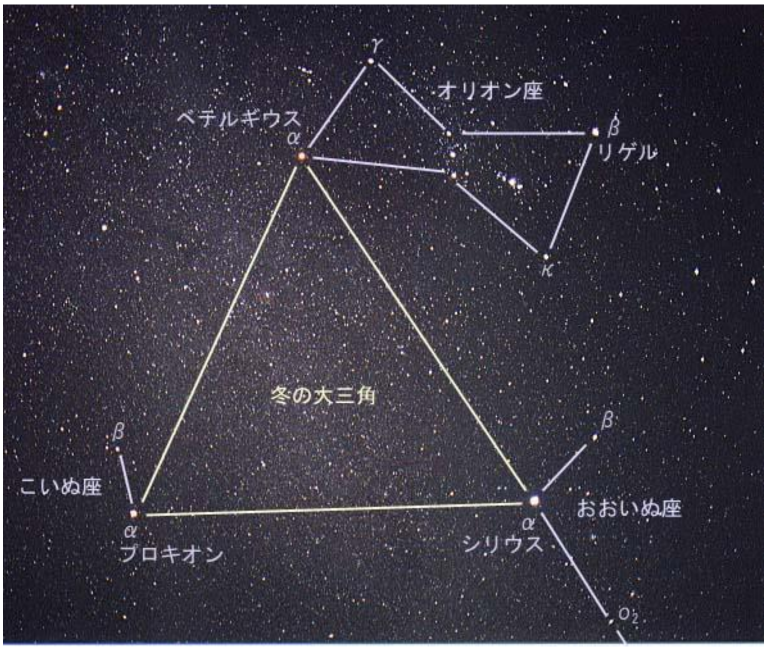
数学発展課題

冬の大三角形



(　　)年(　　)組(　　)番　氏名(　　　　　　　　　　　　　　)

三角比　　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 三角形 ABC において，AB$= 2\sqrt{2}$，$\angle$A$= 60^\circ$，$\cos C = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ である。

(1) $\sin C$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ。

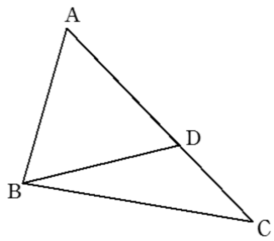
三角比　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

2 図のように，AB$=5$，AC$=8$，$\angle A=60^\circ$ の三角形 ABC がある。辺 AC 上に AD$=5$ となる点 D をとる。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 線分 BD の長さを求めよ。また，$\sin\angle CBD$ の値を求めよ。

(3) $\angle BDC$ の二等分線が辺 BC と交わる点を E とし，線分 DE を折り目として三角形 CDE を折り返す。頂点 C が線分 BD 上の点 F に重なるとき，三角形 BEF の面積を求めよ。



三角比　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{\mathbf{3}}$ 三角形 ABC があり，AB$=5$，$\angle$A$=60^\circ$ である。また，三角形 ABC の外接円の半径は $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$ である。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 辺 AC の長さを求めよ。

(3) 三角形 ABC の内接円の半径を求めよ。また，内接円と辺 AB，BC，CA との接点をそれぞれ D，E，F とするとき，線分 AD，AF と弧 DF(点 E を含まないほう) で囲まれる図形の面積を求めよ。

三角比　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

$\boxed{4}$ 三角形 ABC があり，AB$=7$，BC$=8$，CA$=6$ である。

（1）$\cos A$ の値を求めよ。

（2）三角形 ABC の面積 S，および内接円の半径 r を求めよ。

（3）三角形 ABC の内接円の中心を I とする。I より 2 辺 BC，CA に引いた垂線と各辺との交点をそれぞれ D，E とするとき，三角形 IDE の面積を求めよ。

三角比　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{5}$ 三角形 ABC において，AB$=2$，BC$=3$，$\cos A=\dfrac{1}{3}$ である。

(1) $\sin A$ の値を求めよ。また，三角形 ABC の外接円の半径を求めよ。

(2) 辺 AC の長さを求めよ。

(3) 三角形 ABC の外接円の直径が AD となるように，点 D をとる。このとき，三角形 BCD の面積を求めよ。

三角比　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

6 $\angle$BAC が鋭角で，AB$=5$，AC$=4$，$\sin A=\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$ である△ ABC がある。

(1) △ ABC の面積 S を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。

(3) 辺 BC 上に点 D を AD$=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$BD となるようにとるとき，線分 BD の長さを求めよ。

(4) (3) のとき，$\dfrac{\sin\angle\mathrm{CAD}}{\sin\angle\mathrm{BAD}}$ の値を求めよ。

三角比　平成＿＿年＿＿月＿＿日

7 ∠A が鈍角の△ ABC において，AB= 3，AC= 7 で，△ ABC の面積が $6\sqrt{3}$ である。

(1) $\sin A$ の値を求めよ。また，$\cos A$ の値を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。また，∠B の大きさを求めよ。

(3) △ ABD が正三角形となるように点 D を直線 AB に関して点 C と反対側にとる。辺 AB 上に BE= 1 となる点 E をとり，直線 CE と BD の交点を F とする。このとき，線分 BF を求めよ。

三角比　平成＿＿年＿＿月＿＿日

$\boxed{8}$ AB$=2$，AC$=1$，$\angle$A$=120^\circ$ の△ ABC がある。

（1）辺 BC の長さを求めよ。

（2）辺 AB 上に，CD$=\sqrt{3}$ となる点 D をとる。$\angle$ADC の大きさを求めよ。

（3）(2) のとき，点 D の直線 BC に関する対称点を E とする。△ BCE の面積を求めよ。また $\angle$ABE$=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

三角比　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

9 AB$=3a$，AC$=a$，BC$=4\sqrt{2}$ を満たす三角形 ABC があり，その外接円の半径は 3 である。ただし，a は正の定数とし，∠A は鋭角とする。

（1）$\sin A$ の値を求めよ。

（2）$\cos A$ の値を求めよ。また，a の値を求めよ。

（3）三角形 ABC の外接円の，点 A を含まない弧 BC 上に点 D をとり，四角形 ABDC をつくる。四角形 ABDC の面積が最大となるとき，その最大値を求めよ。

10 AB$=5$，AC$=4$，面積 $\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$ の鋭角三角形 ABC がある。

（1）$\sin A$ の値を求めよ。

（2）辺 BC の長さを求めよ。

（3）辺 BC 上 (ただし，両端は除く) に点 P をとり，線分 AP を直径とする円と辺 AB，AC との交点をそれぞれ Q，R とする。QR$=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$ のとき，線分 AP，PC の長さを求めよ。

三角比　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

11 AB$=5$，AC$=7$，$\cos A=\dfrac{1}{7}$ である三角形 ABC がある。辺 BC の中点を D，点 D から辺 AB，AC に垂線をひきその交点をそれぞれ E，F とする。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 線分 DE の長さを求めよ。

(3) 三角形 DEF の面積を求めよ。

三角比　平成 ______ 年 ______ 月 ______ 日

12 円に内接する四角形 ABCD があり, $\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$, $\mathrm{AC}=5\sqrt{3}$, $\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{3}{5}$ である。

(1) 辺 AB の長さを求めよ。

(2) $\mathrm{AD}=4x$, $\mathrm{CD}=x$ のとき, x の値を求めよ。

(3) (2) のとき, 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

三角比　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

13 三角形 ABC があり，AB$=3$，$\angle$A$=120^\circ$，外接円の半径が $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ である。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 辺 AC の長さを求めよ。

(3) 三角形 ABC の内接円の半径を求めよ。また，内接円の中心を I とするとき，線分 AI の長さを求めよ。

三角比　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

14 AB$=13$，AC$=15$ で $\angle$B が鋭角の$\triangle$ ABC があり，外接円の半径は $\dfrac{65}{8}$ である。

(1) $\sin B$ の値を求めよ。

(2) $\cos B$ の値を求めよ。また，辺 BC の長さを求めよ。

(3) 直線 AC に関して，点 B と反対側に点 D を，DA=DC，$\angle$ADC$+\angle$ABC$=180^\circ$ となるようにとる。線分 DC の長さとそのときの四角形 ABCD の面積を求めよ。

三角比　平成＿＿年＿＿月＿＿日

15 AB$=2$，BC$=\sqrt{7}$，CA$=3$ の△ABC がある。

(1) ∠BAC の大きさを求めよ。

(2) △ABC の面積を求めよ。また，辺 AC 上に点 D をとる。△BCD の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるとき，CD の長さを求めよ。

(3) (2) のとき，∠BDC を 4 等分する 3 本の直線と辺 BC との交点を点 B から近い方から順に E，F，G とする。このとき，DG の長さを求め，△DGF の面積を求めよ。

16 AB$=3$，BC$=4$，CA$=2$ の△ ABC があり，その外接円を O とする。

(1) $\cos B$ の値を求めよ。

(2) △ ABC の面積 S を求めよ。また，円 O の半径 R を求めよ。

(3) 円 O の点 A を含まない弧 BC 上に点 D を AD$=3$ となるようにとる。ただし，CD<4 とする。線分 CD の長さを求めよ。さらに，線分 AD，BC の交点を E とし，△ ABE，△ CDE の面積をそれぞれ S_1，S_2 とするとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

17 円に内接する四角形 ABCD があり，$AB=1$，$AD=3$，
$\angle BAD=120^\circ$，$BC=CD$ である。

（1）対角線 BD の長さを求めよ。また，円の半径を求めよ。

（2）線分 AC の長さを求めよ。

（3）$\angle BAC$ の二等分線と円の交点を E とする。三角形 AEC の面積を求めよ。

三角比　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

18 三角形 ABC において，AB$=3$，BC$=7$，CA$=5$ である。

(1) $\angle$A の大きさを求めよ。また，三角形 ABC の面積を求めよ。

(2) 三角形 ABC の外接円の半径を求めよ。また，点 A を通るこの外接円の直径を AD とするとき，BD の長さを求めよ。

(3) (2) のとき，三角形 BCD の面積を求めよ。

19 直角三角形ABCがあり, AB= 9, $\cos A = \dfrac{1}{3}$, ∠C= 90°
である。また，辺AB上にAD= 5である点Dをとる。

(1) 辺AC，辺CDの長さをそれぞれ求めよ。

(2) 三角形ACDの外接円と辺BCとの点C以外の交点をEとするとき，AEの長さを求めよ。

(3) (2) のとき，三角形CDEの面積を求めよ。

三角比　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

20 AB=BC= $2\sqrt{7}$，CA= 8 である三角形 ABC がある。

（1）$\cos B$ の値を求めよ。

（2）三角形 ABC の外接円の半径 R を求めよ。また，この外接円の周上に ∠BAD= 120° である点 D をとるとき，BD の長さを求めよ。

（3）(2) のとき，三角形 BCD の面積を求めよ。

三角比　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

21 AB$=\sqrt{3}$，BC$=\sqrt{13}$，CA$=2$ の三角形 ABC があり，
辺 AC の中点を M とする。

(1) $\angle$BAC の大きさを求めよ。

(2) 三角形 ABM の面積と線分 BM の長さを求めよ。

(3) 線分 BM 上に $\angle$BAD$=30^\circ$ となる点 D をとる。このとき，$\sin\angle$ADM の値を求めよ。

三角比　平成＿＿年＿＿月＿＿日

22 鋭角三角形 ABC があり，AB$=4$，BC$=\sqrt{21}$，CA$=5$ である。また，△ABC の外接円の中心を O とし，直線 OB と外接円の交点のうち B でない方を D とする。

(1) $\angle$BAC の大きさを求めよ。

(2) △ABC の外接円の半径 R を求めよ。また，△ABD の面積 S を求めよ。

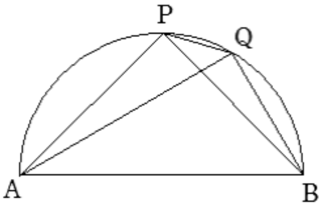
(3) 線分 AC と線分 BD の交点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。

23 図のように，長さ $2\sqrt{2}$ の線分 AB を直径とする半円周上に $\angle\mathrm{PAB} = 45^\circ$，$\angle\mathrm{QAB} = 30^\circ$ となる点 P，Q をとる。

(1) AP, AQ の長さを求めよ。

(2) PQ の長さを求めよ。

(3) 四角形 ABQP の面積を求めよ。



24 円 O に内接する三角形 ABC があり，AB$=4$，BC$=5$，CA$=6$ である。

(1) $\cos\angle\mathrm{BAC}$，$\sin\angle\mathrm{BAC}$ の値を求めよ。

(2) 円 O の半径および三角形 ABC の面積を求めよ。

(3) 点 B を通る円 O の直径 BD を引き，直線 AC との交点を E とする。このとき，線分 AD の長さを求めよ。また，比 BE:ED を最も簡単な整数の比で表せ。

三角比　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

25 円に内接する四角形 ABCD において, AB$=5$, BC$=3$,
$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{3}$ である。

(1) AC の長さを求めよ。

(2) $\triangle$ ABC の面積を求めよ。また, この円の半径を求めよ。

(3) $\triangle$ ACD の面積が $\triangle$ ABC の面積の $\dfrac{3}{5}$ であるとき, 四角形 ABCD の周の長さを求めよ。

26 AB$=3$，BC$=2$，CA$=4$ の三角形 ABC がある。三角形 ABC の外接円を K とし，円 K の周上に点 D をとる。ただし，点 D は 3 点 A, B, C とは異なる点である。

(1) $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) 円 K の半径を求めよ。また，線分 BD が円 K の直径であるとき，線分 AD の長さを求めよ。

(3) BD$=3$ のとき，線分 CD の長さと三角形 BCD の面積を求めよ。

27 三角形 ABC があり，AB$=5$，BC$=6$，$\cos A=\dfrac{1}{8}$ である。

（1）$\sin A$ の値を求めよ。

（2）三角形 ABC の外接円の半径を求めよ。

（3）辺 AC の長さを求めよ。

（4）点 A から直線 BC に垂線を引き，交点を H とするとき，線分 AH の長さを求めよ。また，三角形 ABC の外接円の中心を O，直線 AO と直線 BC の交点を D とするとき，$\dfrac{\mathrm{OD}}{\mathrm{AD}}$ の値を求めよ。

三角比　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

28 半径 $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$ の円に内接する鋭角三角形 ABC がある。
AB$=5$ であり，BC$=x$，CA$=x+1$ とする。

(1) $\sin C$ の値を求めよ。

(2) x の値を求めよ。

(3) 頂点 A, B, C から対辺 BC, CA, AB に引いた垂線と，各辺との交点を順に D, E, F とする。このとき，$\triangle$ DEF の面積を求めよ。

三角比　平成＿＿年＿＿月＿＿日

29 平行四辺形 ABCD があり，AB$=4$，BC$=7$，$\sin B=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ である。ただし，∠B は鋭角である。

(1) 平行四辺形 ABCD の面積を求めよ。

(2) 対角線 AC と BD の長さを求めよ。

(3) 対角線 AC と BD の交点を O とする。三角形 OAB の面積を求めよ。

三角比　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

$\boxed{\mathbf{30}}$ AB$=2$，AC$=x$，$\angle\mathrm{A}=120^\circ$ の三角形 ABC がある。

(1) BC^2 の値を x で表せ。

(2) 三角形 ABC の外接円の半径が $\sqrt{3}$ のとき，x の値を求めよ。

(3) 辺 BC 上に $\angle\mathrm{BAD}=90^\circ$ となるように点 D をとる。(2) のとき，三角形 ABD の面積を求めよ。

三角比　平成＿＿年＿＿月＿＿日

31 AB$=9$，AC$=8$，$\cos A=\dfrac{2}{3}$ の△ ABC がある。

(1) $\sin A$ の値を求めよ。また，△ ABC の面積を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。また，$\cos C$ の値を求めよ。

(3) 辺 AC (両端を除く) 上に点 P をとり，△ PBC の外接円の半径を R とする。R の最小値を求めよ。また，R が最小となるときの三角形 PBC の中心 O に対して，線分 OA の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{32}}$ △ ABC において，AB= 4，BC= 5，CA= 6 とする。
辺 BC 上 (ただし，端点を除く) に点 D をとり，D から
２辺 AB，AC にそれぞれ垂線 DE，DF を引く。

(1) $\cos B$，$\cos C$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) BD= x $(0 < x < 5)$ とおくとき，線分 DE，DF の長さをそれぞれ x を用いて表せ。

(3) 点 D が辺 BC 上を動くとき，四角形 AEDF の面積の最大値と，そのときの BD の長さを求めよ。

$\boxed{\mathbf{33}}$ $\triangle$ ABC があり，AC$=2$，$\angle A=120^\circ$，$\angle B=45^\circ$ である。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 辺 AB の長さを求めよ。

(3) 辺 BC 上に点 D を $\angle BAD=30^\circ$ となるようにとる。直線 AD に関して B と対称な点を E とするとき，四角形 ADEC の面積を求めよ。

34 以下の問いに答えよ。

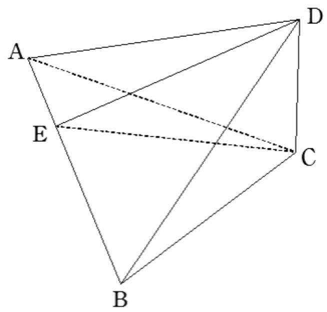
（1）円に内接する四角形 ABCD において，AB$=1$, BC$=2$, CD$=3$，DA$=4$ である。円の面積を S，この円に内接する四角形 ABCD の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の値を求めよ。

（2）三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とする。このとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$$

が成り立つことを示せ。

（3）三角錐 ABCD において，辺 CD は底面 ABC に垂直である。また，辺 AB を 1:2 に内分する点を E とする。$\mathrm{AB}=3$，$\angle\mathrm{DAC}=30^\circ$，$\angle\mathrm{DEC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{DBC}=60^\circ$ であるとき，辺 CD の長さを求めよ。



三角比　　平成＿＿＿年＿＿＿月＿＿＿日

35 AB$=5$，AC$=8$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の△ ABC がある。△ ABC の外接円の中心を O とする。

(1) △ ABC の面積を求めよ。

(2) 辺 BC の長さを求めよ。また, 線分 OA の長さを求めよ。

(3) 四面体 ABCD がある。点 D から底面 ABC に垂線 DH を下ろすと，点 H は辺 AC の中点であり，$\mathrm{OD}=\mathrm{OA}$ である。このとき，四面体 ABCD の体積を求めよ。

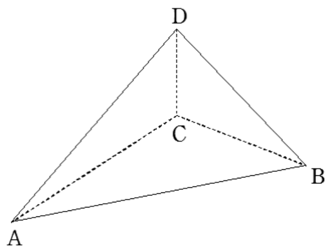
三角比　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

36 三角錐 ABCD があり, AC$=3$, BC$=1$, $\angle \mathrm{ACB}=120^\circ$,
$\angle \mathrm{ACD}=\angle \mathrm{BCD}=90^\circ$, $\angle \mathrm{DAC}=30^\circ$ である。

(1) 辺 AB の長さを求めよ。

(2) $\angle \mathrm{ACB}$ の二等分線と辺 AB との交点を E とするとき, 線分 CE の長さを求めよ。

(3) (2) のとき, 辺 AB 上に AF $=$ BE なる点 F をとる。線分 DF の長さを求めよ。

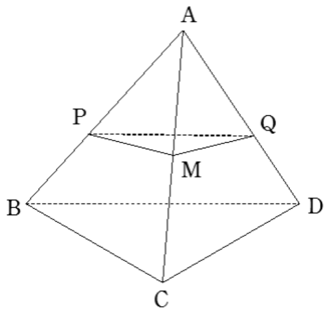


37 右の図のような四面体 ABCD があり，$AB = AC = 8$, $AD = BD = 6\sqrt{2}$, $\cos\angle BAC = \dfrac{4}{5}$, $\angle CAD = 45°$ である。辺 AC の中点を M とし，辺 AB 上に $AC \perp PM$ となるように点 P を，辺 AD 上に $AC \perp QM$ となるように点 Q をとる。

(1) $\tan\angle BAC$ の値を求めよ。また，線分 PM の長さを求めよ。

(2) 線分 PQ の長さを求めよ。

(3) 点 P から平面 ACD に垂線を引き，その交点を H とする。線分 PH の長さを求めよ。



38 AB$=3$，AC$=5$，$\cos\angle \mathrm{BAC}=\dfrac{1}{3}$ を満たす△ ABC を底面とし，頂点を P とする四面体 PABC が半径 3 の球面に内接している。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。また，△ ABC の外接円の半径を求めよ。

(2) 点 P が球面上を動き，辺 AP の長さが最大となるとき，辺 BP の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面上を動くとき，四面体 PABC の体積の最大値を求めよ。

39 四角形 ABCD があり，AB$=2$, BC$=1+\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{DAB}=105^\circ$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BCD}=75^\circ$ である。

（1）対角線 AC の長さと，$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ。

（2）$\triangle$ ACD の面積を求めよ。

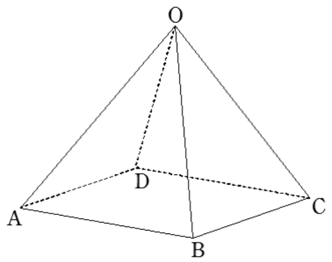
（3）三角錐 PACD が半径 $\sqrt{3}$ の球に内接するとき，三角錐 PACD の体積の最大値を求めよ。

40 1 辺の長さが 8 の正方形 ABCD を底面とする四角錐 O-ABCD があり，OA = OB = OC = OD，$\sin\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，△ OAB の面積が $32\sqrt{2}$ である。

(1) 辺 OA の長さを求めよ。また，四角錐 O-ABCD の高さを求めよ。

(2) 点 P を辺 OA 上に，点 Q を辺 AB 上に OP = AQ = x となるようにとる。三角錐 PAQD の体積の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(3) (2) の三角錐 PAQD の体積が最大になるとき，点 A から平面 PQD に下ろした垂線を AH とする。線分 AH の長さを求めよ。



三角比　　平成＿＿年＿＿月＿＿日

41 $\triangle$ BCD を底面とする正三角錐 ABCD があり，$BC = CD = DB = 2\sqrt{3}$，$AB = AC = AD = \sqrt{19}$ である。

また，辺 CD の中点を M とする。

(1) 線分 AM の長さを求めよ。また，$\cos\angle AMB$ の値を求めよ。

(2) 正三角錐 ABCD に内接する球の半径を求めよ。

(3) 辺 AC, AD 上にそれぞれ点 E, F を AE:EC=AF:FD=3:1 となるようにとる。正三角錐 ABCD の中にあり，平面 BCD および平面 BEF に接する球のうち，最も大きい球の半径を求めよ。

三角比　　平成 ＿＿＿ 年 ＿＿＿ 月 ＿＿＿ 日

42 $\triangle$ ABC があり，AB$=2$，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\angle\mathrm{C}=45^\circ$ である。

(1) 辺 BC の長さを求めよ。

(2) 辺 AC の長さを求めよ。

(3) 点 A を中心に$\triangle$ ABC を回転し，点 B，C が移動した点をそれぞれ D，E とする。点 D が辺 BC 上の点 (ただし，点 B とは異なる) であるとき，辺 AC と線分 DE の交点を F とする。このとき，$\angle$CAD の大きさを求めよ。また，$\triangle$ CDF の面積を求めよ。