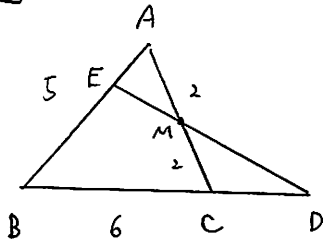


①



(1)

MはACの中点より (CA=4より)

AM=MC=2 である。

$\triangle ABC \sim \triangle AME$ より

対応する辺の比は等しいから

$$AB:AM = AC:AE$$

$$5:2 = 4:AE$$

より

$$5AE = 2 \times 4$$

$$AE = \frac{8}{5}$$

また、 $\triangle ABC$ と $\triangle AME$ の

相似比は $AB:AM$ より

$5:2$ であるから、面積比は

$$5^2:2^2 = 25:4 \text{ である。}$$

$\triangle ABC$ の面積は S であるから

$$S:\triangle AME = 25:4$$

$$25\triangle AME = 4S$$

より

$$\triangle AME = \frac{4}{25}S$$

(2)

$\triangle ABC$ と直線 ED に

よって、メネラウスの定理より

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CM}{MA} = 1$$

より $CD = x$ とおく。

$$\frac{\frac{8}{5}}{\frac{17}{5}} \times \frac{6+x}{x} \times \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{より} \frac{8}{17} \times \frac{6+x}{x} = 1$$

$$8(6+x) = 17x$$

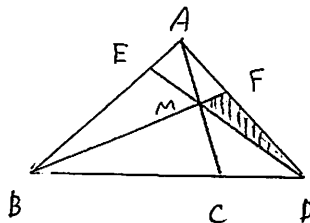
$$48 + 8x = 17x$$

$$9x = 48$$

$$x = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$$

$$x = \frac{16}{3}$$

(3)



$\triangle ABD$ と点 M について

4=1の定理より

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DF}{FA} = 1$$

より

$$\frac{\frac{8}{5}}{\frac{17}{5}} \times \frac{6}{\frac{16}{3}} \times \frac{DF}{FA} = 1$$

$$\text{より} \frac{8}{17} \times \frac{18}{16} \times \frac{DF}{FA} = 1$$

$$\frac{8}{17} \times \frac{9}{8} \times \frac{DF}{FA} = 1$$

$$\frac{9}{17} \times \frac{DF}{FA} = 1$$

$$\text{より} \frac{DF}{FA} = \frac{17}{9}$$

より

$$AF:FD = 9:17$$

である。

AD を基底とすると

$$\triangle MFD:\triangle MDA = FD:AD$$

$$= 17:(17+9)$$

$$= 17:26$$

より

$$\triangle MDA = \frac{26}{17} \triangle MFD \dots ①$$

AC を基底とすると

$$AM=MC \text{ より}$$

$$\triangle DAC = 2 \times \triangle DAM \dots ②$$

$$= 2 \times \frac{26}{17} \triangle MFD$$

$$= \frac{52}{17} \triangle MFD \dots ③$$

BD を基底とすると

$$\triangle ABC:\triangle ACD = BC:CD$$

③を代入して

$$S:\frac{52}{17} \triangle MFD = 6:\frac{16}{3}$$

$$\frac{52}{17} \triangle MFD \times 6 = \frac{16}{3} S$$

$$\triangle MFD = \frac{17}{52 \times 6} \times \frac{16}{3} S$$

$$= \frac{17}{13 \times 3} \times \frac{2}{3} S$$

$$= \frac{34}{13 \times 9} S = \frac{34}{117} S$$

2

(1)

線分ADは $\angle A$ の二等分線より

$$AB:AC = BD:DC$$

問題より $AB:AC = 3:2$ より

$$3:2 = BD:DC \dots \textcircled{1}$$

$$AB = BC = 10 \text{ より}$$

$$BD + DC = 10 \text{ より } DC = 10 - BD$$

と①に代入すると

$$3:2 = BD:(10 - BD)$$

$$2BD = 3(10 - BD)$$

$$\text{解いて } BD = 6$$

$$\left(\begin{array}{l} BD:DC = 3:2 \text{ より} \\ BD = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5} \times 10 = 6 \end{array} \right)$$

(2)

分角線の定理より

$$BD^2 = BE \times BA$$

(1)の結果より $AB = 9$ より

$$6^2 = BE \times 9$$

$$\text{よって } BE = 4$$

また $AB:AC = 3:2$ より

$$AB = 9 \text{ より } 9:AC = 3:2$$

よって $AC = 6$ である。また(1)より $CD = 4$ 。

分角線の定理より

$$CD^2 = CF \times CA$$

代入して

$$4^2 = CF \times 6$$

解いて

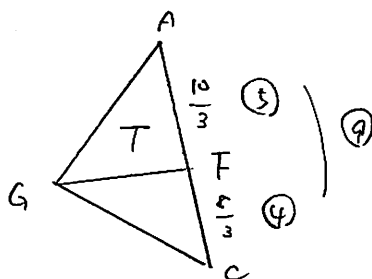
$$CF = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$$

よって

$$\begin{aligned} AF &= CA - CF \\ &= 6 - \frac{8}{3} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

(3)

$\triangle AGF$ の面積を T とする。



ACは底辺と見て

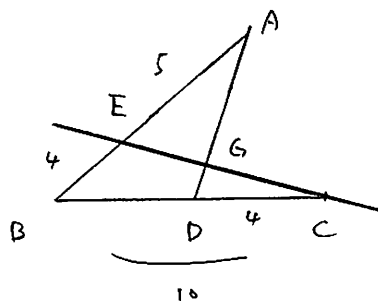
$$\triangle AGF : \triangle AGC = AF:AC$$

よって

$$T : \triangle AGC = \frac{10}{3} : 6$$

$$T : \triangle AGC = 5 : 9$$

$$\text{よって } \triangle AGC = \frac{9}{5}T \dots \textcircled{2}$$



$\triangle ABD$ と直線 EC について

メネラウスの定理より

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BC}{CD} \times \frac{DG}{GA} = 1$$

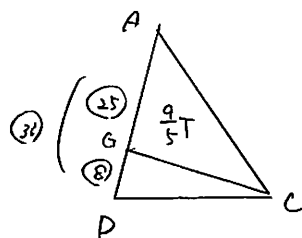
$$\frac{5}{4} \times \frac{10}{4} \times \frac{DG}{GA} = 1$$

$$\frac{DG}{GA} = \frac{8}{25}$$

よって

$$AG:GD = 25:8$$

よって AD は底辺と見て



$$\begin{aligned} \triangle AGC : \triangle ADC &= AG:GD \\ &= 25:8 \end{aligned}$$

よって②から

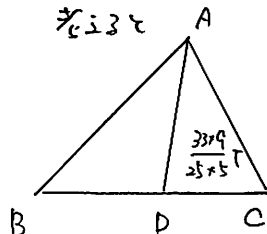
$$\frac{9}{5}T : \triangle ADC = 25:33$$

$$\triangle ADC = \frac{33}{25} \times \frac{9}{5}T$$

$$= \frac{33 \times 9}{25 \times 5}T \dots \textcircled{3}$$

よって BC は底辺と見て

とすると



$$\triangle ABC : \triangle ADC = BC:DC$$

$$S : \frac{33 \times 9}{25 \times 5}T = 10:4$$

$$S : \frac{33 \times 9}{25 \times 5}T = 5:2$$

$$2S = \frac{33 \times 9}{25 \times 5}T \times 5$$

$$2S = \frac{33 \times 9}{25}T$$

よって

$$T = \frac{25}{33 \times 9} \times 2S$$

$$= \frac{50}{297}S$$

3

(1) 三平方の定理より

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$4^2 + AC^2 = 5^2$$

$$\therefore AC^2 = 25 - 16 = 9$$

$$AC > 0 \text{ より } AC = 3$$

方べきの定理より

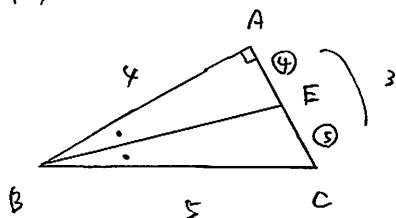
$$AD \cdot AB = AC^2$$

代入して

$$AD \cdot 4 = 3^2$$

$$\therefore AD = \frac{9}{4}$$

(2)



BE が $\angle B$ の二等分線より

$$BC : BA = CE : EA$$

より

$$5 : 4 = CE : EA$$

(1) から

$$AE = \frac{4}{9} AC$$

$$= \frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3}$$

$\triangle ABE$ で三平方の定理より

$$BE^2 = BA^2 + AE^2$$

$$= 4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$= 16 + \frac{16}{9}$$

$$= 16 \left(1 + \frac{1}{9}\right)$$

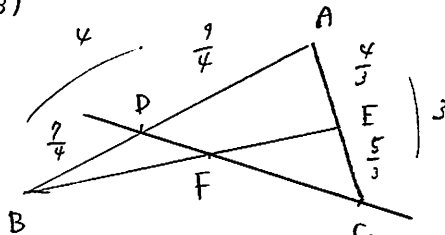
$$= 16 \times \frac{10}{9}$$

より $BE > 0$ より

$$BE = \sqrt{16 \times \frac{10}{9}}$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{10}$$

(3)



$\triangle BAE$ と直線 DC により

メネラウスの定理より

$$\frac{BF}{FE} \times \frac{EC}{CA} \times \frac{AD}{DB} = 1$$

より

$$\frac{BF}{FE} \times \frac{5}{3} \times \frac{9/4}{2/4} = 1$$

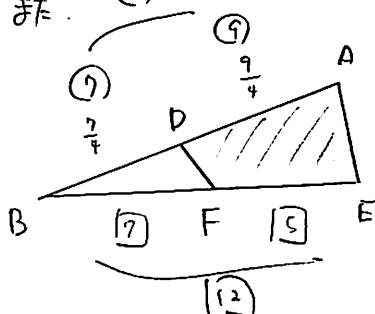
$$\frac{BF}{FE} \times \frac{5}{9} \times \frac{9}{2} = 1$$

$$\frac{BF}{FE} \times \frac{5}{2} = 1$$

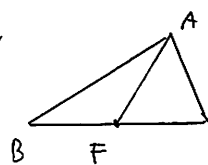
よって

$$\frac{BF}{FE} = \frac{2}{5}$$

また (16)



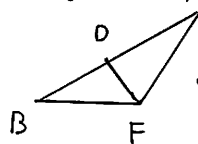
$$\triangle BFD = \frac{BD}{BA} \times \frac{BF}{BE} \times \triangle BEA$$



$\triangle BFA : \triangle BEA$

$$= BF : BE$$

$$\triangle BFA = \frac{BF}{BE} \triangle BEA$$



$$\triangle BFD : \triangle BFA$$

$$= BD : BA$$

$$\therefore \triangle BFD = \frac{BD}{BA} \triangle BFA$$

② = ① を代入すると導かれる

より

$$\triangle BFD = \frac{7}{16} \times \frac{7}{12} \triangle BEA$$

つまり

$$\triangle BFD = \frac{49}{192} \triangle BEA \dots (*)$$

より (16) から $\triangle ADFE$ は

$$\triangle BAE \text{ より } \triangle BFD \text{ と}$$

相似な三角形

$$\triangle BAE - \triangle BFD$$

$$= \triangle BAE - \frac{49}{192} \triangle BAE \quad (**) \text{ より}$$

$$= \left(1 - \frac{49}{192}\right) \triangle BAE$$

$$= \frac{143}{192} \triangle BAE \text{ となる}$$

$$\triangle BAE = \frac{1}{2} \times BA \times AE$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

つまり

$$\triangle ADFE = \frac{143}{192} \times \triangle BAE$$

$$= \frac{143}{192} \times \frac{8}{3}$$

$$= \frac{143}{72}$$

④

(1)

$\triangle PAB$ において

PD は $\angle APB$ の二等分線より

$$PA : PB = AD : DB \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。問題より

$$PA = 6, AD : DB = 3 : 2$$

①に代入して

$$6 : PB = 3 : 2$$

$$\text{よって } 3PB = 12 \quad \text{より } \underline{PB = 4}$$

(2)

たけきの定理より

$$PA^2 = PB \times PC \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{に } PA = 6, PB = 4, PC = PB + BC = 4 + BC$$

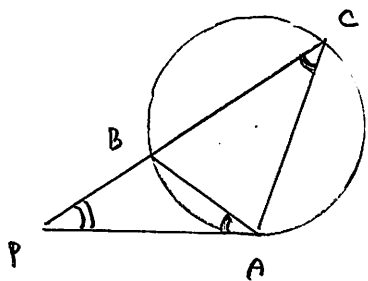
を代入して

$$6^2 = 4 \times (4 + BC)$$

$$36 = 4 \times (4 + BC)$$

$$\textcircled{3} \quad 9 = 4 + BC \quad \text{よって } \underline{BC = 5}$$

$\triangle PAB$ と $\triangle PCA$ において



$\angle P$ は共通 $\dots$ (ア)

$\angle PAB = \angle PCA$ (接弦定理) $\dots$ (イ)

(ア)(イ)より2角が等しいので

$$\triangle PAB \sim \triangle PCA$$

対応する辺の比は等しいので

$$AB : AC = PA : PC$$

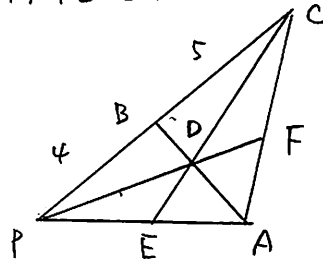
$$\text{よって } AB = a, PA = 6, PC = 9 \text{ より}$$

$$a : AC = 6 : 9$$

$$a : AC = 2 : 3$$

$$2AC = 3a \quad \text{より } \underline{AC = \frac{3}{2}a}$$

(3) 直線 PD と AC の交点を F とする。



$\triangle PAC$ において PF は $\angle P$ の二等分線より

$$PA : PC = AF : FC$$

$$\text{よって } 6 : 9 = AF : FC \quad \text{から } \frac{AF}{FC} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \dots \textcircled{3}$$

4 = 1 の定理から

$$\frac{CB}{BP} \times \frac{PE}{EA} \times \frac{AF}{FC} = 1 \quad \dots \textcircled{4}$$

④に②と $BC = 5, BP = 4$ を代入して

$$\frac{5}{4} \times \frac{PE}{EA} \times \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{PE}{EA} \times \frac{5}{6} = 1 \quad \text{より } \frac{PE}{EA} = \frac{6}{5}$$

$$\text{よって } \underline{PE : EA = 6 : 5}$$

点 D が $\triangle PCA$ の内心でよいため

CE は $\angle PCA$ の二等分線になるから

$$CP : CA = PE : EA \quad \dots \textcircled{5}$$

が成り立つ。

$$CP = 9, CA = \frac{3}{2}a, PE : EA = 6 : 5$$

⑤に代入して

$$9 : \frac{3}{2}a = 6 : 5$$

$$\frac{3}{2}a \times 6 = 9 \times 5$$

$$9a = 45 \quad \text{よって } \underline{a = 5}$$

⑤

(1)

$\triangle ABC$ は二等辺三角形

AD は $\angle BAC$ の二等分線より

$$AB:AC = BD:DC$$

よって

$$4:3 = BD:DC$$

また $BC = 8$ より $BD + DC = 8$

よって $DC = 8 - BD$ を代入して

$$4:3 = BD:(8 - BD)$$

$$3BD = 4(8 - BD)$$

$$7BD = 32 \text{ より } BD = \frac{32}{7}$$

⑥

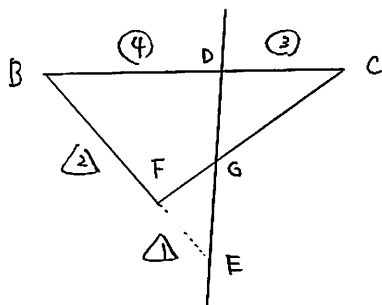
$BD:DC = 4:3$ より

$$BD = \frac{4}{7}BC = \frac{4}{7} \times 8 = \frac{32}{7}$$

(1)

$\triangle BCF$ と直線 DG において

メネラウスの定理より



$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CG}{GF} \times \frac{FE}{EB} = 1 \quad \dots (*)$$

$$BD:DC = 4:3 \text{ (1) より}$$

$$BF:FE = 2:1 \text{ (問題より)}$$

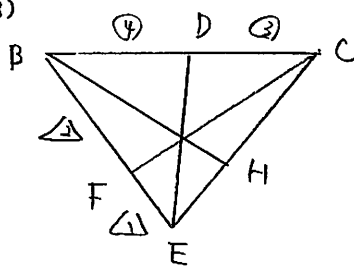
$$FE:EB = 1:3 \text{ より}$$

(*) に代入して

$$\frac{4}{3} \times \frac{CG}{GF} \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{CG}{GF} \times \frac{4}{9} = 1 \text{ より } \frac{CG}{GF} = \frac{9}{4}$$

(2)



$\triangle BCE$ でメネラウスの定理より

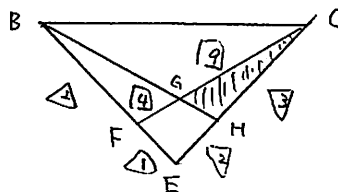
$$\frac{BD}{DC} \times \frac{CH}{HE} \times \frac{EF}{FB} = 1$$

代入して

$$\frac{4}{3} \times \frac{CH}{HE} \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{よって } \frac{CH}{HE} = \frac{3}{2}$$

(2) の結果と組み合わせると



$$\frac{CG}{GF} = \frac{9}{4} \text{ より } CG:GF = 9:4$$

$$\frac{CH}{HE} = \frac{3}{2} \text{ より } CH:HE = 3:2$$

よって

$\triangle CHG$ の面積は

$$\triangle CHG = \frac{CG}{CF} \times \frac{CH}{CE} \triangle CFE$$

$$= \frac{9}{13} \times \frac{3}{5} \triangle CFE$$

$$= \frac{27}{65} \triangle CFE \quad \dots (**)$$

また BE を底辺とすると

$$\triangle CFE : \triangle CBE = FE:BE$$

$$= 1:3$$

$$\text{よって } \triangle CFE = \frac{1}{3} \triangle CBE$$

これより $(*)$ と $(**)$ に代入して

$$\triangle CHG = \frac{27}{65} \times \frac{1}{3} \triangle CBE$$

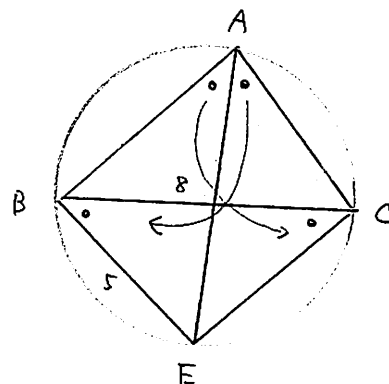
$$= \frac{9}{65} \triangle CBE \quad \dots (***)$$

よって $\triangle CHG$ の面積は $\triangle CBE$ の面積の $\frac{9}{65}$ である。

また問題より $BC = 8$ より

また $BE = 5$ より

AE は $\angle BAC$ の二等分線より



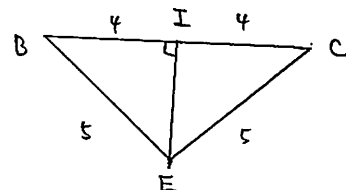
また (1) の結果より $\angle CBE = \angle CAE$

$$\angle CBE = \angle CAE$$

$$= \angle BAE = \angle BCE$$

よって $\triangle EBC$ は二等辺三角形より

$$\text{より } CE = BE = 5$$



点 E から BC に垂線を EI と

すると $BI = CI = 4$

よって、三平方の定理より

$$5^2 = 4^2 + EI^2$$

$$\text{より } EI = 3 \text{ となる。}$$

よって $\triangle BCE$ の面積は

$$\triangle BCE = \frac{1}{2} \times BC \times EI$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$

(*) に代入して

$$\triangle CHG = \frac{9}{65} \times 12 = \frac{108}{65}$$

6

(1)

- 6.11の定理より

$$PA \times PB = PC \times PD$$

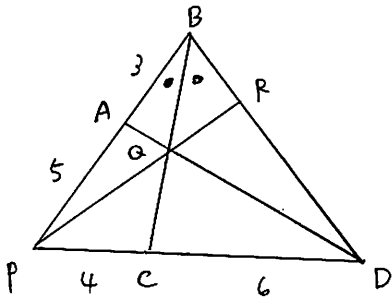
$$PA = 5, PC = 4, CD = 6 \text{ であるから } P$$

$$5 \times PB = 4 \times (4 + 6)$$

$$5 \times PB = 4 \times 10$$

$$PB = 4 \times 2 = 8$$

(2)



$\triangle BPD$ において、BC が $\angle PBD$ の二等分線であるから

$$BP : BD = PC : CD$$

$$8 : BD = 4 : 6$$

よって

$$4 \times BD = 8 \times 6$$

$$BD = 2 \times 6 = 12$$

$\triangle BPD$ について 6.11 の定理より

$$\frac{BA}{AP} \times \frac{PC}{CD} \times \frac{DR}{RB} = 1$$

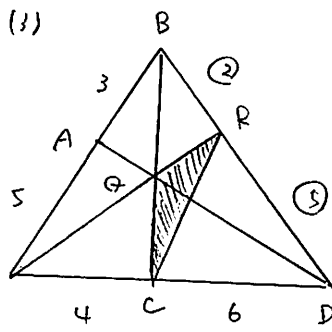
$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{6} \times \frac{DR}{RB} = 1$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{DR}{RB} = 1$$

$$\frac{DR}{RB} = \frac{5}{2} \text{ より}$$

$$BR : RD = 2 : 5$$

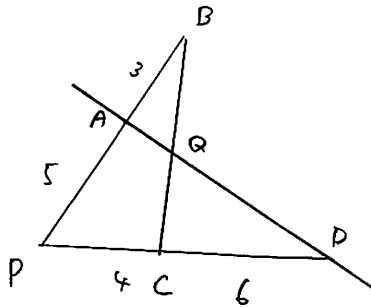
(1)



$\triangle BPD$ の面積を S とする。

また $\triangle CQR$ の面積を T

とすると、 T は S の $\frac{1}{10}$ である。



$\triangle BPC$ と直線 AD において

メネラウスの定理より

$$\frac{BA}{AP} \times \frac{PD}{DC} \times \frac{CQ}{QB} = 1$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{10}{6} \times \frac{CQ}{QB} = 1$$

$$\frac{CQ}{QB} = 1$$

よって $CQ = QB$ である。

BC が $\angle PBD$ の二等分線であるから

$$\triangle RCQ : \triangle RCB = CQ : CB$$

よって

$$T : \triangle RCB = 1 : 2$$

ゆえに

$$\triangle RCB = 2T \dots \textcircled{1}$$

BD が $\angle PBD$ の二等分線であるから

$$\triangle CBR : \triangle CBD = BR : BD$$

①より

$$2T : \triangle CBD = 2 : 7$$

よって

$$2 \triangle CBR = 14T$$

$$\triangle CBD = 7T \dots \textcircled{2}$$

PD が $\angle PBD$ の二等分線であるから

$$\triangle BDC : \triangle BDP = DC : DP$$

②より

$$7T : S = 6 : 10$$

$$7T : S = 3 : 5$$

よって

$$3S = 35T$$

ゆえに

$$T = \frac{3}{35} S$$

7

(1)

$\triangle ABC$ において

AD は $\angle BAC$ の二等分線より

$$AB : AC = BD : DC$$

よって

$$3 : 4 = BD : (5 - BD)$$

よって

$$4BD = 3(5 - BD)$$

$$4BD = 15 - 3BD$$

$$7BD = 15 \quad \text{より} \quad BD = \frac{15}{7}$$

(2)

点 I が $\triangle ABC$ の内心より

線分 BI は $\angle ABC$ の二等分線

と交る。よって $\triangle BAI$ において

$$BA : BD = AI : ID$$

よって

$$AI : ID = 3 : \frac{15}{7}$$

$$= 21 : 15$$

$$= 7 : 5$$

また、角の定理より

$$BE \times BA = BD^2$$

よって

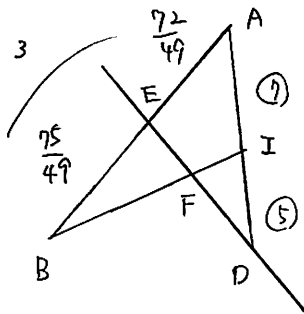
$$BE \times 3 = \left(\frac{15}{7}\right)^2$$

$$BE \times 3 = \frac{15}{7} \times \frac{15}{7}$$

$$BE = \frac{5}{7} \times \frac{15}{7}$$

$$= \frac{75}{49}$$

(3)



$\triangle ABI$ と直線 ED において

メネラウスの定理より

$$\frac{BF}{FI} \times \frac{ID}{DA} \times \frac{AE}{EB} = 1$$

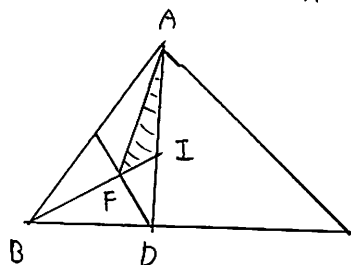
$$\frac{BF}{FI} \times \frac{5}{12} \times \frac{\frac{72}{49}}{\frac{75}{49}} = 1$$

$$\frac{BF}{FI} \times \frac{5}{12} \times \frac{72}{75} = 1$$

$$\frac{BF}{FI} \times \frac{5}{12} \times \frac{24}{25} = 1$$

$$\frac{BF}{FI} \times \frac{2}{5} = 1$$

$$\text{よって} \quad \frac{BF}{FI} = \frac{5}{2}$$



$\triangle AIF$ の面積を T とする。

$\triangle ABC$ の面積を S とする。

$\triangle ABC$ は $5^2 = 4^2 + 3^2$ が成り立つので、 $\angle A = 90^\circ$ の直角三角形である。よって $S = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

と計算される。

よって、 T は S の $\frac{1}{14}$ である。

よって $T = \frac{1}{14} S$

BI と直線 ED と交る。

$$\triangle AFI : \triangle ABI = FI : BI$$

$$\frac{BF}{FI} = \frac{5}{2} \quad \text{より} \quad BF : FI = 5 : 2$$

$\triangle ABI$ と直線 ED において

$$\triangle AFI : \triangle ABI = FI : BI = 2 : 7$$

$$T : \triangle ABI = 2 : 7$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABI = \frac{7}{2} T \quad \text{--- ①}$$

AD と直線 ED と交る。

$$\triangle BAI : \triangle BAD = AI : AD$$

①を代入して

$$\frac{7}{2} T : \triangle BAD = 7 : 12$$

$$7 \triangle BAD = \frac{7}{2} T \times 12$$

$$\triangle BAD = 6 T \quad \text{--- ②}$$

BC と直線 ED と交る。

$$\triangle ABD : \triangle ABC = BD : BC$$

②を代入して

$$6 T : S = \frac{15}{7} : 5$$

$$\frac{5}{7} S = 6 T \times 5$$

$$S = \frac{7}{15} \times 6 T \times 5$$

$$= \frac{7}{15} \times 30 T = 14 T$$

よって

$$T = \frac{1}{14} S$$

$$= \frac{1}{14} \times 6 = \frac{3}{7}$$

⑧

(1)

方べきの定理より

$$FC^2 = FD \times FA$$

$$4^2 = 2 \times FA$$

よって

$$2AF = 16$$

$$AF = 8$$

(2)

$\triangle ABD$ と $\triangle CFD$ において

$$\angle BAD = \angle CAD \quad (\text{角の二等分線}) \dots \textcircled{1}$$

$$\angle CAD = \angle DCF \quad (\text{円周角の定理}) \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$\angle BAD = \angle DCF \dots \textcircled{3}$$

$$\angle ADB = \angle CDF \quad (\text{対頂角}) \dots \textcircled{4}$$

以上より ③, ④より

2角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABD \sim \triangle CFD$$

$$(1) \text{より } AF = 8 \text{ より } DF = 2 \text{ であり、}$$

$$AD = 6 \text{ である。}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle CFD \text{ より、対応する}$$

辺の長さの比は等しい (相似の性質)

$$AB : CF = AD : CD$$

$$BD : DF = AD : CD$$

よって

$$AB : 4 = 6 : 3$$

$$AB : 4 = 2 : 1$$

$$\text{よって } AB = 8$$

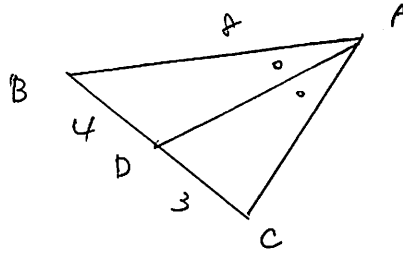
同様にして

$$BD : 2 = 6 : 3$$

$$BD : 2 = 2 : 1$$

$$\text{よって } BD = 4$$

$\triangle ABC$ において



AD は $\angle BAC$ の二等分線

よって

$$AB : AC = BD : DC$$

が成り立つ。

よって

$$8 : AC = 4 : 3$$

$$4AC = 24$$

$$AC = 6$$

(3)

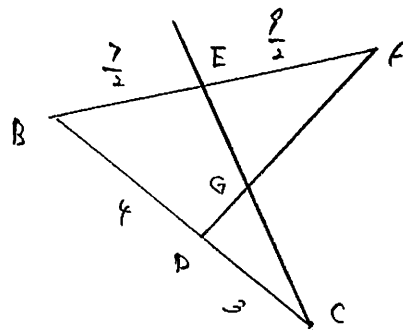
$\triangle BAC$ で方べきの定理より

$$BE \times BA = BD \times BC$$

$$BE \times 8 = 4 \times (4 + 3)$$

$$8BE = 28$$

$$BE = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$



$\triangle ABD$ と $\triangle EDC$ において

方べきの定理より

$$\frac{DG}{GA} \times \frac{AE}{EB} \times \frac{BC}{CD} = 1$$

$$\frac{DG}{GA} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} = 1$$

$$\frac{DG}{GA} \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} = 1$$

$$\frac{DG}{GA} \times 3 = 1$$

よって

$$\frac{DG}{GA} = \frac{1}{3}$$

9

(1)

方べきの定理より

$$DA^2 = DB \times DC$$

$$DB = 6, DC = DB + BC = 6 + 6 = 12$$

より

$$DA^2 = 6 \times 12$$

$DA > 0$ より

$$DA = \sqrt{6 \times 12} = 6\sqrt{2}$$

(2)

$\triangle DAB$ と $\triangle DCA$ において

$\angle D$ は共通 ... ①

$\angle DAB = \angle ACB$ (接弦定理) ... ②

①, ② より 2角がそれぞれ等しいので

$\triangle DAB \sim \triangle DCA$

(したがって、対応する辺の比は等しいので)

$$AB : AC = DA : DC$$

代入して

$$AB : AC = 6\sqrt{2} : 12$$

$$6\sqrt{2} AC = 12 AB$$

$$\sqrt{2} AC = 2 AB$$

両辺 AB で割り、

$$\frac{\sqrt{2} AC}{AB} = 2$$

両辺 $\sqrt{2}$ で割り、

$$\frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \text{ より } AC = \sqrt{2} AB \dots (*)$$

また、 BC は直径より

直径に对する円周角は 90°

より $\angle BAC = 90^\circ$ である。

つまり $\triangle ABC$ は直角三角形より

三平方の定理から

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

(*) と $BC = 6$ を代入して

$$AB^2 + (\sqrt{2} AB)^2 = 6^2$$

$$AB^2 + 2 AB^2 = 36$$

$$3 AB^2 = 36$$

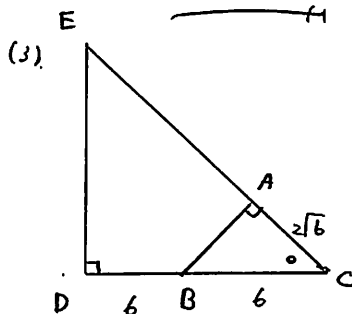
$$AB^2 = 12$$

$AB > 0$ より

$$AB = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

(*) に代入して

$$AC = \sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$



$\triangle CAB$ と $\triangle CDE$ において

$\angle CAB = \angle CDE = 90^\circ$... ①

$\angle C$ は共通 ... ②

①, ② より 2角がそれぞれ等しいので

$\triangle CAB \sim \triangle CDE$

(したがって、対応する辺の比は等しいので)

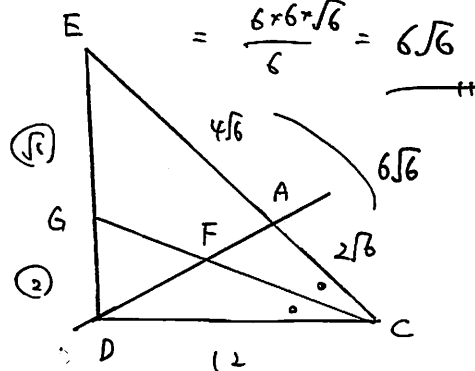
$$CA : CD = CB : CE$$

代入して

$$2\sqrt{6} : 12 = 6 : CE$$

$$2\sqrt{6} CE = 6 \times 12$$

$$CE = \frac{6 \times 12}{2\sqrt{6}} = \frac{6 \times 6}{\sqrt{6}} = \frac{6 \times 6 \times \sqrt{6}}{6} = 6\sqrt{6}$$



CG は $\angle ECD$ の二等分線
より

$$EG : GD = CE : CD$$

$$EG : GD = 6\sqrt{6} : 12$$

$$EG : GD = \sqrt{6} : 2$$

$\triangle CGE$ と直線 AD において
メネラウスの定理より

$$\frac{CF}{FG} \times \frac{GD}{DE} \times \frac{EA}{AC} = 1$$

$$\frac{CF}{FG} \times \frac{2}{2+\sqrt{6}} \times \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = 1$$

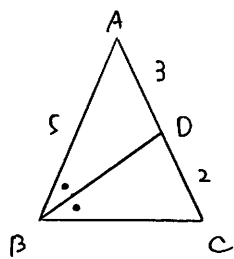
$$\frac{CF}{FG} \times \frac{2}{2+\sqrt{6}} \times 2 = 1$$

$$\frac{CF}{FG} \times \frac{4}{2+\sqrt{6}} = 1$$

より

$$\frac{CF}{FG} = \frac{2+\sqrt{6}}{4}$$

10



(1) BDが $\angle B$ の2等分線より

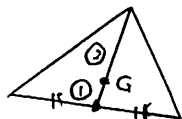
$$BC:BA = CD:DA$$

が成り立つ。より

$$BC:5 = 2:3$$

$$3BC = 10 \therefore BC = \frac{10}{3}$$

(2) 重心Gは、中線を2:1に内分する。



今、BCの中点をMとし、

中線AMを引く。

考える。まず、 $\triangle ABC$

が $AB=AC$ の

二等辺三角形より

$\triangle ABM$ と $\triangle ACM$

は合同なため

$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$ である。

ゆえに、 $\triangle ABM$ は直角三角形であり、

よって、BMはBCの半分より

$$BM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

よって $\triangle ABM$ で三平方の定理より

$$AM^2 + BM^2 = AB^2$$

$$AM^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = 5^2$$

$$AM^2 = 25 - \frac{25}{9}$$

$$= \frac{225 - 25}{9}$$

$$= \frac{200}{9}$$

$$\therefore AM > 0 \text{ より } AM = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

よって重心Gは、中線AMを

2:1に内分するので

$$AG:GM = 2:1$$

$\therefore AG$ はAMの $\frac{2}{3}$

$$\therefore AG = \frac{2}{3}AM$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{20\sqrt{2}}{9}$$

(3) $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{50\sqrt{2}}{9}$$

である。よって、 $\triangle ABC$ の

面積を S と表す。

内心Iは角の2等分線の

交点である。AMは $\angle A$ の

2等分線となるのでIは

BDとAMの交点である。

よって $\triangle BAM$ において

BIは $\angle B$ の

2等分線より

$$BA:BM = AI:IM$$

$$\therefore 5:\frac{5}{3} = AI:IM$$

$$\therefore 3:1 = AI:IM$$

が成り立つ。よって、重心GもAI上にて、

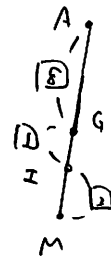
$$AG:GM = 2:1 \text{ である。}$$

ゆえに、

$$AI:IM = 3:1 = 9:3$$

$$AG:GM = 2:1 = 8:4$$

と表す。

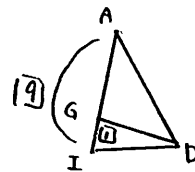


$$AG:GI:IM$$

$$= 8:1:3$$

が成り立つ。

ゆえに、 $\triangle AID$ と $\triangle DGI$ の面積は、
線分AIを底とすると、



$$AI:GI = 9:1$$

$$\therefore \triangle DGI = \frac{1}{9} \triangle AID \dots \textcircled{1}$$

また、 $\triangle AID$ と $\triangle ABD$ は、

線分AIが $\angle A$ の2等分線より

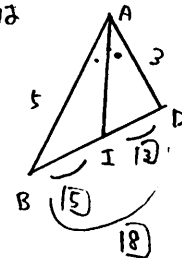
$\triangle ABD$ において

$$BI:ID = AB:AD$$

$$= 5:3$$

よって面積はBDを底とすると

$$\triangle AID = \frac{3}{8} \triangle ABD \dots \textcircled{2}$$

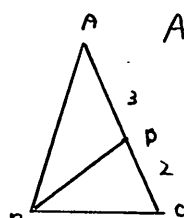


よって、 $\triangle ABD$ と $\triangle ABC$ は、

ACを底とすると

$$\triangle ABD = \frac{3}{5} \triangle ABC \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。



以上より、 $\textcircled{3}$ より、 $\triangle ABC$ の面積は S

$$\text{より } \triangle ABD = \frac{3}{5}S$$

$\textcircled{2}$ より代入して

$$\triangle AID = \frac{3}{8} \triangle ABD$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{5}S = \frac{9}{40}S$$

$\textcircled{1}$ より代入して

$$\triangle DGI = \frac{1}{9} \triangle AID$$

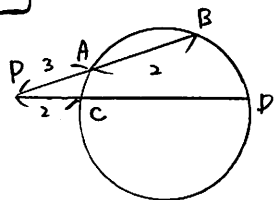
$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{40}S = \frac{1}{40}S$$

$$\therefore S = \frac{50\sqrt{2}}{9} \text{ より}$$

$$\triangle DGI = \frac{1}{40} \cdot \frac{50\sqrt{2}}{9}$$

$$= \frac{5}{36}\sqrt{2}$$

11



(1) 切線の定理より

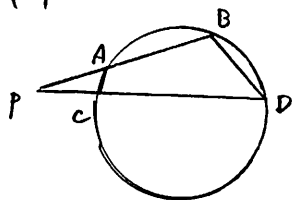
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$3 \cdot (3+2) = 2 \cdot PD$$

$$15 = 2PD$$

$$\therefore PD = \frac{15}{2}$$

(2)



$$\triangle PAC \text{ と } \triangle PDB$$

1 = 2

$$\angle P \text{ 共通} \dots ①$$

$$\angle PAC = \angle PDB \dots ②$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{四角形 } ABCD \text{ は} \\ \text{円に内接しているから} \\ \text{1つの内角は対角の} \\ \text{外角に等しい} \end{array} \right)$$

よって ① ② より $\triangle PAC$ と

$\triangle PDB$ は相似である。

よって

$$AC : BD = PC : PB \dots (*)$$

$$\text{今、条件より } PC = 2, PB = PA + AB = 5$$

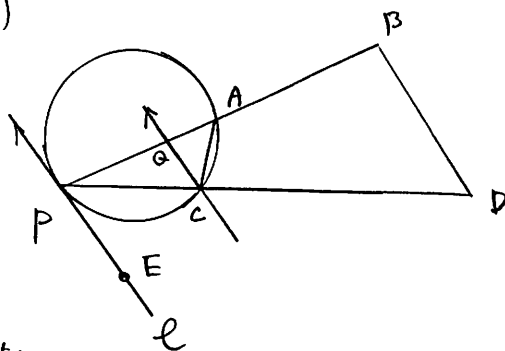
$$\text{また、} BD = 3 \text{ より } (*) \text{ から}$$

$$AC : 3 = 2 : 5$$

$$5AC = 6$$

$$\therefore AC = \frac{6}{5}$$

(3)



点 P1 = 2178

$\triangle PCA$ の外接円の接線

とある。また、 P 上の円の位置に

点 E をとる。接線 PC と $\triangle PCA$

1 = 2177 接線の定理より

$$\angle EPC = \angle PAC \dots ①$$

である。また、(2) と同様にして

内接四角形 $ABDC$ 1 = 2172

内角は対角の外角に等しい

$$\text{なので、} \angle PAC = \angle CDB \dots ②$$

である。よって ① ② より

$$\angle EPC = \angle CDB \text{ が成り立つ。}$$

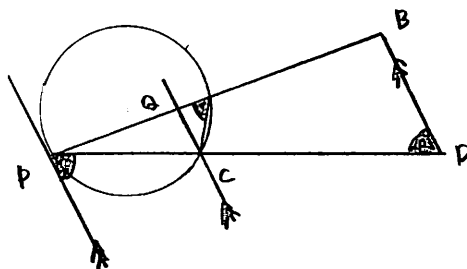
$$\text{よって、} PC \text{ と } BD \text{ 1 = 2172}$$

全角が等しいので PC と BD は

平行である。よって ④ より、 PC と CQ

は平行なので、結局、 CQ と BD

は平行である。



よって $\triangle PCQ$ と $\triangle PDB$ 1 = 2172

$$PC : CQ = PD : DB$$

が成り立つので

$$PC = 2, PD = \frac{15}{2} \text{ (1151)}$$

$$BD = 3.$$

よって

$$2 : CQ = \frac{15}{2} : 3$$

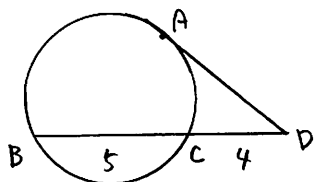
$$\frac{15}{2} CQ = 2 \times 3$$

$$\frac{15}{2} CQ = 6$$

$$CQ = \frac{2}{15} \times 6$$

$$= \frac{4}{5}$$

12



(1) 円の定理より

$$DA^2 = DC \cdot DB$$

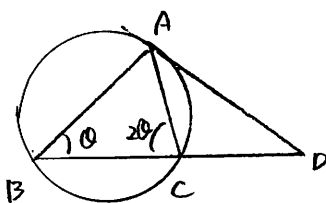
より

$$DC = 4, DB = DC + CB = 9$$

$$\therefore DA^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$DA > 0 \text{ より } DA = 6$$

(2)



$$\text{与より } \angle ACB = 2\angle ABC$$

$$\text{より } \angle ABC = \theta \text{ とおす}$$

$$\angle ACB = 2\theta \text{ とおす}$$

また、接線の定理より

$$\angle DAC = \angle ABC$$

$$\text{が成り立つので } \angle DAC = \theta$$

$$\text{とある。よって、}\triangle ACD \text{ は等しい}$$

$$\text{1つの内角は } \theta \text{ であり、}$$

$$\text{2つの内角の和は}$$

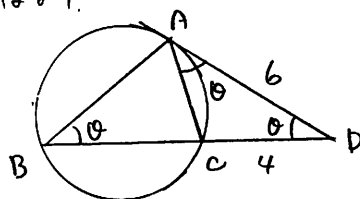
$$\angle CAD + \angle CDA = \angle ACB$$

$$\theta + \angle CDA = 2\theta$$

$$\therefore \angle CDA = \theta$$

とある。

1. 5. 8. 1.



$$\triangle ABD \text{ は等しい}$$

$$\angle ABD = \angle ADB = \theta$$

$$\text{より } AB = AD \text{ の二等辺三角形}$$

$$\text{より } AB = 6$$

$$\triangle CDA \text{ は等しい}$$

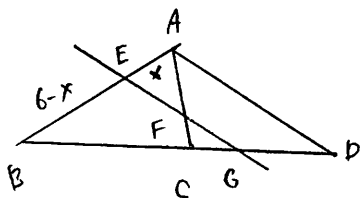
$$\angle CAD = \angle CDA = \theta$$

$$\text{より } CD = CA \text{ の二等辺三角形}$$

$$\text{より } AC = 4$$

$$\therefore AB > AC \text{ とある。}$$

(3)



(直線) EF と BD の交点 E と G とある。

$$\text{また } EF \parallel AD \text{ より}$$

$$\triangle CFG \text{ と } \triangle CAD \text{ は}$$

$$\text{相似である。ゆえに } \triangle CFG \text{ と}$$

$$CF = CG \text{ の二等辺三角形である。}$$

$$\text{今、} AE = x \text{ とする。また、} CF = y$$

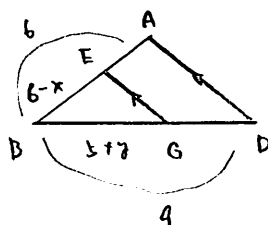
$$\text{とある。} CF = CG = y \text{ とある。}$$

$$BG = BC + CG = 5 + y$$

$$\text{また、} AE = x \text{ より}$$

$$BE = AB - AE = 6 - x$$

$$\text{より、} \triangle BEG \text{ と } \triangle BAD \text{ は等しい}$$



$$BE : BG$$

$$= BA : BD$$

$$\text{より } (6-x) : (5+y) = 6 : 9$$

ゆえに

$$(6-x) : (5+y) = 2 : 3$$

$$3(6-x) = 2(5+y)$$

$$18 - 3x = 10 + 2y$$

$$y = -3x + 8$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$\text{より } CF = -\frac{3}{2}x + 4$$

(3) (5) $\triangle ABC$ の外接円の定理より

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BG}{GC} \times \frac{CF}{FA} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{6-x} \times \frac{5+y}{y} \times \frac{y}{4-y} = 1$$

$$\therefore y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$(4) AE = CF \text{ より}$$

$$x = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$\text{より } x = \frac{8}{5}$$

$$\text{また、} BE = 6 - x = 6 - \frac{8}{5} = \frac{22}{5}$$

$$\therefore EG \parallel AD \text{ より}$$

$$\triangle BEG \text{ と } EB = EG \text{ の}$$

$$\text{二等辺三角形より } EG = \frac{22}{5}$$

$$\text{よって、} \triangle CFG \text{ と } \triangle CAD$$

$$\text{は等しい } CF = AE = \frac{8}{5} \text{ より}$$

$$CF : CA = FG : AD$$

$$\frac{8}{5} : 4 = FG : 6$$

$$4FG = \frac{48}{5} \therefore FG = \frac{12}{5}$$

よって

$$EG = \frac{22}{5}, FG = \frac{12}{5}$$

より

$$EF = EG - FG$$

$$= \frac{22}{5} - \frac{12}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

113

(1) $\angle ABC = 55^\circ$ のとき $\angle BAC = 35^\circ$

接弦定理より

$\angle BCD = \angle BAC$

が成り立つので

$\angle BCD = 35^\circ$

また $\triangle BCD$ は二等辺三角形

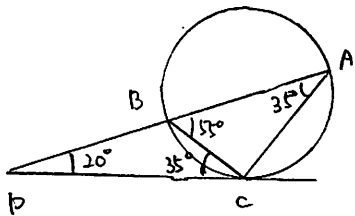
1) $\angle$ の外角は隣り合う角の和

2) $\angle$ の内角の和は 180° である

$\angle BDC + \angle BCD = \angle ABC$

$\angle BDC + 35^\circ = 55^\circ$

$\angle BDC = 20^\circ$



(2) $\angle ABC = \alpha$ のとき

$\angle BAC = 90^\circ - \alpha$ である

接弦定理より

$\angle BCD = \angle BAC$

が成り立つので

$\angle BCD = 90^\circ - \alpha$ である

また $\triangle BCD$ は二等辺三角形

1) $\angle$ の外角は隣り合う角の和

2) $\angle$ の内角の和は 180° である

$\angle BDC + \angle BCD = \angle ABC$

$\angle BDC + (90^\circ - \alpha) = \alpha$

$\therefore \angle BDC = 2\alpha - 90^\circ$

三

二条件より $AC > BC$ である

よって AC, BC の対角は対して

$\angle ABC > \angle BAC$ が成り立つ

(三角形では角の大小関係と、その対辺の長さの大小関係は一致する)

よって $\angle ABC > \angle BAC$

$\therefore \alpha > 90^\circ - \alpha$

$2\alpha > 90^\circ \therefore \alpha > 45^\circ$

また $\triangle ABC$ は直角三角形

であるので $\angle ABC < 90^\circ$

$\therefore \alpha < 90^\circ$

よって $45^\circ < \alpha < 90^\circ$

でなければならぬ

また $\angle BDC = 2\alpha - 90^\circ$ である

DF は $\angle D$ の二等分線より

$\angle EDC = \frac{1}{2} \angle BDC$

であるから

$\angle EDC = \frac{1}{2} (2\alpha - 90^\circ)$
 $= \alpha - 45^\circ$

よって $\triangle EDC$ は二等辺三角形

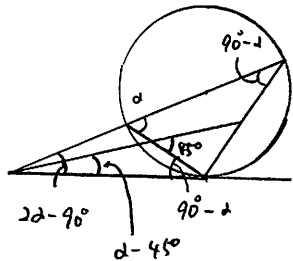
1) $\angle$ の外角は隣り合う角の和

2) $\angle$ の内角の和は 180° である

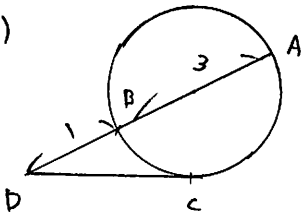
$\angle EDC + \angle ECD = \angle CEF$

$(\alpha - 45^\circ) + (90^\circ - \alpha) = \angle CEF$

$\therefore \angle CEF = 45^\circ$



(3)



パップスの定理より

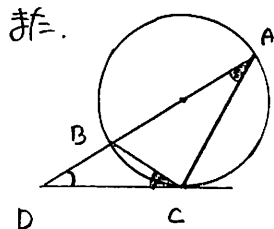
$BC^2 = DB \times DA$

が成り立つ

$BC^2 = 1 \times (1+3)$

$BC^2 = 4$

$BC > 0$ より $BC = 2$



$\triangle DBC$ と $\triangle DCA$ は相似

$\angle$ の共通

$\angle DCB = \angle DAC$ (接弦定理)

よって $\triangle DBC$ と $\triangle DCA$ は相似

であるから

$BC : CA = DC : DA$

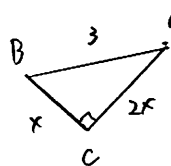
$\therefore BC : CA = 2 : (1+3)$

よって $BC : CA = 1 : 2$

$\therefore \triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

$BC : CA = 1 : 2$ より

$BC = x$ とおくと $CA = 2x$ とおける



ピタゴラスの定理より

$BC^2 + CA^2 = AB^2$

$x^2 + (2x)^2 = 3^2$

よって $5x^2 = 9$ より $x^2 = \frac{9}{5}$

$x > 0$ より $x = \frac{3}{\sqrt{5}}$

よって $CA = 2x = 2 \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$ とおける

よって $\triangle DCA$ は二等辺三角形

DF は $\angle D$ の二等分線より

$DC = DA = CF = FA$

$CF : FA = 2 : 4 = 1 : 2$

よって CF は CA の $\frac{1}{3}$ である

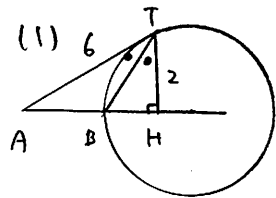
$CF = \frac{1}{3} CA = \frac{1}{3} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(2) より $\angle CEF = 45^\circ$ より $\triangle CEF$ は

直角二等辺三角形より

面積は $\frac{1}{2} \cdot CF \cdot CE = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2$
 $= \frac{2}{5}$

114



△AHTは...
三平方の定理より
 $TH^2 + AH^2 = AT^2$
 $2^2 + AH^2 = 6^2$

$\therefore AH^2 = 36 - 4$
 $= 32$

$AH > 0$ より $AH = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

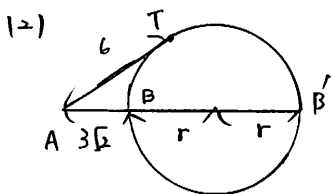
また、条件より $\angle ATB = \angle BTH$
である。これは、TB が $\angle ATH$ の
二等分線であることに等しい。

よって、 $TA : TH = AB : BH$

$\therefore AB : BH = 6 : 2 = 3 : 1$

よって AB は AH の $\frac{3}{4}$ である。

$AB = \frac{3}{4}AH$
 $= \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$



三平方の定理より

$AH^2 = AB \cdot AB'$
 $6^2 = 3\sqrt{2} (3\sqrt{2} + 2r)$

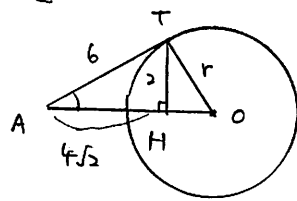
$36 = 18 + 6\sqrt{2}r$

$\therefore 6\sqrt{2}r = 18$

$r = \frac{18}{6\sqrt{2}}$

$= \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

115



△ATH と △AOT は...

$\begin{cases} \angle A \text{ 共通} \\ \angle AHT = \angle ATO = 90^\circ \end{cases}$

よって △ATH と △AOT は

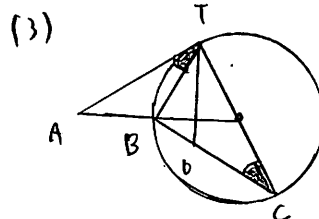
相似である。

$AH : TH = AT : TO$

$4\sqrt{2} : 2 = 6 : r$

$12 = 4\sqrt{2}r$

$r = \frac{12}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$



△ABT と △TDC は...

$\angle ATB = \angle TCD \dots ①$
(接弦定理)

また △ATH は...

$\angle TAB + \angle ATH = 90^\circ \dots ②$

よって AT が 点 T で接して いるので

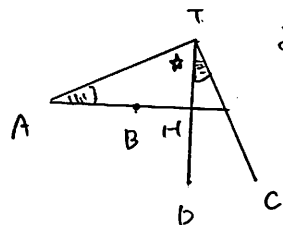
CT と AT は 垂直である。よって

$\angle ATC = 90^\circ$ である。

$\angle ATH + \angle DTC = 90^\circ \dots ③$

よって ②、③より

$\angle TAB = \angle DTC \dots ④$



よって ①④より

△ABT と △TDC は 相似である。

よって

$BT : AT = CD : TC \dots (*)$

が成り立つ。よって

$AT = 6$ 、CT は円の半径より

$CT = 2r = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

また、BT は △BTH が 直角三角形より

三平方の定理より

$BH^2 + TH^2 = BT^2$

よって (1) より $AT = 4\sqrt{2}$ 、 $AB = 3\sqrt{2}$

よって $BH = 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \sqrt{2}$

代入して

$(\sqrt{2})^2 + 2^2 = BT^2$

$BT^2 = 6$ 、 $BT > 0$ より $BT = \sqrt{6}$

(*) に代入して

$\sqrt{6} : 6 = CD : 3\sqrt{2}$

$6CD = 6\sqrt{3} \therefore CD = \sqrt{3}$

116

点 O は TC の中点である。

また $BH = \sqrt{2}$ 、また BO は円の半径より

$BO = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ より $HO = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

よって $BH : HO = \sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 2 : 1$

したがって

点 H は 線分 BO を 2 : 1 に内分

(7) の通り、点 H は △BTC の

重心である。

よって TH は 辺 BC の 中点より

なることがわかるので、点 D は BC の

中点である。よって $CD = \frac{1}{2}BC$ 。

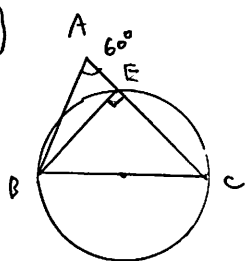
よって △BTC は... 三平方の定理

より $TC^2 = BT^2 + BC^2$

$(3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + BC^2$

よって $BC = 2\sqrt{3} \therefore CD = \sqrt{3}$

15



- (1)
 $\angle BEC$ は直径 BC に対する円周角
 $\angle BEC = 90^\circ$

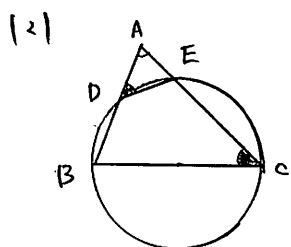
よって $\angle AEB = 90^\circ$

また $\triangle ABE$ は $\angle A = 60^\circ$ より

$1 : \sqrt{3}$ の直角三角形より

よって

$AE : AB = 1 : 2$



$\triangle AED \sim \triangle ABC$ なる

$\angle A$ 共通
 $\angle ADE = \angle ACB$

(円周角の定理より
 円周角とそれに対する中心角は等しい)

よって $\triangle AED \sim \triangle ABC$ は相似である。

よって

$AE : AB = DE : BC$

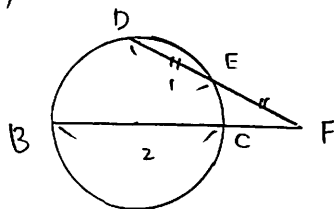
(1)より $AE : AB = 1 : 2$ より

よって $BC = 2$ より

$1 : 2 = DE : 2$

$DE = 1$

(3)



- (2)より $DE = 1$
 E が DF の中点より
 $EF = DE$ より $EF = 1$
 よって DF と BF の比は $1 : 2$
 定理より

$FE \cdot FD = FC \cdot FB$

$1 \cdot (1+1) = CF \cdot (CF+2)$

$1 \cdot 2 = CF(CF+2)$

$2 = CF^2 + 2CF$

$CF^2 + 2CF - 2 = 0$

解の公式より

$CF = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-2)}}{2}$

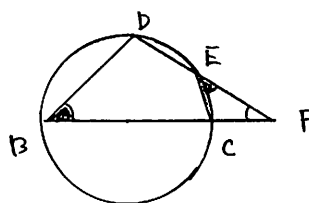
$= \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$

$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$= -1 \pm \sqrt{3}$

よって $CF > 0$ より

$CF = -1 + \sqrt{3}$



また $\triangle FEC \sim \triangle FBD$ なる

$\angle F$ 共通

$\angle FEC = \angle FBD$

(円周角の定理より)

よって $\triangle FEC \sim \triangle FBD$

よって

$CF : FD = CE : BD$

$(-1+\sqrt{3}) : 2 = CE : BD$

$2CE = (-1+\sqrt{3})BD$

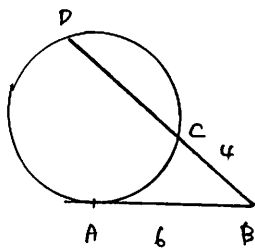
(2)より BD を割る

$2 \frac{CE}{BD} = -1 + \sqrt{3}$

(2)より 2 を割る

$\frac{CE}{BD} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

116



(1) 円と直線の定理から

$$BA^2 = BC \cdot BD$$

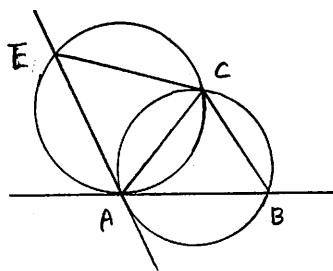
$\therefore$ 与えられた $AB = 6, BC = 4$ より

$$6^2 = 4 \cdot BD$$

$$36 = 4 \cdot BD$$

$$\therefore BD = 9$$

(2)



$\triangle EAC$ と $\triangle ABC$ は相似

点 A は点 A で円に接しているから

$$\angle EAC = \angle ABC \dots \textcircled{1}$$

(接弦定理)

また、AB は点 A で円に接しているから

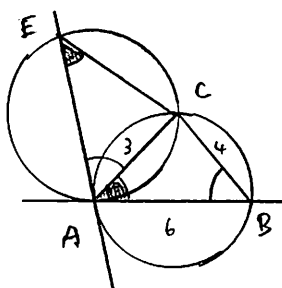
いえるので

$$\angle AEC = \angle CAB \dots \textcircled{2}$$

(接弦定理)

以上、①②より $\triangle EAC$ と $\triangle ABC$ は

相似である。



また、 $\triangle EAC$ と $\triangle ABC$ は相似

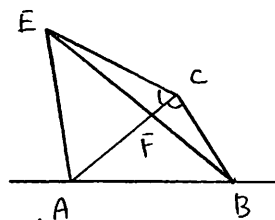
$$EC : CA = CA : CB$$

$\therefore$ $CA = 3, CB = 4$ より

$$EC : 3 = 3 : 4$$

$$4EC = 9 \therefore EC = \frac{9}{4}$$

(3)



(2) の結果より

$\triangle EAC$ と $\triangle ABC$ は

相似である。

$$\therefore \angle ECA = \angle ACB$$

である。これは $\triangle ECB$ は二等辺三角形

CF が $\angle ECB$ の二等分線

になる。したがって $CE = CB$ である。

よって

$$CE = CB = EF = FB$$

(2) より $EC = \frac{9}{4}$ 、また $BC = 4$ より

$$EF = FB = \frac{9}{4} : 4$$

$$= 9 : 16 \dots \textcircled{1}$$

である。

一方、 $\triangle BCF$ と $\triangle CEF$ の

面積比は、底辺 BE を

共通と考えると、高さは等しいから

同じである。

$$\triangle BCF = \triangle CEF$$

$$= BF = FE$$

である。したがって (1) より

$$EF : FB = 9 : 16$$

より

$$BF : FE = 16 : 9$$

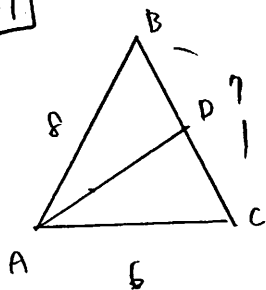
よって

$$\triangle BCF : \triangle CEF$$

$$= 16 : 9$$

である。

117



(1) ADは $\angle A$ の二等分線より

$$AC:AB = CD:DB$$

が成り立つ。より

$$6:8 = CD:DB$$

$$\therefore CD:DB = 3:4$$

より CDは BC の $\frac{3}{7}$ 、

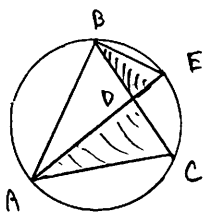
DBは BC の $\frac{4}{7}$ である。

よって

$$CD = \frac{3}{7}BC = \frac{3}{7} \cdot 7 = 3$$

$$DB = \frac{4}{7}BC = \frac{4}{7} \cdot 7 = 4$$

(2)



$\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ について

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle DAC = \angle DBE \dots ① \\ (\angle AEC \text{ の共通角}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle DCA = \angle DEB \dots ② \\ (\angle BAC \text{ の共通角}) \end{array} \right.$$

①②より

$\triangle ADC$ と $\triangle BDE$ は

相似である。

また、角の二等分線より

2本の線分 AE, BC について

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC$$

が成り立つ。(1)より $BD = 4$ 、

$CD = 3$ より

$$AD \cdot DE = 4 \cdot 3 = 12$$

(3) $\triangle ABE$ と $\triangle ADC$ について

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BAE = \angle DAC \dots ① \\ (AD \text{ は } \angle A \text{ の二等分線}) \end{array} \right.$$

$$\angle BEA = \angle DCA \dots ②$$

(2)より $\angle BAE$ と $\angle ADC$

は相似である。

また $\triangle ABE$ と $\triangle ADC$ について

$$AB:AE = AD:AC$$

が成り立つ。より

$$AB = 8, AC = 6 \text{ より}$$

$$8:AE = AD:6$$

$$AE \cdot AD = 8 \cdot 6 = 48$$

が成り立つ。(2)の結果より

$$AD \cdot DE = 12$$

よって、また、角の二等分線より

$$AD \cdot AE = 48$$

$$AD \cdot (AD + DE) = 48$$

左辺を展開して

$$AD^2 + AD \cdot DE = 48$$

$$\therefore AD \cdot DE = 12 \text{ より}$$

$$AD^2 + 12 = 48$$

$$AD^2 = 36$$

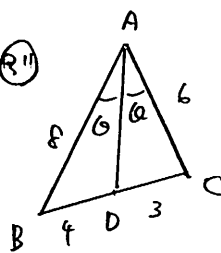
$$AD > 0 \text{ より } AD = 6$$

(2)より

$$AD \cdot DE = 12$$

$$6 \cdot DE = 12 \therefore DE = 2$$

(3)の(2)



$\triangle ABD$ の余弦定理より

$$8^2 + AD^2 - 2 \cdot 8 \cdot AD \cdot \cos \theta = 4^2$$

$$\therefore AD^2 - 16AD \cos \theta + 48 = 0 \dots (I)$$

$\triangle ADC$ の余弦定理より

$$AD^2 + 6^2 - 2 \cdot AD \cdot 6 \cdot \cos \theta = 3^2$$

$$\therefore AD^2 - 12AD \cos \theta + 27 = 0 \dots (II)$$

$$(I) \times 3 - (II) \times 4 \text{ より}$$

$$\begin{array}{r} 3AD^2 - 48AD \cos \theta + 144 = 0 \\ -) 4AD^2 - 48AD \cos \theta + 108 \\ \hline -AD^2 + 36 = 0 \end{array}$$

$$AD^2 = 36$$

$$AD > 0 \text{ より } AD = 6$$

$$6 \cdot DE = 12$$

$$DE = 2$$

