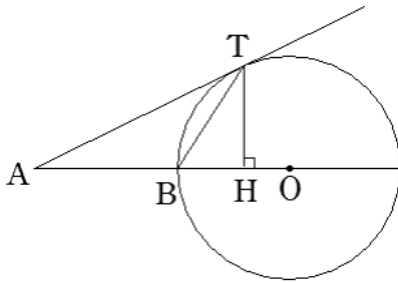
14 図のような $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC とその外接円がある。直線 AB と点 C における円の接線の交点を D とし、 $\angle BDC$ の二等分線と辺 BC 、 AC の交点をそれぞれ E 、 F とする。ただし、 $AC > BC$ とする。

- (1) $\angle ABC = 55^\circ$ のとき、 $\angle BDC$ の大きさを求めよ。
- (2) $\angle ABC = \alpha$ のとき、 $\angle BDC$ の大きさを α を用いて表せ。また、 $\angle CEF$ の大きさを求めよ。
- (3) $AB = 3$ 、 $BD = 1$ のとき、 CD の長さを求めよ。また、 CEF の面積を求めよ。



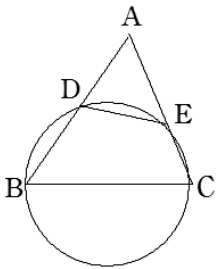
- 15** 右図のように、円 O の外部の点 A から円 O に接線を引き、接点を T とする。また、円の中心 O と点 A を結ぶ線分と円の交点を B 、点 T から直線 AB に垂線を引き、その交点を H とすると、 $\angle ATB = \angle BTH$ である。さらに、 $AT = 6$ 、 $TH = 2$ とする。

- (1) 線分 AH 、 AB の長さをそれぞれ求めよ。
 (2) 円 O の半径 r を求めよ。
 (3) 円 O の直径の 1 つを TC 、直線 BC と TH の交点を D とするとき、線分 CD の長さを求めよ。



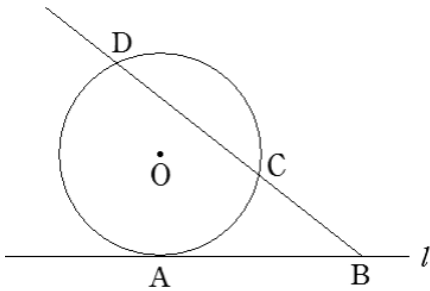
16 $\angle A = 60^\circ$, $BC = 2$ の鋭角三角形 ABC があり, 辺 BC を直径とする円と辺 AB , AC との交点をそれぞれ D , E とする。

- (1) $\angle AED$ の大きさを求めよ。また, $AE:AB$ を求めよ。
- (2) $\triangle AED \sim \triangle ABC$ であることを示し, 線分 DE の長さを求めよ。
- (3) 直線 BC が直線 DE と点 F で交わり, E が線分 DF の中点となるとき, 線分 CF の長さ, および, $\frac{CE}{BD}$ の値を求めよ。



- 17** 円 O 上の点 A における接線を l とする。また、点 A と異なる l 上の点 B から円 O と 2 点で交わるような直線を引き、その交点を B に近い方からそれぞれ C, D とすると、 $AB=6, BC=4, AC=3$ である。

- (1) 線分 BD の長さを求めよ。
- (2) ABC の外接円上の点 A における接線と円 O の交点のうち A と異なる方を E とする。このとき、 EAC と ABC が相似であることを証明せよ。また、線分 CE の長さを求めよ。
- (3) (2) において、直線 AC と直線 BE の交点を F とする。このとき、 BCF と CEF の面積比を最も簡単な整数比で表せ。



平面図形

平成 _____ 年 _____ 月 _____ 日

18

ABC があり, $AB=8$, $BC=7$, $CA=6$ である。 $\angle A$ の二等分線と辺 BC との交点を D とし, 直線 AD と ABC の外接円との交点を E とする。ただし, E は A と異なる点とする。

(1) 線分 BD , DC の長さを求めよ。

(2) $\triangle ADC \sim \triangle BDE$ であることを示せ。また, 積 $AD \cdot DE$ の値を求めよ。

(3) 線分 AD , DE の長さをそれぞれ求めよ。