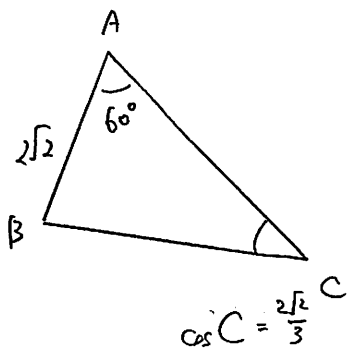


(1)



$$(1) \sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

$$\sin^2 C + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 C + \frac{8}{9} = 1$$

$$\therefore \sin^2 C = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin C = \pm \frac{1}{3} \text{ 不適}$$

$$\therefore 0^\circ < C < 180^\circ \text{ 不適}$$

$$\sin C > 0 \text{ 不適} \therefore \sin C = -\frac{1}{3} \text{ 不適}$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{3}$$

(2) 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\therefore BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C}$$

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{3}}$$

$$BC \cdot \frac{1}{3} = 2\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ$$

$$BC = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

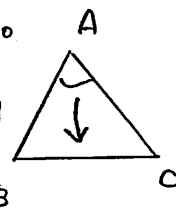
$$= 3\sqrt{6}$$

$$(3) S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$\therefore AC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot \sin 60^\circ$$

△ABCで余弦定理より



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

$$(3\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{2})^2 + AC^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$54 = 8 + AC^2 - 2\sqrt{2} AC$$

$$\therefore AC^2 - 2\sqrt{2} AC - 46 = 0$$

$$\therefore AC = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 4 \cdot 46}}{2}$$

$$AC = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8 + 184}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{192}}{2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pm 8\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{2} \pm 4\sqrt{3}$$

$$\therefore AC > 0 \text{ 不適}$$

$$\sqrt{2} - 4\sqrt{3} \text{ 不適}$$

$$\therefore AC = \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore$$

$$AC = \sqrt{2} + 4\sqrt{3}$$

$$\therefore$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \sqrt{2} (\sqrt{2} + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

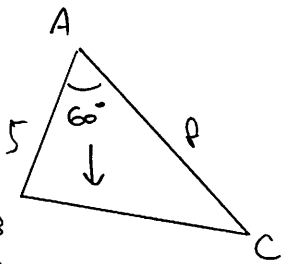
$$= (2 + 4\sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= (1 + 2\sqrt{6}) \cdot \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} + 6\sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{++}}$$

[2]



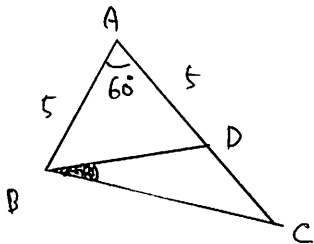
(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ \\ &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 25 + 64 - 40 \\ &= 49 \end{aligned}$$

$$\therefore BC^2 = 49 \text{ より } BC = \pm 7$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = 7$$

(2)



$$AB = 5, AD = 5, \angle A = 60^\circ$$

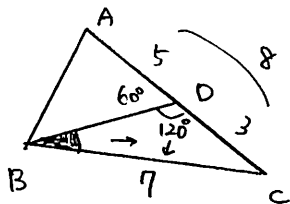
より $\triangle ABD$ は正三角形である。

よって

$$BD = 5$$

すなわち $\triangle ABD$ は正三角形である。

$$\angle ADB = 60^\circ \text{ より } \angle BDC = 120^\circ$$



$$\text{すなわち } AC = 8 \text{ より } AD = 5 \text{ より}$$

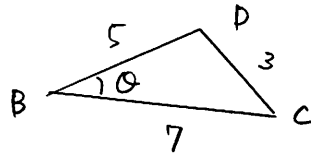
$$DC = 3 \text{ である。}$$

よって $\triangle BCD$ について正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{DC}{\sin \angle CBD}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{7}{\sin 120^\circ} &= \frac{3}{\sin \angle CBD} \\ 7 \cdot \sin \angle CBD &= 3 \cdot \sin 120^\circ \\ 7 \sin \angle CBD &= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \sin \angle CBD &= \frac{3\sqrt{3}}{14} \end{aligned}$$

(3) $(\sin \angle CBD \text{ の値})$



1. $\angle CBD = \theta$ とおく

$\triangle BCD$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{BD^2 + BC^2 - CD^2}{2 \cdot BD \cdot BC} \\ &= \frac{5^2 + 7^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{25 + 49 - 9}{2 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{65}{2 \cdot 5 \cdot 7} \\ &= \frac{13}{14} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{13}{14} \text{ である。}$$

すなわち $\sin \angle CBD$ の値は

$$\sin \theta \text{ である。}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{13}{14}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta + \frac{169}{196} = 1$$

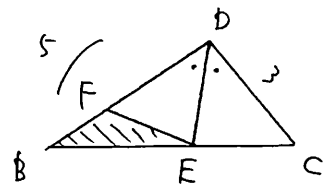
$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{169}{196} = \frac{27}{196}$$

$$\therefore \sin \theta = \pm \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore 0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ より } \sin \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{14}$$

(3)



$\triangle CDE$ と $\triangle BDE$ は相似である。
また $\triangle FDE$ も

$$DC = DF \text{ である。}$$

$$\text{よって } DF = 3 \text{ より } BF = 2$$

すなわち DE は $\angle BDC$ の二等分線

である。

$$DB : DC = BE : EC$$

$$5 : 3 = BE : EC$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} BE &= \frac{5}{8} BC \\ &= \frac{5}{8} \cdot 7 = \frac{35}{8} \end{aligned}$$

$$(2) \text{ より } \sin \angle CBD = \frac{3\sqrt{3}}{14} \text{ より}$$

$$\triangle BEF = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot BE \cdot \sin \angle CBD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{35}{8} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{16}$$

(3)

$$\angle BDC = 120^\circ \text{ より } \angle BDE = \angle CDE = 60^\circ \text{ である。}$$

DE は $\angle BDC$ の二等分線である。

$$\triangle DBC = \triangle DBE + \triangle DCE$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DE \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DE \cdot \sin 60^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot DE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot DE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore 15 = 5DE + 3DE$$

$$\text{よって } 8DE = 15 \text{ より } DE = \frac{15}{8}$$

よって

$$\triangle BEF = \triangle DBC - (\triangle DFE + \triangle DCE)$$

$$\triangle DBC = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC \cdot \sin 120^\circ$$

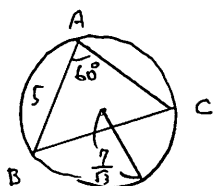
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$\triangle DFE$ と $\triangle DCE$ は合同である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{15}{8} \cdot \sin 60^\circ \\ = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{45\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

$$\therefore \triangle BEF = \frac{15\sqrt{3}}{4} - \left(\frac{45\sqrt{3}}{32} + \frac{45\sqrt{3}}{32}\right) = \frac{15\sqrt{3}}{16}$$

3



(1) 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

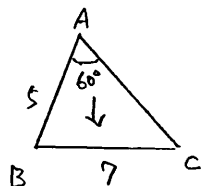
半径 \$r\$ \$A=60^\circ\$, \$R=\frac{7}{\sqrt{3}}\$ より

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \quad (\text{両辺} \times \sin 60^\circ \text{より})$$

$$\begin{aligned} \therefore BC &= 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \sin 60^\circ \\ &= 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$= 7$$

(2)



余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$7^2 = 5^2 + AC^2 - 2 \cdot 5 \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

$$49 = 25 + AC^2 - 2 \cdot 5 \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore AC^2 - 5AC - 24 = 0$$

\$AC\$ の 2 次方程式を解くと

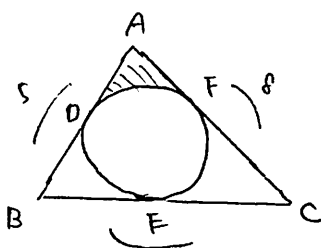
$$(AC-8)(AC+3)=0$$

$$AC = 8, -3$$

$$\therefore AC > 0 \text{ より}$$

$$AC = 8$$

(3)



内接円の半径を \$r\$ とする。

\$\triangle ABC\$ の面積を \$S\$ とする。

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} r (AB+BC+CA)$$

が成り立つ。 \$\therefore r = \sqrt{3}\$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

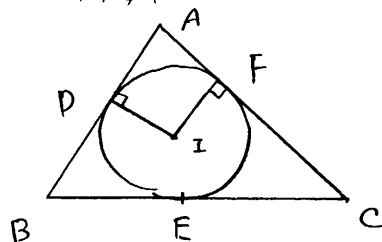
よって

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2} r (5+7+8)$$

$$10\sqrt{3} = \frac{1}{2} r \cdot 20$$

$$\therefore r = \sqrt{3}$$

すなわち、内接円の中心が \$I\$ とする。



よって、\$D\$ と \$F\$ は接点なので

\$ID\$ は \$AB\$ に垂直

\$IF\$ は \$AC\$ に垂直

になる。また、\$ID\$ と \$IF\$ は

\$\triangle ABC\$ の内接円の半径である。

ゆえに先程の結果から

$$ID = IF = \sqrt{3}$$

である。よって、\$AD\$ と \$AF\$ の長さは

\$AD\$ と \$AF\$ は、点 \$A\$ から円に引いた

2 つの接線長であるから、\$AD = AF\$

が成り立つ。同様にして

$$BD = BE, CE = CF$$

が成り立つ。よって

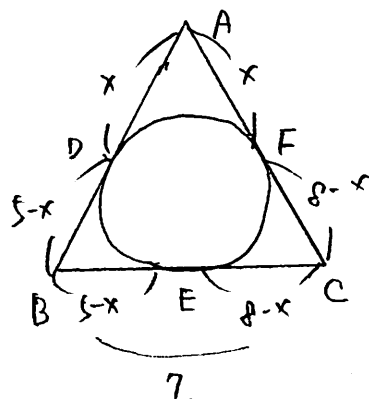
$$AD = AF = x$$

と置く。

$$BD = 5-x, CF = 8-x$$

よって、また

$$BE + EC = 7 \text{ かつ}$$



$$(5-x) + (8-x) = 7$$

$$13 - 2x = 7$$

$$\therefore x = 3$$

よって

① 四角形 \$ADIF\$ の面積

$$= \triangle ADI + \triangle AFI$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DI + \frac{1}{2} \cdot AF \cdot IF$$

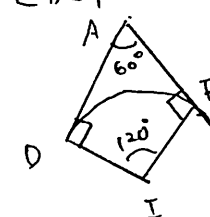
$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

また、\$\angle A = 60^\circ\$ より

$$\angle ADI = \angle AFI = 90^\circ \text{ より}$$

$$\angle DIF = 120^\circ$$



よって、扇形 \$IDF\$ の面積は

半径 \$\sqrt{3}\$ より

$$(\sqrt{3})^2 \pi \times \frac{120^\circ}{360^\circ}$$

$$= 3\pi \cdot \frac{1}{3} = \pi$$

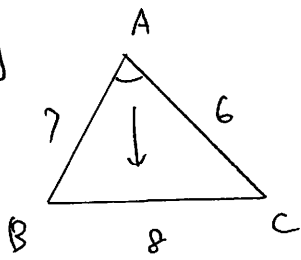
よって、求める面積は

四角形 \$ADIF\$

- 扇形 \$DIF\$

$$= 3\sqrt{3} - \pi$$

[4]



(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{7^2 + 6^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 6} \\ &= \frac{49 + 36 - 64}{2 \cdot 7 \cdot 6} \\ &= \frac{21}{2 \cdot 7 \cdot 6} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

(2) (1)より $\cos A = \frac{1}{4}$
 $\therefore \sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\sin^2 A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1$$

より $\sin A > 0$

$$\sin^2 A + \frac{1}{16} = 1$$

$$\sin^2 A = \frac{15}{16}$$

$$\sin A = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\therefore 0^\circ < A < 180^\circ$ より

$$\sin A > 0$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{21}{4} \sqrt{15}\end{aligned}$$

また、内接円の半径 $r = ?$

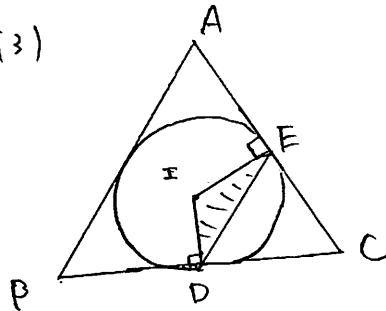
$$S = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA)$$

$$\therefore \frac{21}{4} \sqrt{15} = \frac{1}{2} r (7 + 8 + 6)$$

$$\frac{21}{4} \sqrt{15} = \frac{1}{2} r \cdot 21$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

(3)



また、D、Eは内接円と各辺との接点である。よって、ID、IEの長さは内接円の半径 $r = \frac{\sqrt{15}}{2}$ である。

$$\therefore ID = IE = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

よって、 $\triangle IDE$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot ID \cdot IE \cdot \sin \angle DIE \dots (*)$$

で求める。よって、 $\sin \angle DIE$ の値を求める。また、四角形 IDCE において、 $\angle IDC = \angle IEC = 90^\circ$

である。

$$\angle DIE + C = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DIE = 180^\circ - C$$

よって

$$\sin \angle DIE = \sin (180^\circ - C)$$

である。

$$\sin (180^\circ - C) = \sin C$$

より

$\sin \angle DIE = \sin C$

の値は $\sin C$ である。

よって、 $\sin C$ の値を求める。

(2) の結果より

$$\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって、 $\sin C$ の値は正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{8}{\sin A} = \frac{7}{\sin C}$$

$$8 \sin C = 7 \sin A$$

$$\therefore \sin C = \frac{7}{8} \sin A$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$= \frac{7}{32} \sqrt{15}$$

(*) に代入して、求める面積は

$$\triangle IDE = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{7}{32} \sqrt{15}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{7}{32} \sqrt{15}$$

$$= \frac{105}{256} \sqrt{15}$$

(参考)

$$\textcircled{1} \triangle IDE = \text{四角形 IDCE} - \triangle CDE$$

と求める。

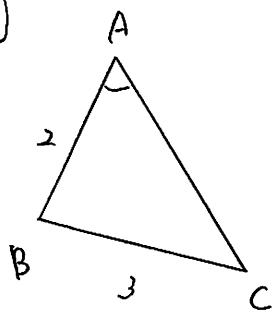
② $\sin C$ の値は

余弦定理より $\cos C$ を求める

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

より求める。

15



(1) $\cos A = \frac{1}{3}$ である。

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より

$\sin^2 A + (\frac{1}{3})^2 = 1$

$\sin^2 A + \frac{1}{9} = 1$

$\therefore \sin^2 A = \frac{8}{9}$

よって $\sin A = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore 0^\circ < A < 180^\circ$ より

$\sin A > 0$ より

$\sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

すなわち $\triangle ABC$ は正弦定理より

$2R = \frac{BC}{\sin A}$

$\therefore 2R = \frac{3}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

$= 3 \div \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= 3 \times \frac{3}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{9}{2\sqrt{2}}$

$= \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$\therefore R = \frac{9\sqrt{2}}{8}$

(2) $\triangle ABC$ は余弦定理より

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$

$3^2 = 2^2 + AC^2 - 2 \cdot 2 \cdot AC \cdot \frac{1}{3}$

$9 = 4 + AC^2 - \frac{4}{3}AC$

$\therefore AC^2 - \frac{4}{3}AC - 5 = 0$

$3AC^2 - 4AC - 15 = 0$

$\left(\begin{array}{ccc} 3 & -4 & -15 \\ 1 & -\frac{4}{3} & -5 \end{array} \right)$

$(3AC+5)(AC-3) = 0$

$\therefore AC = -\frac{5}{3}, 3$

$\therefore AC > 0$ より

$AC = -\frac{5}{3}$ は不適

$\therefore AC = 3$

(3)

$BC = AC = 3$ より

$\angle A = \angle B$ である。

よって $\cos A = \frac{1}{3}$ より

A は鋭角。よって

B も鋭角である。

すなわち

$\cos C = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 3}$

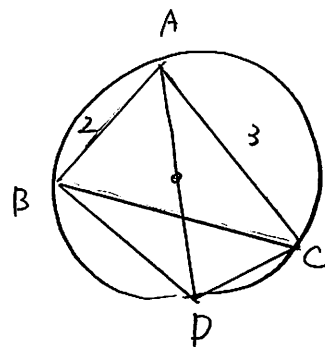
$= \frac{14}{18} > 0$

よって C も鋭角である。

ゆえに $\triangle ABC$ は鋭角三角形

であるから $\triangle ABC$ の外接円の

の中心は $\triangle ABC$ の内部にある。



$\therefore AD$ は直径より $\frac{AD}{2} = 2$ である。

(1) の結果より

$AD = 2R = 2 \cdot \frac{9\sqrt{2}}{8} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

よって AD は直径より

$\triangle ABD$ は $\angle B = 90^\circ$ の直角三角形

より

$AB^2 + BD^2 = AD^2$

$2^2 + BD^2 = (\frac{9\sqrt{2}}{4})^2$

$\therefore BD^2 = \frac{81}{8} - 4 = \frac{49}{8}$

$\therefore BD > 0$ より $BD = \frac{7}{2\sqrt{2}}$

$\triangle ADC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

より $AC^2 + CD^2 = AD^2$

$3^2 + CD^2 = (\frac{9\sqrt{2}}{4})^2$

$\therefore CD^2 = \frac{81}{8} - 9 = \frac{9}{8}$

$\therefore CD > 0$ より $CD = \frac{3}{2\sqrt{2}}$

すなわち 四角形 $ABDC$ は円に内接する。

よって $D = 180^\circ - A$ である。

よって

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot \sin D$

$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot \sin(180^\circ - A)$

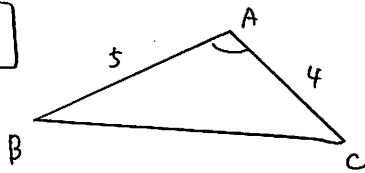
$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot \sin A$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{7}{8} \sqrt{2}$

$\left(\begin{array}{l} \sin(180^\circ - \theta) \\ = \sin \theta \end{array} \right)$

[6]



$$(1) S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$(2) \sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8} \text{ である。}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$

$$\frac{63}{64} + \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{64}$$

$$\therefore \cos A = \pm \frac{1}{8}$$

$\Rightarrow \angle A$ は 鈍角 である。

$\cos A > 0$ である。

$$\therefore \cos A = \frac{1}{8} \text{ である。}$$

ゆえに $\triangle ABC$ の余弦定理より

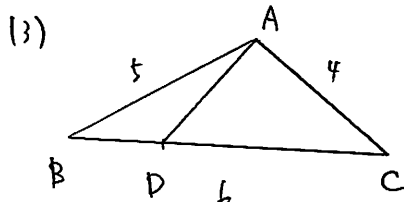
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 25 + 16 - 5$$

$$= 36$$

$$\therefore BC > 0 \text{ であり、} BC = 6$$



(2) 8) $BC = 6$ であり、また

$AB = 5, AC = 4$ である。

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$= \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= \frac{25 + 36 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

よって $\triangle ABD$ の余弦定理より

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{14}}{2} BD \text{ である。また } AB = 5$$

$$\therefore \cos B = \frac{3}{4} \text{ を代入すると}$$

$$\left(\frac{\sqrt{14}}{2} BD\right)^2 = 5^2 + BD^2 - 2 \cdot 5 \cdot BD \cdot \frac{3}{4}$$

$$\frac{14}{4} BD^2 = 25 + BD^2 - \frac{15}{2} BD$$

$$\frac{7}{2} BD^2 = 25 + BD^2 - \frac{15}{2} BD$$

$$7BD^2 = 50 + 2BD^2 - 15BD$$

$$5BD^2 + 15BD - 50 = 0$$

$$BD^2 + 3BD - 10 = 0$$

$$(BD + 5)(BD - 2) = 0$$

$$\therefore BD = -5, 2$$

$$BD > 0 \text{ であり}$$

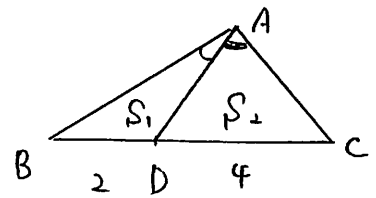
$$BD = 2$$

(4) 面積に注目する。

$\triangle ABD$ の面積を S_1

$\triangle ACD$ の面積を S_2

とすると



おと、 BC 上の点 D について

$$S_1 : S_2 = BD : DC$$

$$\therefore S_1 : S_2 = 2 : 4$$

$$\therefore S_1 : S_2 = 1 : 2$$

$$\therefore S_2 = 2S_1 \dots (*)$$

また、 $\triangle ABC$ の面積を

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD \\ S_2 = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD \end{cases}$$

$$\therefore (*) \text{ より } 1 = \sin \angle CAD$$

$$\frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin \angle CAD$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$$

両辺 AD を約すると

$$\frac{1}{2} AC \cdot \sin \angle CAD = AB \sin \angle BAD$$

$$\therefore AC = 4, AB = 5 \text{ を代入して}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \sin \angle CAD = 5 \cdot \sin \angle BAD$$

$$2 \sin \angle CAD = 5 \sin \angle BAD$$

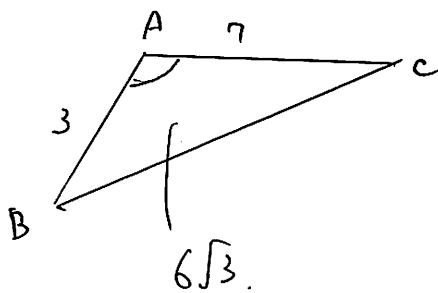
両辺を $\sin \angle BAD$ で割ると

$$2 \cdot \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle BAD} = 5$$

$\therefore$

$$\frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle BAD} = \frac{5}{2}$$

⑦



(1)

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 \cdot \sin A$$

$$4\sqrt{3} = 3 \cdot 7 \cdot \sin A$$

$$\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

また

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$

$$\frac{48}{49} + \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A = \frac{1}{49}$$

$$\cos A = \pm \frac{1}{7}$$

∵ A は鈍角より

$\cos A < 0$ であるから

$$\cos A = -\frac{1}{7}$$

(2) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$= 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$= 9 + 49 + 6$$

$$= 64$$

$$\therefore BC > 0 \text{ より } BC = 8$$

また $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB}$$

$$= \frac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 3}$$

$$= \frac{64 + 9 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 3}$$

$$= \frac{24}{2 \cdot 8 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ より

$$B = 60^\circ$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot BF \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot BF \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

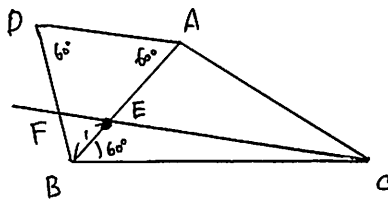
∴

$$8BF = BF + 8$$

$$7BF = 8$$

$$\therefore BF = \frac{8}{7}$$

(3)



$\triangle BFC$ の面積は

$\triangle BFE$ の面積と $\triangle BEC$ の面積の和である。

よって

$$\triangle BFC = \triangle BFE + \triangle BEC \quad \cdots (1)$$

∵ (2) より $\angle ABC = 60^\circ$

また $\triangle ABD$ は正三角形より

$\angle FBE = 60^\circ$ であるから

$$\triangle BFC = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot BC \cdot \sin 120^\circ$$

$$\triangle BFE = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot BE \cdot \sin 60^\circ$$

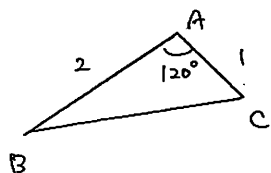
$$\triangle BEC = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BC \cdot \sin 60^\circ$$

であるから (1) より

$$\frac{1}{2} \cdot BF \cdot BC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot BF \cdot BE \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BC \cdot \sin 60^\circ$$

∵ (2) より $BC = 8$ であるから $BE = 1$

8

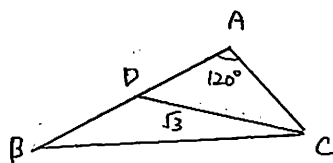


(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ \\ &= 2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 4 + 1 + 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$$\therefore BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{7}$$

(2)



$\triangle ADC$ で正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin A} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{1}{\sin \angle ADC}$$

$$\therefore \sqrt{3} \sin \angle ADC = 1 \cdot \sin 120^\circ$$

$$\sqrt{3} \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin \angle ADC = \frac{1}{2} \dots (*)$$

ここで $A = 120^\circ$ より

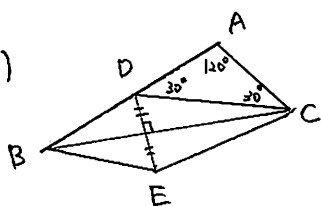
$$0^\circ < \angle ADC < 60^\circ$$

であるから、 $\sin$ の単調性より (*) を

満たすのは

$$\angle ADC = 30^\circ$$

(3)



DE の位置が点 E である。

(2) より $\angle ADC = 30^\circ$ である

また $A = 120^\circ$ より $\angle ACB = 30^\circ$

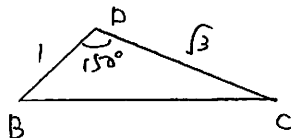
より $\triangle ADC$ は

$AD = AC$ の二等辺三角形

より $AD = 1$ より、 $AB = 2$ から

$BD = 1$ である

また、 $CD = \sqrt{3}$ である。さらに
 $\angle ADC = 30^\circ$ から、 $\angle BDC = 150^\circ$



つまり、 $\triangle BCE$ と $\triangle BDE$ は
合同であるから、 $\triangle BDC$ の面積
を求めればよい。

$$\therefore S = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot DC \cdot \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}$$

より、四角形 BDCE の面積は

$\triangle BDC$ の面積の 2 倍であるから

$$\text{四角形 BDCE} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots (**)$$

つまり、直線 BC に対して

点 D を対称点とする点 E の存在

点 E であるから、図 1 からも

分かる通り、

BC と DE は垂直

である。よって、四角形 BDCE

の面積は

$$\frac{1}{2} \times BC \times DE$$

であるから、これを求める。

(**) の結果より

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) より $BC = \sqrt{7}$ より

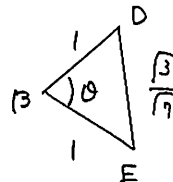
$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{7} \cdot DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

である。また、 $BD = BE = 1$

であり、さらに条件より

$\angle ABE = \theta$ としたとき、



$\triangle DBE$ で余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2}{2 \cdot 1 \cdot 1}$$

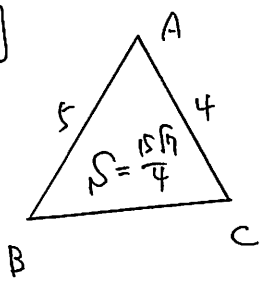
$$= \frac{1 + 1 - \frac{3}{7}}{2}$$

$$= \frac{2 - \frac{3}{7}}{2}$$

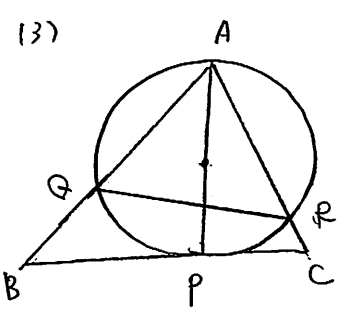
$$= \frac{\frac{11}{7}}{2}$$

$$= \frac{11}{14}$$

(10)



よ、 $BC = \pm 6$
 $BC > 0$ として $BC = 6$



AP は $\triangle AQR$ の外接円の直径である。よ、 $\triangle AQR$ において、正弦定理より

$$\frac{QR}{\sin A} = 2R$$

が成り立つ。2R は直径の長さである。

$$\frac{QR}{\sin A} = AP$$

が成り立つ。よ、 $AP = \frac{QR}{\sin A}$

$$QR = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

(1) より $\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8}$ である。

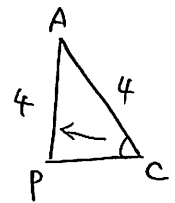
$$\frac{\frac{3\sqrt{7}}{2}}{\frac{3\sqrt{7}}{8}} = AP$$

$$AP = \frac{3\sqrt{7}}{2} \div \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{2} \times \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

$$= 4$$

よ、 $\triangle APC$ において、



$$AP^2 = AC^2 + PC^2 - 2 \cdot AC \cdot PC \cdot \cos C$$

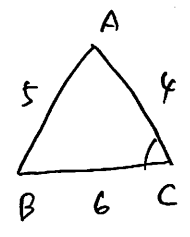
が成り立つ。よ、 $\cos C$ の値が分かれば、上の式より PC が求まる。

$\triangle ABC$ において、

余弦定理より

$$\cos C = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{16 + 36 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{27}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{9}{16}$$



よ、(★)より $\cos C = \frac{9}{16}$

$$4^2 = 4^2 + PC^2 - 2 \cdot 4 \cdot PC \cdot \frac{9}{16}$$

$$\therefore PC^2 - \frac{9}{2}PC = 0$$

$$2PC^2 - 9PC = 0$$

$$PC(2PC - 9) = 0$$

$$\therefore PC = 0, \frac{9}{2}$$

$PC > 0$ として $PC = \frac{9}{2}$

(1) $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$

よ、 $\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \sin A$

$$\therefore 10 \sin A = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\sin A = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

(2) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$

$$\frac{63}{64} + \cos^2 A = 1$$

$$\therefore \cos^2 A = \frac{1}{64}$$

$$\therefore \cos A = \pm \frac{1}{8}$$

よ、 $\triangle ABC$ は鋭角三角形である。

よ、 $\cos A > 0$ として

$$\cos A = \frac{1}{8}$$

よ、 $\triangle ABC$ において、余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

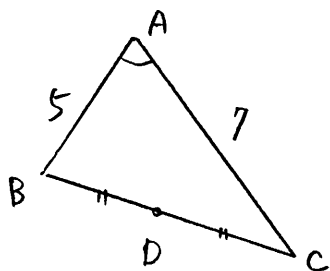
$$= 5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8}$$

$$= 25 + 16 - 5$$

$$= 36$$

$$\therefore BC^2 = 36$$

(1)

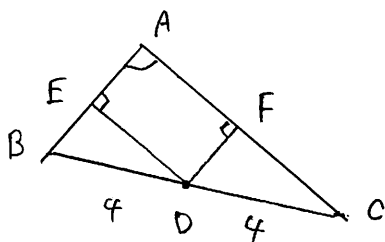
(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \\ &= 25 + 49 - 10 \\ &= 64 \end{aligned}$$

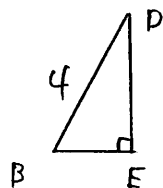
$$\therefore BC = \pm 8 \quad \therefore BC > 0 \text{ より}$$

$$BC = 8$$

(2)

D は BC の中点より (1) より $BC = 8$

$$\therefore BD = DC = 4.$$

 $\therefore \triangle DEB$ は直角 $\angle BED = 90^\circ$ より 直角三角形 である。

$$\therefore \sin B = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{DE}{BD} \quad (*)$$

が成り立つ。今、 $BD = 4$ より $\sin B$ の値が求まれば DE が求まる。 $\triangle ABC$ にあて余弦定理より

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\ &= \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\ &= \frac{40}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\sin^2 B + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2 B = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin B = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

今 $0^\circ < B < 180^\circ$ より $\sin B > 0$

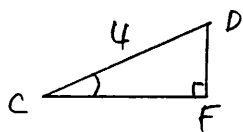
$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって (*) より

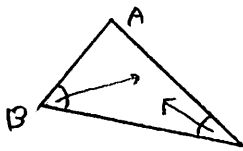
$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{DE}{4}$$

$$\therefore DE = 2\sqrt{3}$$

(3) (2) と (1) より



$$\sin C = \frac{DF}{CD} \quad (**)$$

 $\therefore \triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

が成り立つ。

$$\therefore \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\sin C}$$

$$7 \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

よって (**) より

$$\frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{DF}{4}$$

$$\therefore DF = \frac{10\sqrt{3}}{7}$$

が成り立つ。

 $\therefore \triangle AEDF$ は

$$\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$$

$$\angle A + \angle EDF = 180^\circ$$

よって

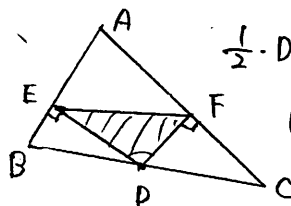
$$\sin \angle EDF = \sin (180^\circ - A)$$

$$= \sin A$$

が成り立つ。よって $\triangle DEF$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot DE \cdot DF \cdot \sin \angle EDF$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7}$$

 $\therefore \sin \angle EDF$ の値は

$$\sin A$$
 の値に等しい。

 $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\frac{8}{\sin A} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$7 \sin A = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

よって

$$DE = 2\sqrt{3}$$

$$DF = \frac{10\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin \angle EDF = \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

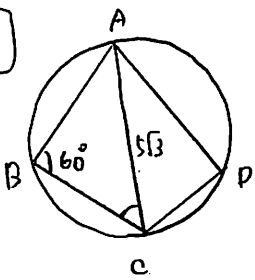
よって

$$\triangle DEF = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot DF \cdot \sin \angle EDF$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{10\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$= \frac{120\sqrt{3}}{49}$$

(12)



(1) △ABCで正弦定理より

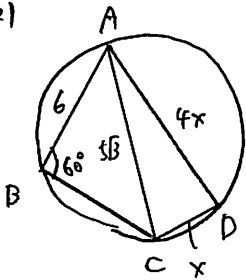
$$\frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB}$$

$$\therefore \frac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\frac{3}{5}}$$

$$\therefore \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{3}{5}}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \frac{3}{5} \times \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{3}{5} \times 5\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3}{5} \times 5\sqrt{3} \times \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= 6 \end{aligned}$$

(2)

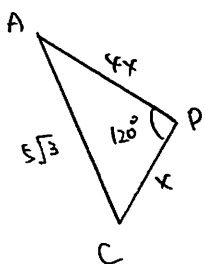


四角形ABCDは円に内接しているから

∠ABC = 60° であるから

∠ADC = 120° であるから

△ACDにおいて、余弦定理より



$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos 120^\circ$$

$$(5\sqrt{3})^2 = (4x)^2 + x^2 - 2 \cdot 4x \cdot x \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$75 = 16x^2 + x^2 + 4x^2$$

$$21x^2 = 75$$

$$x^2 = \frac{25}{7}$$

$$\therefore x = \pm \frac{5}{\sqrt{7}}$$

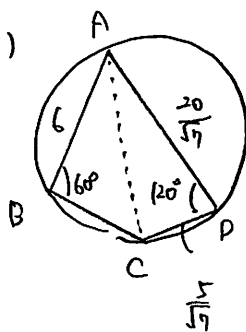
∵ x > 0 であるから

$$x = \frac{5}{\sqrt{7}}$$

∴

$$x = \frac{5}{\sqrt{7}}$$

(3)



四角形ABCDの面積を求めよ。

まず

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \quad \dots (*)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \cdot \sin 120^\circ$$

と求める。よって、BC = x とする

と求める。

△ABCにおいて、余弦定理より

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ$$

$$(5\sqrt{3})^2 = 6^2 + BC^2 - 2 \cdot 6 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$$

∴

$$BC^2 - 6BC + 36 = 75$$

$$BC^2 - 6BC - 39 = 0$$

∴

$$BC = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 4 \cdot 39}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{192}}{2}$$

$$= \frac{6 \pm 8\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3 \pm 4\sqrt{3}$$

BC > 0 ∴ BC = 3 - 4√3 は不適

$$\therefore BC = 3 + 4\sqrt{3}$$

よって (*) より S =

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (3 + 4\sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{7}} \cdot \frac{20}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} (3 + 4\sqrt{3}) + \frac{25}{7} \sqrt{3}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2} + 18 + \frac{25}{7} \sqrt{3}$$

$$= \frac{63\sqrt{3}}{14} + 18 + \frac{50}{14} \sqrt{3}$$

$$= 18 + \frac{63 + 50}{14} \sqrt{3}$$

$$= 18 + \frac{113}{14} \sqrt{3}$$

(14) (BCを求めよ)

$$\sin \angle ACB = \frac{3}{5} \quad \text{∵}$$

$$\sin^2 \angle ACB + \cos^2 \angle ACB = 1$$

$$\therefore \cos^2 \angle ACB = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{4}{5}$$

△ABCで第1余弦定理より

$$BC = AB \cdot \cos B$$

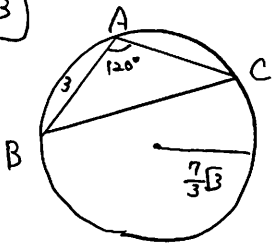
$$+ AC \cdot \cos \angle ACB$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{2} + 5\sqrt{3} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= 3 + 4\sqrt{3}$$

(14と同じ)

[3]



(1) 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore \frac{BC}{\sin 120^\circ} = 2 \cdot \frac{7}{4} \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} BC &= 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ \\ 7^2 &= 3^2 + AC^2 - 2 \cdot 3 \cdot AC \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ 49 &= 9 + AC^2 + 3AC \end{aligned}$$

$$\therefore AC^2 + 3AC - 40 = 0$$

$$(AC + 8)(AC - 5) = 0$$

$$\therefore AC = -8, 5$$

$AC > 0$ より $AC = -8$ は不適

$$\therefore AC = 5$$

(3) $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

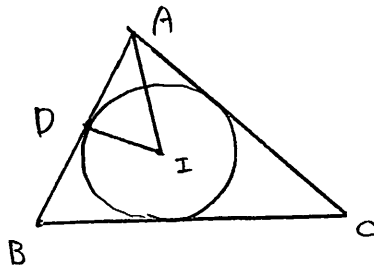
内接円の半径を r とすると

$$S = \frac{1}{2} r (AB + BC + CA)$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} r (3 + 7 + 5)$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} r \cdot 15$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



また、 I から AB に下ろした

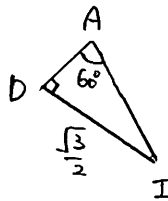
垂線と AB の交点を D

とすると、 ID の長さは内接円の半径に等しくなる。

また、 AI は $\angle A$ の二等分線

より、 $\angle A = 120^\circ$ より、 $\angle IAD = 60^\circ$

AI により 60° の二等分線が引かれる。



これは、直角三角形 AID は

$1: \sqrt{3} : 2$ の関係にある。

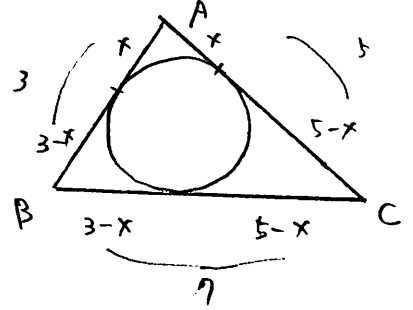
$$\frac{ID}{AI} = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \sin 60^\circ$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{AI} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AI = 1$$

((3) の別解)

$AD = AE = x$ とすると



$$\therefore (3-x) + (5-x) = 7$$

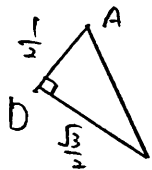
が成り立つ。

$$よって 8 - 2x = 7$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

よって、この直角三角形 AID

において ID は内接円の半径から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となる。



三平方の定理より

$$AI^2 = AD^2 + ID^2$$

$$AI^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

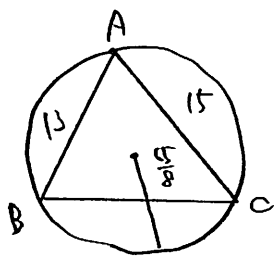
$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= 1$$

$$AI = \pm 1 \quad \text{より} \quad AI > 0$$

$$\therefore AI = 1$$

14



(1) $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

$$\therefore \frac{15}{\sin B} = 2 \cdot \frac{65}{8}$$

$$\therefore 15 = 2 \cdot \frac{65}{8} \cdot \sin B$$

$$3 = 2 \cdot \frac{13}{8} \cdot \sin B$$

$$\therefore \sin B = \frac{12}{13}$$

$$(2) \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 B = 1$$

$$\frac{144}{169} + \cos^2 B = 1$$

$$\therefore \cos^2 B = 1 - \frac{144}{169}$$

$$= \frac{25}{169}$$

$$\therefore \cos B = \pm \frac{5}{13}$$

$\therefore B$ は鋭角である。

$\cos B > 0$ である。

$$\cos B = \frac{5}{13}$$

また、 $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$15^2 = 13^2 + BC^2 - 2 \cdot 13 \cdot BC \cdot \frac{5}{13}$$

$$25 = 169 + BC^2 - 10BC$$

$$BC^2 - 10BC - 56 = 0$$

$$(BC - 14)(BC + 4) = 0$$

$$\therefore BC = 14, -4$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = 14$$

(3) $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$ より

点 D は点 A, B, C, D

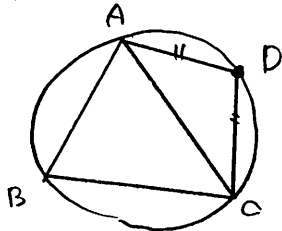
は同一円周上に存在する。

また、点 D は点 B を含む。

また、 $AC \perp BD$ である。

$DA = DC$ である。

下図のようである。



$$\therefore \cos D = \cos(180^\circ - B)$$

$$= -\cos B$$

また、 $\triangle APC$ で

余弦定理を用いると

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos D$$

$$15^2 = DC^2 + DC^2 - 2 \cdot DC \cdot DC \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$15^2 = DC^2 + DC^2 - 2DC^2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= 2DC^2 + \frac{10}{13}DC^2$$

$$= \frac{36}{13}DC^2$$

$\therefore$

$$DC^2 = \frac{13}{36} \cdot 15^2$$

$$DC = \pm \frac{\sqrt{13}}{6} \cdot 15$$

$$= \pm \frac{5}{2} \sqrt{13}$$

$$DC > 0 \text{ より } DC = \frac{5}{2} \sqrt{13}$$

$$\text{また、} \sin D = \sin(180^\circ - B)$$

$$= \sin B$$

$$= \frac{12}{13}$$

よって、四角形 $ABCD$ の

面積 S は

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin D$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 14 \cdot \frac{12}{13}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{13} \cdot \frac{5}{2} \sqrt{13} \cdot \frac{12}{13}$$

$$= 7 \cdot 12 + \frac{25}{8} \cdot 13 \cdot \frac{12}{13}$$

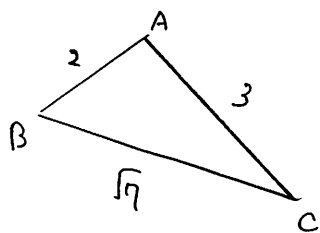
$$= 84 + \frac{75}{2}$$

$$= \frac{168 + 75}{2}$$

$$= \frac{243}{2}$$

$$= \frac{243}{2}$$

(15)



(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

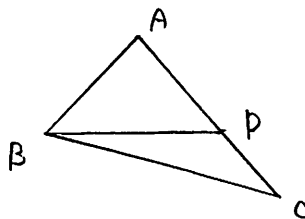
$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{4 + 9 - 7}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{6}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ において $\cos A = \frac{1}{2}$

を満たすのは $A = 60^\circ$

(2) $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$



すなわち $\triangle ABC$ の面積が $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ である

$\triangle BCD$ の面積が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ である

$$\begin{aligned}\triangle ABD &= \triangle ABC - \triangle BCD \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

よって $\triangle ABD : \triangle BCD = \sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 : 1$

今、 AC を底辺と見て考えると

$\triangle ABD : \triangle BCD$ は

$AD : DC =$ 等高線の比

$$AD : DC = 2 : 1$$

よって $AC = 3$ より $AD = 2$ であるから $CD = 1$

(2) の別解

$AC = 3$ より $AD = 3 - CD$ とおくと

先ず $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ は $\triangle ABC$ の面積が

$\sqrt{3}$ であることは確かである。よって

$\triangle ABD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin A$$

で表すことができる

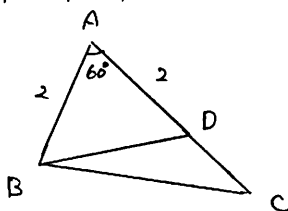
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (3 - CD) \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$(3 - CD) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$(3 - CD) \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$3 - CD = 2 \quad \therefore CD = 1$$

(3) (2) より $CD = 1$ より $AD = 2$ である



また $AB = 2$ 、 $\angle A = 60^\circ$ より

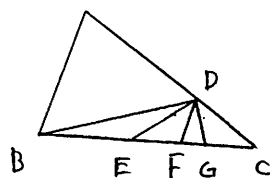
$\triangle ABC$ は正三角形であることは確かである

よって $\angle BDC = 180^\circ - 60^\circ$

より $\angle BDC = 120^\circ$ である

よって $\angle BDC$ を 4 等分すると

1 つの角度は 30° である



よって DG は $\angle BDC$ の二等分線

$$\triangle DBG + \triangle DGC = \triangle DBC$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot DB \cdot DG \cdot \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot DG \cdot DC \cdot \sin 30^\circ \\ = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC \cdot \sin 120^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot DG \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot DG \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$DG + \frac{1}{4} DG = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{5}{4} DG = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$DG = \frac{2}{5} \sqrt{3}$$

線分 DF も同様にして

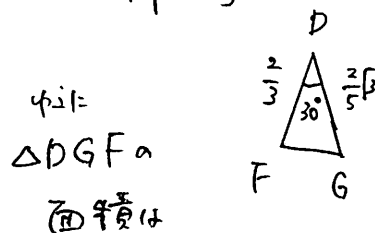
$$\triangle DBF + \triangle DFC = \triangle DBC$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot DB \cdot DF \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot DF \cdot DC \cdot \sin 60^\circ \\ = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DC \cdot \sin 120^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot DF \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot DF \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$2DF + DF = 2$$

$$DF = \frac{2}{3}$$

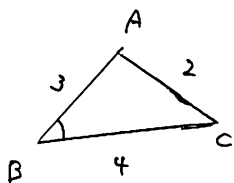


$$\triangle DGF = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot DG \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{15} \sqrt{3}$$

16



(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{9 + 16 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{21}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{7}{8}\end{aligned}$$

(2) $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\sin^2 B + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 B = 1 - \frac{49}{64}$$

$$= \frac{15}{64}$$

より $\sin B = \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\therefore 0^\circ < B < 180^\circ$ より

$$\sin B > 0 \text{ より}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{15}}{8} \text{ である。}$$

よって $\triangle ABC$ の面積 S_1 は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$= \frac{3}{4} \sqrt{15}$$

また $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R$$

$$\frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = 2R$$

$$\therefore 2R = 2 \div \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$= 2 \times \frac{8}{\sqrt{15}}$$

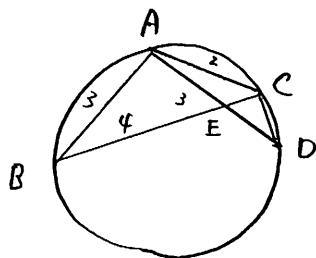
$$= \frac{16}{\sqrt{15}}$$

$$\therefore R = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15}$$

(3) 最大角は A である

$$\cos A = \frac{3^2 + 2^2 - 4^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = -\frac{3}{4} < 0$$

よって A は鈍角である。



$\angle ABC$ と $\angle ADC$ は円周角である

$$\angle ABC = \angle ADC$$

また $\angle ABE$ と $\angle CDE$ は対頂角である

$$\cos \angle APC = \cos B = \frac{7}{8}$$

よって $\triangle ACD$ で余弦定理より

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \angle ADC$$

$$2^2 = 3^2 + CD^2 - 2 \cdot 3 \cdot CD \cdot \frac{7}{8}$$

$$4 = 9 + CD^2 - \frac{21}{4} CD$$

$$CD^2 - \frac{21}{4} CD + 5 = 0$$

$$4CD^2 - 21CD + 20 = 0$$

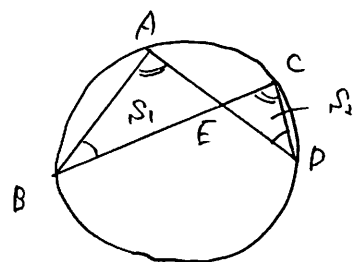
$$(4CD - 5)(CD - 4) = 0$$

$$\therefore CD = \frac{5}{4} \text{ 又は } 4$$

$\therefore CD < 4$ であるから

$$CD = \frac{5}{4}$$

また $\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ は相似である



$\angle BAC$ と $\angle BDC$ は円周角である

$$\angle ABE = \angle EDC$$

$\angle ABD$ と $\angle ACD$ は円周角である

$$\angle BAE = \angle ECD$$

よって

$\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ は相似である。

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} \text{ とは面積比 } S_1 : S_2$$

$$S_1 : S_2 = 1 : 5$$

相似な図形の面積比は相似比の二乗である。

$\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ の

相似比は $AB : CD$

$$1 : 5$$

$$AB : CD = 3 : \frac{5}{4}$$

$$= 12 : 5$$

よって $S_1 : S_2 = 12^2 : 5^2$

は

$$S_1 : S_2 = 144 : 25$$

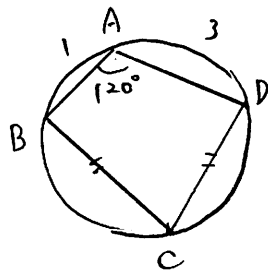
よって

$$144 S_2 = 25 S_1$$

よって

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{144}{25}$$

(17)

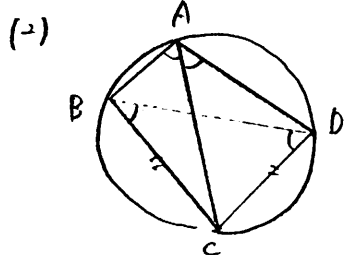
(1) $\triangle ABD$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 120^\circ \\ &= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 1 + 9 + 3 = 13 \end{aligned}$$

$$BD > 0 \text{ より } BD = \sqrt{13}$$

また $\triangle ABD$ で正弦定理より

$$2R = \frac{BD}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \therefore R = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

 $\triangle BCD$ について $\angle BAD = 120^\circ$ で四角形 $ABCD$ が

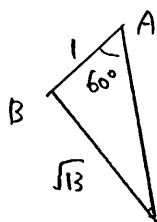
円に内接しているから

 $\angle BCD = 60^\circ$ である。また $BC = CD$ より $\triangle BCD$ は

二等辺三角形である。

 $\angle BCD = 60^\circ$ であるから $\angle CBD = \angle CDB = 60^\circ$ である。結局 $\triangle BCD$ は正三角形である。(1) より $BD = \sqrt{13}$ より $BC \neq CD \neq \sqrt{13}$ である。

また

3点 B, C, D は外接円の中心 $\angle BDC = \angle BAC = 60^\circ$ であるから $\angle BAC = 60^\circ$ である。 60° であるから AC は $\angle BAD$ の二等分線である。(3)ゆえに $\triangle ABC$ は

余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

$$(\sqrt{13})^2 = 1^2 + AC^2 - 2 \cdot 1 \cdot AC \cdot \frac{1}{2}$$

$$AC^2 - AC - 12 = 0$$

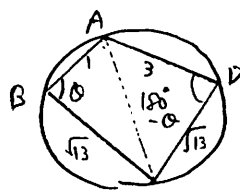
$$(AC - 4)(AC + 3) = 0$$

$$AC = 4, -3$$

 $AC > 0$ より

$$AC = 4$$

(2) の別解

 $AB = 1, BC = CD = \sqrt{13}, DA = 3$  $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$AC^2 = 1^2 + (\sqrt{13})^2 - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{13} \cdot \cos \theta$$

$$\therefore AC^2 = 14 - 2\sqrt{13} \cos \theta \quad \dots ①$$

 $\triangle ACD$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= (\sqrt{13})^2 + 3^2 - 2 \cdot \sqrt{13} \cdot 3 \cdot \cos(180^\circ - \theta) \\ &= 13 + 9 - 6\sqrt{13}(-\cos \theta) \end{aligned}$$

$$\therefore AC^2 = 22 + 6\sqrt{13} \cos \theta \quad \dots ②$$

① + ② より

$$3AC^2 = 42 - 6\sqrt{13} \cos \theta$$

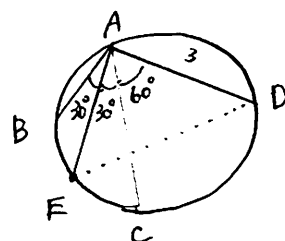
$$+) AC^2 = 22 + 6\sqrt{13} \cos \theta$$

$$4AC^2 = 64$$

$$AC^2 = 16$$

 $\therefore AC > 0$ より

$$AC = 4$$

 $\angle BAE = \angle CAE = 30^\circ$ である。よって $\angle EAD = 90^\circ$ である。線分 ED は円の直径である。ゆえに $\triangle ABC$ で

正弦定理より

$$\frac{BD}{\sin 120^\circ} = 2R = ED$$

$$\therefore ED = \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

ゆえに $\triangle AED$ で

三平方の定理より

$$ED^2 = AE^2 + AD^2$$

$$\left(\frac{2\sqrt{13}}{3}\right)^2 = AE^2 + 3^2$$

$$\frac{4 \cdot 13}{9} = AE^2 + 9$$

$$AE^2 = \frac{52}{9} - 9 = \frac{25}{9}$$

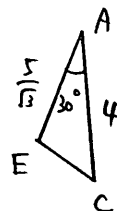
 $\therefore AE > 0$ より

$$AE = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$$

ゆえに

 $\triangle AEC$ の

面積は



$$\triangle AEC = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AC \cdot \sin 30^\circ$$

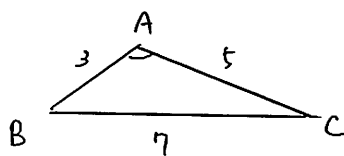
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$= \frac{5}{3}$$

$$\frac{5}{3}$$

18



よって三平方の定理より

$$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

が成り立つ。よって

ADは直径より $R =$

より

$$AD = 2R$$

$$= 2 \cdot \frac{7}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{14}{3}\sqrt{3}$$

(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$= \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= \frac{9 + 25 - 49}{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

$$= \frac{-15}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $A = 120^\circ$

よって $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

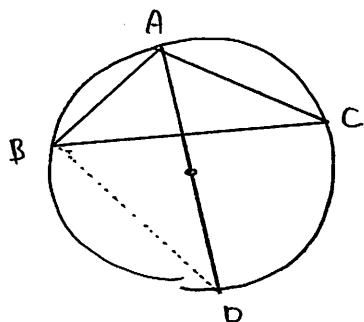
(2) $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$2R = \frac{BC}{\sin A}$$

$$2R = \frac{7}{\sin 120^\circ}$$

$$2R = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$$



よって $\triangle ABD$ は直角三角形。

ADが直径であり、

$\angle ABD$ は直径に接する角である。

1) $\triangle ADC$ は直角三角形

(2) $\triangle ABC$ は直角三角形

直角三角形であるから

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

が成り立つ。よって

$$\left(\frac{14}{3}\sqrt{3}\right)^2 = 5^2 + CD^2$$

$$CD^2 = \frac{196}{3} - 25$$

$$= \frac{196}{3} - \frac{75}{3}$$

$$= \frac{121}{3}$$

$$\therefore CD = \pm \sqrt{\frac{121}{3}} = \pm \frac{11}{\sqrt{3}}$$

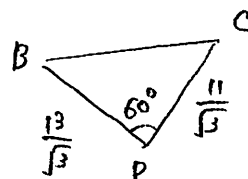
$$CD > 0 \text{ より } CD = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

よって、四角形 ABCD は

(1) 内接四角形

$\angle BAC = 120^\circ$ より

$\angle BDC = 60^\circ$ である。



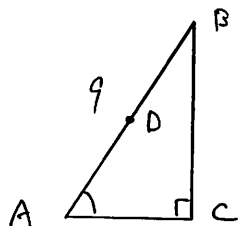
よって $\triangle BCD$ の面積 S は

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{\sqrt{3}} \cdot \frac{11}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{143\sqrt{3}}{12}$$

19



(1) $\triangle ABC$ において、 $\angle C = 90^\circ$ と仮定する

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AB} = \cos A$$

仮定より、 $AD = 9$

$$\frac{AC}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore AC = 9 \cdot \frac{1}{3} = 3$$

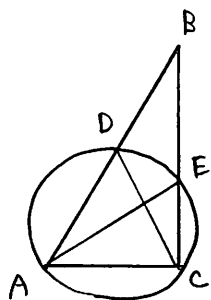
また $\triangle ACD$ において、余弦定理より

$$\begin{aligned} CD^2 &= AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 9^2 + 3^2 - 2 \cdot 9 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 25 + 9 - 18 \\ &= 16 \end{aligned}$$

$$CD = \pm \sqrt{16} = \pm 4$$

$$CD > 0 \text{ より } CD = 4$$

(2)



$\angle C = 90^\circ$ と仮定する

AE は円の直径

直径に垂直

より $\triangle ACP$ において

正弦定理より

$$\frac{CD}{\sin A} = 2R = AE \quad (*)$$

(直径)

仮定より、

$$\therefore \cos A = \frac{1}{3}$$

仮定より、

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sin^2 A + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin A > 0 \text{ より}$$

$$\sin A = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

より (*) より

$$AE = \frac{CD}{\sin A}$$

$$= \frac{4}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$= 3$$

(3)

① ② ③ $ADEC$ は

④ $\angle A + \angle DEC = 180^\circ$

$$\angle A + \angle DEC = 180^\circ$$

仮定より、

$$\sin \angle DEC = \sin (180^\circ - A)$$

$$= \sin A$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

と仮定する。また $\triangle ACE$

において、 $\angle C = 90^\circ$ より

三平方の定理より

$$AE^2 = AC^2 + CE^2$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 3^2 + CE^2$$

$$\therefore CE^2 = 27 - 9$$

$$= 18$$

$$CE > 0 \text{ より}$$

$$CE = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

同様にして $\triangle AED$ において

AE は直径より

$$\angle ADE = 90^\circ \text{ と仮定する}$$

よって、三平方の定理より

$$AE^2 = AD^2 + DE^2$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 9 + DE^2$$

$$DE^2 = 27 - 9$$

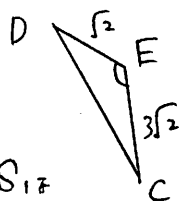
$$= 18$$

$$DE > 0 \text{ より } DE = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

① ② ③

$\triangle CDE$ の

面積 S は

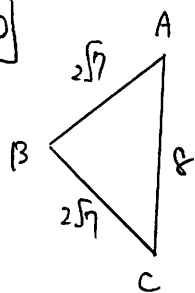


$$S = \frac{1}{2} \cdot DE \cdot EC \cdot \sin \angle DEC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

20



(1) 余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{(2\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 8^2}{2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7}} \\ &= \frac{28 + 28 - 64}{2 \cdot 28} \\ &= -\frac{8}{2 \cdot 28} \\ &= -\frac{1}{7}\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\sin^2 B + \cos^2 B &= 1 \\ \sin^2 B + \left(-\frac{1}{7}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2 B &= 1 - \frac{1}{49} \\ &= \frac{48}{49}\end{aligned}$$

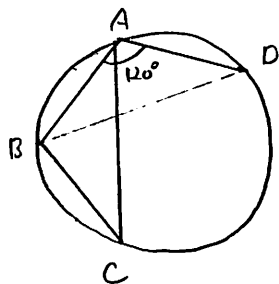
$\therefore 0^\circ < B < 180^\circ$ より
 $\sin B > 0$ より

$$\begin{aligned}\sin B &= \sqrt{\frac{48}{49}} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{7}\end{aligned}$$

よって $\triangle ABC$ の正弦定理より

$$2R = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\begin{aligned}2R &= \frac{8}{\frac{4\sqrt{3}}{7}} \\ &= 8 \cdot \frac{7}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{3}} \\ \therefore R &= \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$



また $\triangle BAD$ において

正弦定理より

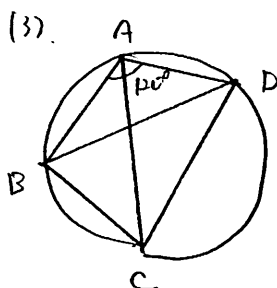
$$2R = \frac{BD}{\sin \angle BAD}$$

$$2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} = \frac{BD}{\sin 120^\circ}$$

$$\therefore BD = 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 7$$

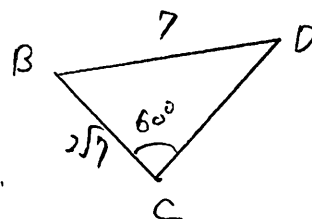


四角形 ABCD は

(2) 1 = 1 (7 2)

$$\angle BAD = 120^\circ \text{ より } \angle BCD = 60^\circ$$

よって



また

$CD \propto \frac{1}{\sin 60^\circ}$

よって $CD = 7$

$\triangle BCD \propto$ 面積 S のとき $S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ$

$\triangle BCD$ の余弦定理より

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos 60^\circ$$

$$7^2 = (2\sqrt{7})^2 + CD^2 - 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot CD \cdot \frac{1}{2}$$

$$49 = 28 + CD^2 - 2\sqrt{7}CD$$

$$CD^2 - 2\sqrt{7}CD - 21 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2\sqrt{7} & -21 \\ 1 & -21 & -2\sqrt{7} \end{array} \right)$$

$$(CD + \sqrt{7})(CD - 3\sqrt{7}) = 0$$

$$\therefore CD = -\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$$

$$CD > 0 \text{ より } CD = 3\sqrt{7}$$

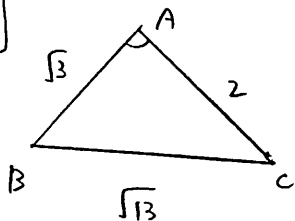
よって $\triangle BCD$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{21\sqrt{3}}{2}$$

21

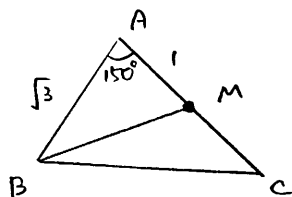


(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{(\sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2} \\ &= \frac{3 + 4 - 13}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2} \\ &= \frac{-6}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ より $\angle BAC = 150^\circ$

(2)



$\triangle ABM$ の面積

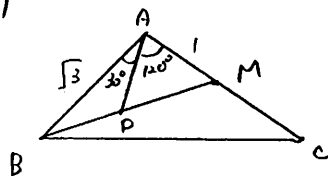
$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AM \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sin 150^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

また、 $\triangle ABM$ で余弦定理より

$$\begin{aligned}BM^2 &= AB^2 + AM^2 - 2 \cdot AB \cdot AM \cdot \cos 150^\circ \\ &= (\sqrt{3})^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 3 + 1 + 3 \\ &= 7\end{aligned}$$

$BM > 0$ より $BM = \sqrt{7}$

(3)



$\triangle ABM$ の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABM = \triangle ABD + \triangle AMD$

が成り立つ。

$\triangle ABM$ の面積は (2) より $\frac{\sqrt{3}}{4}$

であるから、

$\triangle ABM = \triangle ABD + \triangle AMD$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AM \cdot \sin 120^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot AD \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} AD + \frac{\sqrt{3}}{4} AD$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} AD$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}$$

また、 $\triangle ABM$ の面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\triangle ABM = \triangle DBA + \triangle DAM$

が成り立つ。

$$\triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DA \cdot \sin \angle ADB + \frac{1}{2} \cdot DM \cdot DA \cdot \sin \angle ADM \quad (*)$$

が成り立つ。 $\therefore$

$$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADM$$

であるから、

$$\sin \angle ADB = \sin (180^\circ - \angle ADM)$$

$$= \sin \angle ADM$$

が成り立つ。 $\therefore (*)$ より

$$\triangle ABM = \frac{1}{2} \cdot DB \cdot DA \cdot \sin \angle ADM$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot DM \cdot DA \cdot \sin \angle ADM$$

$$= \frac{1}{2} \cdot DA \cdot \sin \angle ADM (DB + DM) \quad (**)$$

と成り立つ。

$DB + DM$ は BM の

二等分点

$$DB + DM = BM = \sqrt{7}$$

が成り立つ。

よって $DA = \frac{1}{2}$ である。

$$\triangle ABM = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ である。}$$

(*) より

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle ADM \sqrt{7}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4} \sin \angle ADM$$

$\therefore$

$$\sqrt{7} \sin \angle ADM = \sqrt{3}$$

$$\sin \angle ADM = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{7}$$

(*) のより

$$AD = \frac{1}{2} \text{ である。}$$

余弦定理より

$$\begin{aligned}DM^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore DM = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$\triangle ADM$ で正弦定理より

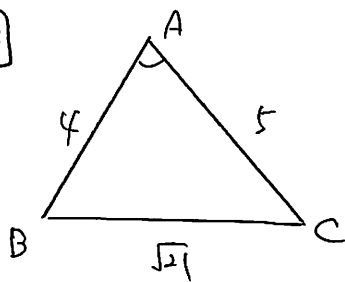
$$\frac{AM}{\sin \angle ADM} = \frac{DM}{\sin 60^\circ}$$

$$\frac{1}{\sin \angle ADM} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore \sin \angle ADM = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

である。

22



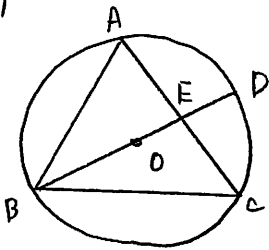
(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{4^2 + 5^2 - (\sqrt{11})^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{16 + 25 - 11}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{20}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ より

$$\angle BAC = 60^\circ$$

(2)



$\triangle ABC$ で正弦定理より

$$2R = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{\sqrt{11}}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{11}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \sqrt{11} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= 2\sqrt{7} \end{aligned}$$

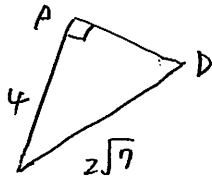
$$\therefore R = \sqrt{7}$$

また、BD は直径より、

$$BD = 2R = 2\sqrt{7}$$

よって、 $\triangle ABD$ は $\angle BAD = 90^\circ$

の直角三角形となる。



三平方の定理より

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$(2\sqrt{7})^2 = 4^2 + AD^2$$

$$28 = 16 + AD^2$$

$$\therefore AD^2 = 12$$

$$AD > 0 \text{ より } AD = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

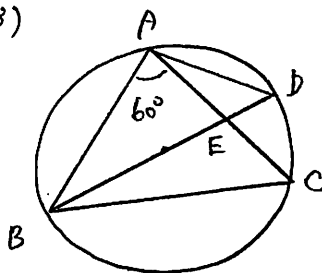
よって $\triangle ABD$ の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

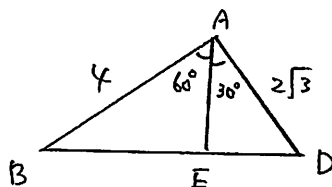
(3)



$\angle BAD = 90^\circ$ ではない。また、

(1) より $\angle BAC = 60^\circ$ であり

$\angle CAD = 30^\circ$ である。



よって面積 S_2 は

$$\triangle ABD = \triangle ABE + \triangle ADE$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE \cdot \sin 60^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \cdot \sin 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot AE \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$4\sqrt{3} = \sqrt{3}AE + \frac{\sqrt{3}}{2}AE$$

$$4\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}AE$$

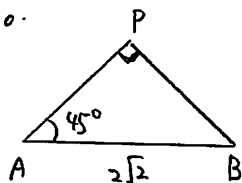
$$8\sqrt{3} = 3\sqrt{3}AE$$

$$\therefore AE = \frac{8}{3}$$

23

(1) ABが直径であるので、

$\angle APB = 90^\circ$, $\angle AQB = 90^\circ$
である。



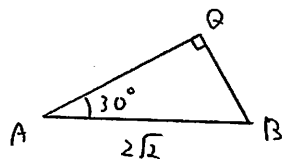
$\triangle PAB$ は、

二等辺三角形は、直角二等辺三角形

より $AP : AB = 1 : \sqrt{2}$

$AP : 2\sqrt{2} = 1 : \sqrt{2}$

$\therefore AP = 2$



$\triangle QAB$ は、

$AQ : AB = \sqrt{3} : 2$

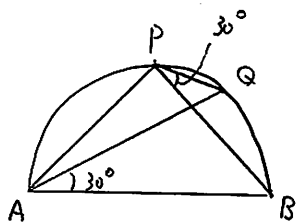
より

$AQ : 2\sqrt{2} = \sqrt{3} : 2$

$2AQ = 2\sqrt{6}$

$\therefore AQ = \sqrt{6}$

(2)



$\triangle ABQ$ は、 $\triangle APB$ と相似

$\angle QAB = \angle QPB$

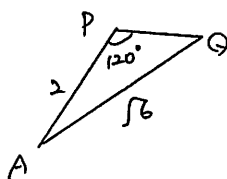
が成り立つ。

より $\angle QPB = 30^\circ$ である。

また $\angle APB = 90^\circ$ より

$\angle APQ = 120^\circ$ である。

$\triangle APQ$ に余弦定理より



$$AQ^2 = AP^2 + PQ^2 - 2 \cdot AP \cdot PQ \cdot \cos 120^\circ$$

$$(\sqrt{6})^2 = 2^2 + PQ^2 - 2 \cdot 2 \cdot PQ \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$6 = 4 + PQ^2 + 2PQ$$

$$PQ^2 + 2PQ - 2 = 0$$

2次方程式の解より

$$PQ = -1 \pm \sqrt{1+2}$$

$$= -1 \pm \sqrt{3}$$

$$PQ > 0 \text{ より } PQ = -1 + \sqrt{3} \text{ ではない}$$

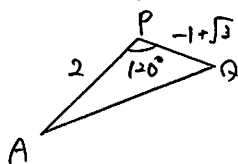
$$\therefore PQ = -1 + \sqrt{3}$$

(3)

$\triangle ABQ$ と $\triangle APB$ は

$\triangle APQ$ と $\triangle AQB$

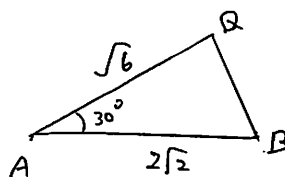
の相似である。



$$\triangle APQ = \frac{1}{2} \cdot AP \cdot PQ \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3}{2}$$



$\triangle AQB$

$$= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot AB \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

より、

$\triangle APQ$ と $\triangle AQB$ は相似

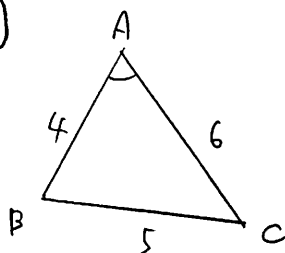
$$= \triangle APQ + \triangle AQB$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3}{2} + \sqrt{3}$$

$$= \frac{-\sqrt{3} + 3 + 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

(24)

(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$$

$$= \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{16 + 36 - 25}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{27}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{9}{16}$$

$$\sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC = 1 \text{ より}$$

$$\sin^2 \angle BAC + \left(\frac{9}{16}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \angle BAC = 1 - \frac{81}{256}$$

$$= \frac{175}{256}$$

...

$$\sin \angle BAC = \pm \sqrt{\frac{175}{256}}$$

$$= \pm \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin \angle BAC > 0$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

(2) $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$2R = \frac{BC}{\sin \angle BAC}$$

$$\begin{aligned} \therefore 2R &= \frac{5}{\frac{5\sqrt{7}}{16}} \\ &= 5 \times \frac{16}{5\sqrt{7}} \\ &= \frac{16}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

$$\therefore 2R = \frac{16}{\sqrt{7}} \text{ より}$$

$$R = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

また、

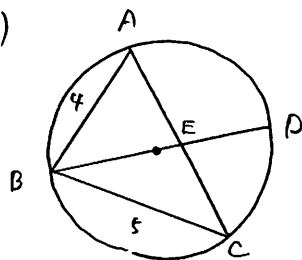
 $\triangle ABC$ の面積

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$= \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

(3)



BD が直径であることが、

 $\triangle ABD$ は $\angle BAD = 90^\circ$ の

直角三角形となる。

また、この円の半径が $R = \frac{8}{\sqrt{7}}$

より直径の長さは

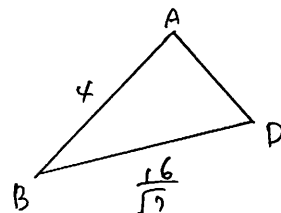
$$2R = \frac{8}{\sqrt{7}} \times 2 = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

BD も直径であることが、

$$BD = \frac{16}{\sqrt{7}}$$

である。よって、 $\triangle ABD$ は、

三平方の定理から、



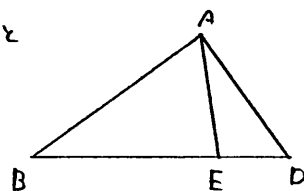
$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$4^2 + AD^2 = \left(\frac{16}{\sqrt{7}}\right)^2$$

$$\begin{aligned} AD^2 &= \frac{256}{7} - 16 \\ &= \frac{256 - 112}{7} = \frac{144}{7} \end{aligned}$$

$$AD > 0 \text{ より } AD = \sqrt{\frac{144}{7}} = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore AD = \frac{12}{\sqrt{7}}$$

また、 $\triangle BAD$ は、 BD が直径と、
なると

$$BE : ED = \triangle ABE : \triangle AED \dots (*)$$

である。

$$\triangle ABE = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE \cdot \sin \angle BAE$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AE \cdot \sin \angle BAC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AE \cdot \frac{5\sqrt{7}}{16}$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{8} AE$$

$$\triangle AED = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \cdot \sin \angle EAD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot \sin \angle EAD \dots (**)$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ \text{ より}$$

$$\angle EAD = 90^\circ - \angle BAE$$

よって

$$\sin \angle EAD = \sin(90^\circ - \angle BAE)$$

$$(\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta) \text{ より } = \cos \angle BAE$$

$$= \cos \angle BAC = \frac{9}{16}$$

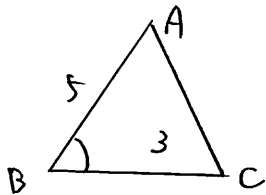
よって (*) より

$$\triangle AED = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \frac{12}{\sqrt{7}} \cdot \frac{9}{16} = \frac{27\sqrt{7}}{56} AE$$

(*) に代入して

$$BE : ED = \frac{5\sqrt{7}}{8} AE : \frac{27\sqrt{7}}{56} AE = \frac{5}{8} : \frac{27}{56} = 35 : 27$$

25



(1) $\triangle ABC$ について、余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC \\ &= 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 25 + 9 - 10 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$AC > 0$ より $AC = \underline{2\sqrt{6}}$

(2) $\cos \angle ABC = \frac{1}{3}$ より

$$\sin^2 \angle ABC + \cos^2 \angle ABC = 1$$

$$\sin^2 \angle ABC + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2 \angle ABC = 1 - \frac{1}{9}$$

$$= \frac{8}{9}$$

$$\therefore \sin \angle ABC = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow 0^\circ < \angle ABC < 180^\circ \text{ より}$$

$$\sin \angle ABC > 0 \text{ となる}$$

$$\sin \angle ABC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって

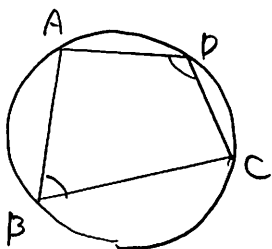
$\triangle ABC$ の面積

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \triangle ABC \text{ について、正弦定理より}$$

$$= \underline{5\sqrt{2}}$$

(3)



$\triangle ABC$ について、正弦定理より

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$= 2\sqrt{6} \times \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$2R = 3\sqrt{3} \text{ より}$$

$$R = \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

が成り立つ。

一方、 $\triangle ACD$ について、余弦定理より

用いると

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \cdot CD \cdot DA \cdot \cos \angle CDA$$

$\Rightarrow$

$$\cos \angle CDA = \cos (180^\circ - \angle ABC)$$

$$CD = x, DA = y \text{ とおく。}$$

(2) より $\triangle ABC$ の面積は $5\sqrt{2}$

であり、条件から $\triangle ACD$ の

面積は $\triangle ABC$ の $\frac{3}{5}$ より

$$\triangle ACD = \frac{3}{5} \triangle ABC$$

$$= \frac{3}{5} \cdot 5\sqrt{2}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

また、 $\triangle ACD$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \cdot \sin \angle CDA \dots (*)$$

が成り立つから、四角形

$ABCD$ は円に内接する。

$$\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$$

$\therefore$

$$\sin \angle CDA = \sin (180^\circ - \angle ABC)$$

$$= \sin \angle ABC$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ゆえに (*) より

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} xy$$

が成り立つ。 $\Rightarrow \triangle ACD$ の

面積は $3\sqrt{2}$ より、

$$\frac{\sqrt{2}}{3} xy = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore xy = 9 \dots (**)$$

$$= -\cos \angle ABC$$

$$= -\frac{1}{3}$$

より、(*) より

$$(2\sqrt{6})^2 = x^2 + y^2 - 2xy \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$24 = x^2 + y^2 + \frac{2}{3}xy$$

$$(**) \text{ より } xy = 9 \text{ より}$$

$$24 = x^2 + y^2 + \frac{2}{3} \cdot 9$$

$$24 = x^2 + y^2 + 6$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 18 \dots (***)$$

$\Rightarrow$ (*) より

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

とすると

$$(x+y)^2 - 2xy = 18$$

(*) より (*) より

$$(x+y)^2 - 2 \cdot 9 = 18$$

$$\therefore (x+y)^2 = 36$$

$$x+y > 0 \text{ より } x+y = 6$$

よって $x = CD, y = DA$ より

$$CD + DA = 6$$

$$\Rightarrow AB = 5, BC = 3$$

より、四角形 $ABCD$ の

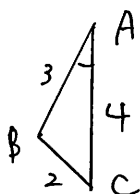
周の長さは

$$AB + BC + CD + DA$$

$$= 5 + 3 + 6$$

$$= \underline{14}$$

26



(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{9 + 16 - 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{21}{2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{7}{8}\end{aligned}$$

(2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

より $\sin^2 \theta + \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 1$

$$\sin^2 \theta + \frac{49}{64} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 \theta &= 1 - \frac{49}{64} \\ &= \frac{15}{64}\end{aligned}$$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より

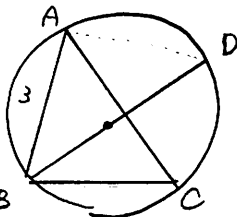
$\sin \theta > 0$ かつ

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

よって $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\begin{aligned}2R &= \frac{BC}{\sin \angle BAC} \\ &= \frac{BC}{\sin \theta} \\ &= \frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{8}} = \frac{16}{\sqrt{15}}\end{aligned}$$

$$\therefore 2R = \frac{16}{\sqrt{15}} \text{ より } R = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{8}{15}\sqrt{15}$$



また、BD は直径と仮定

$$BD = 2R = 2 \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

また、 $\triangle ABD$ において

BD が直径であるから

$\angle BAD = 90^\circ$ と仮定

よって、三平方の定理より

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$\left(\frac{16}{\sqrt{15}}\right)^2 = 3^2 + AD^2$$

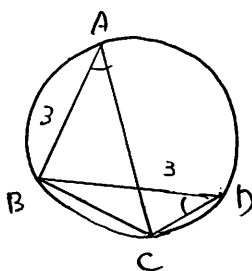
$$AD^2 = \frac{256}{15} - 9$$

$$= \frac{256 - 135}{15}$$

$$= \frac{121}{15}$$

$$\therefore AD > 0 \text{ より } AD = \frac{11}{\sqrt{15}} = \frac{11}{15}\sqrt{15}$$

(3)



条件より $BD = 3$ である。

よって、D は 3 点 A, B, C とは

異なる点である。BA=3 であるから

点 D は点 A の位置で

よいが、上記条件より、点 D は

A と異なり、上図の位置にある。

よって、弦 BC の円周角より

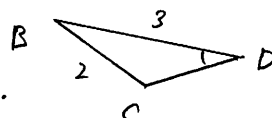
$$\angle BAC = \angle BDC$$

$$\therefore \cos \angle BCD = \cos \angle BAC$$

$$= \cos \theta$$

$$= \frac{7}{8}$$

また、 $\triangle BCD$ で余弦定理より



$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cdot \cos \angle BDC$$

$$2^2 = 3^2 + CD^2 - 2 \cdot 3 \cdot CD \cdot \frac{7}{8}$$

$$CD^2 - \frac{21}{4}CD + 5 = 0$$

$$4CD^2 - 21CD + 20 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & -21 & 20 \\ 1 & -5 & -5 \end{array} \right)$$

$$(4CD - 5)(CD - 4) = 0$$

$$\therefore CD = \frac{5}{4}, 4$$

よって、D は点 A と異なる。

つまり、CA=4 であり、仮定より

CD=4 と仮定は一致する。

$$\therefore CD = \frac{5}{4}$$

よって、

$$\sin \angle BDC = \sin \angle BAC$$

$$= \sin \theta$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{8}$$

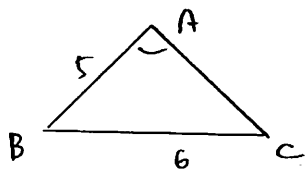
より

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot CD \cdot \sin \angle BDC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$= \frac{15}{64}\sqrt{15}$$

27



$$(1) \cos A = \frac{1}{8} \text{ である}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sin^2 A + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{1}{64}$$

$$= \frac{63}{64}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ である} \Rightarrow \sin A > 0$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{63}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする

$$2R = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\therefore 2R = \frac{6}{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

$$= 6 \times \frac{8}{3\sqrt{7}}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore R = \frac{8}{\sqrt{7}} = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

(3) $\triangle ABC$ の余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$6^2 = 5^2 + AC^2 - 2 \cdot 5 \cdot AC \cdot \frac{1}{8}$$

$$36 = 25 + AC^2 - \frac{5}{4}AC$$

$$AC^2 - \frac{5}{4}AC - 11 = 0$$

$$4AC^2 - 5AC - 44 = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 4 & \times & 11 \rightarrow 11 \\ 1 & \times & -4 \rightarrow -16 \end{array} \right)$$

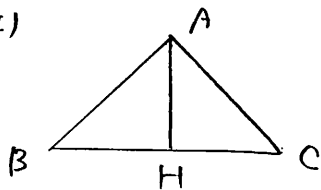
$$(4AC + 11)(AC - 4) = 0$$

$$AC = -\frac{11}{4}, 4$$

$$\therefore AC > 0 \text{ である}$$

$$AC = 4$$

(4)



$\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$\text{と } \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

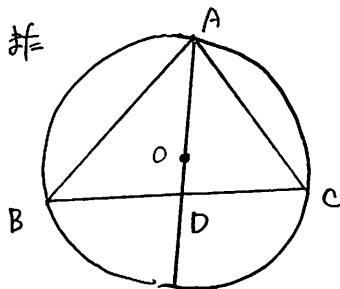
の2通りで表わすことができる。よって

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

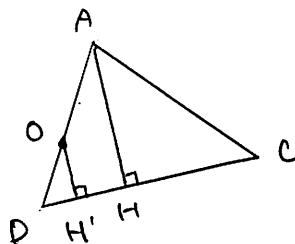
$$3AH = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore AH = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$



OがBCに垂直なF3L

BCの交点をH'と仮定する。



$\triangle DOH'$ と $\triangle DAH$ は相似になる

$$DA : DO = AH : OH' \dots (*)$$

$$\text{が成り立つ。よって } AH = \frac{5\sqrt{7}}{4} \text{ である}$$

OH' の長さを求める。

$\triangle OBC$ について

OH' は円の中心から BC へ下ろした垂線

である。H'はBCの中点である。

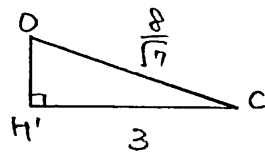
$$\text{よって } CH' = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3 \text{ である}$$

また、OCは $\triangle ABC$ の外接円の半径に等しい。

よって

$$OC = R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

である。よって直角三角形 $OH'C$ において



三平方の定理より

$$OH'^2 + H'C^2 = OC^2$$

$$OH'^2 + 3^2 = \left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2$$

$$OH'^2 = \frac{64}{7} - 9 = \frac{1}{7}$$

$$\therefore OH' > 0 \text{ である} \Rightarrow OH' = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

よって (*) に代入して

$$DA : DO = AH : OH'$$

$$AD : OD = \frac{5\sqrt{7}}{4} : \frac{1}{\sqrt{7}}$$

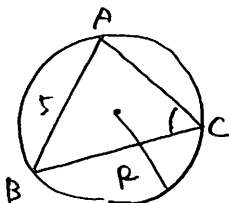
$$= \frac{5}{4} \cdot 7 : 1$$

$$= 35 : 4$$

$$35OD = 4AD$$

$$\therefore \frac{OD}{AD} = \frac{4}{35}$$

28



(1) $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R$$

$$\text{より } \frac{5}{\sin C} = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$5 = \frac{14}{\sqrt{3}} \sin C$$

$$\text{よって } \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

(2)

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1$$

$$\left(\frac{5\sqrt{3}}{14}\right)^2 + \cos^2 C = 1$$

$$\cos^2 C = 1 - \frac{25 \cdot 3}{14^2}$$

$$= 1 - \frac{75}{196}$$

$$= \frac{121}{196}$$

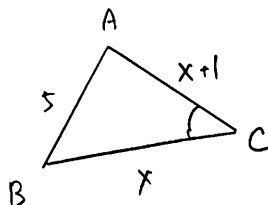
$$\therefore \cos C = \pm \frac{11}{14}$$

$\therefore \triangle ABC$ は鋭角三角形より

$$0^\circ < C < 90^\circ \text{ より } \cos C > 0$$

$$\therefore \cos C = \frac{11}{14}$$

よって



$\triangle ABC$ で余弦定理より

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2 \cdot BC \cdot CA \cdot \cos C$$

$$5^2 = x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) \cdot \frac{11}{14}$$

$$25 = x^2 + x^2 + 2x + 1 - (x^2 + x) \cdot \frac{11}{7}$$

全体に7をかける

$$175 = 14x^2 + 14x + 7 - 11(x^2 + x)$$

$$175 = 3x^2 + 3x + 7$$

$$3x^2 + 3x - 168 = 0$$

$$x^2 + x - 56 = 0$$

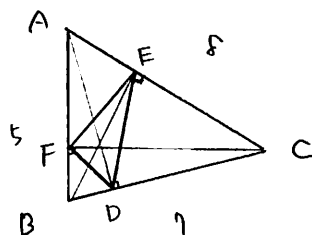
$$(x+8)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -8, 7$$

$$\therefore x > 0 \text{ より } x = 7$$

(3) (2) より $x = 7$ より

$$BC = 7, CA = 7 + 1 = 8$$



正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin B} = 2R \therefore \frac{8}{\sin B} = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

また

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B$$

$$= 1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{48}{49} = \frac{1}{49}$$

鋭角三角形より $\cos B > 0$ より

$$\cos B = \frac{1}{7}$$

同様にして 正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$\frac{7}{\sin A} = 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$$

$$\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A \text{ は鋭角より } A = 60^\circ$$

以下、線分の長さを求めていく。

直角三角形ADCより

$$\frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{1+2^2}}{\sqrt{1+2^2}} = \cos C$$

$$\therefore CD = AC \cos C = 8 \cdot \frac{11}{14} = \frac{44}{7}$$

同様にして $\triangle ADB$ より

$$\frac{BD}{AB} = \cos B \therefore BD = AB \cos B$$

$$\triangle CFA \text{ より } \frac{AF}{CA} = \cos A \therefore AF = CA \cos A$$

$$= 8 \cdot \cos 60^\circ = 4$$

$\triangle CFB$ より

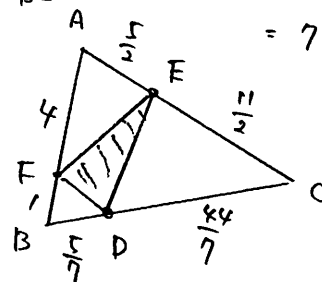
$$\frac{FB}{CB} = \cos B \therefore FB = CB \cos B = 7 \cdot \frac{1}{7} = 1$$

$\triangle BEA$ より

$$\frac{AE}{BA} = \cos A \therefore AE = BA \cos A = 5 \cdot \cos 60^\circ = \frac{5}{2}$$

$\triangle BEC$ より

$$\frac{CE}{BC} = \cos C \therefore CE = BC \cos C = 7 \cdot \frac{11}{14} = \frac{11}{2}$$



よって

$$\triangle DEF = \triangle ABC - (\triangle EDC + \triangle AFE + \triangle BDF)$$

それぞれ

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\triangle EDC = \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CD \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{44}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{14} = \frac{605\sqrt{3}}{98}$$

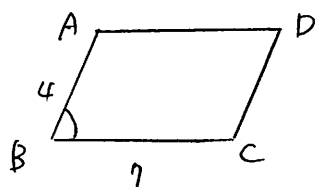
$$\triangle AFE = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AE \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle BDF = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BF \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{7} \cdot 1 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{10\sqrt{3}}{49}$$

$$\therefore \triangle DEF = 10\sqrt{3} - \left(\frac{605\sqrt{3}}{98} + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{10\sqrt{3}}{49}\right)$$

$$= 10\sqrt{3} - \frac{870\sqrt{3}}{98} = \frac{110\sqrt{3}}{98} = \frac{55\sqrt{3}}{49}$$

29



(1) 平行四辺形 ABCD の面積は
△ABC の 2 倍である。

よって

$$\begin{aligned} 2 \cdot \triangle ABC &= 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{3\sqrt{5}}{7} \\ &= 12\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$(2) \sin^2 B + \cos^2 B = 1$$

$$\left(\frac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2 + \cos^2 B = 1$$

$$\cos^2 B = 1 - \frac{45}{49}$$

$$= \frac{4}{49}$$

$$\therefore \cos B = \pm \frac{2}{7}$$

∵ ∠B は鋭角より

$$\cos B > 0 \text{ であるから}$$

$$\cos B = \frac{2}{7}$$

よって △ABC で余弦定理より

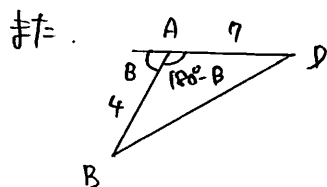
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$$

$$= 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \frac{2}{7}$$

$$= 16 + 49 - 16$$

$$= 49$$

$$\therefore AC > 0 \text{ より } AC = 7$$



△ABD において

余弦定理より

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(180^\circ - B)$$

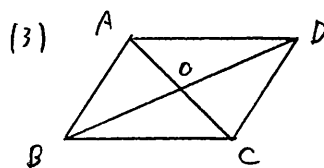
$$= AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot (-\cos B)$$

$$= 4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$= 16 + 49 + 16$$

$$= 81$$

$$BD > 0 \text{ より } BD = 9$$



$$(2) \text{ より } AC = 7 \text{ より } BC = 7$$

であるから AC = BC

より △ABC は ∠A = ∠B

の二等辺三角形である。

$$\therefore \sin \angle BAC = \sin B = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

であるから OB は BD の中点より

$$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{9}{2}$$

また △OAB の外接円の

半径を R とすると

$$2R = \frac{OB}{\sin \angle BAO}$$

$$= \frac{\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{7}}$$

$$= \frac{9}{2} \times \frac{7}{3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore R = \frac{21}{4\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{20}$$

(3) (B)

$$OA = \frac{1}{2} AC = \frac{7}{2}$$

$$OB = \frac{1}{2} BD = \frac{9}{2}$$

である。

平行四辺形 ABCD

の面積が (1) より $12\sqrt{5}$

であるから △OAB の

面積は 平行四辺形

ABCD の $\frac{1}{4}$ である。

△OAB の面積は

$$\frac{1}{4} \cdot 12\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$$

である。△OAB の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB$$

であるから

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB = 3\sqrt{5}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \sin \angle AOB = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \sin \angle AOB = \frac{8\sqrt{5}}{21}$$

よって △OAB で正弦定理より

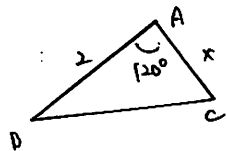
$$2R = \frac{AB}{\sin \angle AOB}$$

$$= \frac{4}{\frac{8\sqrt{5}}{21}}$$

$$= \frac{4 \cdot 21}{8\sqrt{5}} = \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore R = \frac{21}{4\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{20}$$

(30)

(1) $\triangle ABC$ に余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$BC^2 = 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 4 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 4 + x^2 + 2x$$

$$\therefore BC^2 = x^2 + 2x + 4$$

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径が $\sqrt{3}$ より
 $R = \sqrt{3}$ とおくと、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = 2R$$

$$BC = 2R \cdot \sin A$$

$$= 2R \cdot \sin 120^\circ$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

(1) に代入して

$$BC^2 = x^2 + 2x + 4$$

$$3^2 = x^2 + 2x + 4$$

$$x^2 + 2x - 5 = 0$$

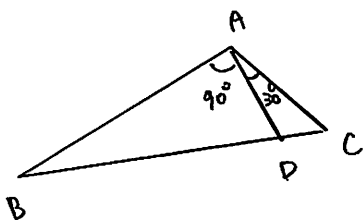
$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{1 - (-5)}$$

$$= -1 \pm \sqrt{6}$$

$$x > 0 \text{ より } x = -1 + \sqrt{6} \text{ となる}$$

$$\therefore x = -1 + \sqrt{6}$$

(3)

 $\angle A = 120^\circ$ であり、また条件より $\angle BAD = 90^\circ$ である。 $\angle CAD = 30^\circ$ である。ゆえに $\triangle BAC$ の面積は

$$\triangle BAC = \triangle BAD + \triangle CAD$$

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin 30^\circ$$

代入して

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-1 + \sqrt{6}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot (-1 + \sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2}$$

458 (7)

$$2\sqrt{3}(-1 + \sqrt{6}) = 4AD + (-1 + \sqrt{6})AD$$

$$2\sqrt{3}(-1 + \sqrt{6}) = (4 - 1 + \sqrt{6})AD$$

$$2\sqrt{3}(-1 + \sqrt{6}) = (3 + \sqrt{6})AD$$

$$2\sqrt{3}(-1 + \sqrt{6}) = (\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2})AD$$

$$2\sqrt{3}(-1 + \sqrt{6}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2})AD$$

$$2(-1 + \sqrt{6}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})AD$$

 $\therefore$ 両辺 $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ で割ると有理化可なり

$$AD = \frac{2(-1 + \sqrt{6})}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{2(-1 + \sqrt{6})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(-\sqrt{3} + \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{3 - 2}$$

$$= 2(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$$

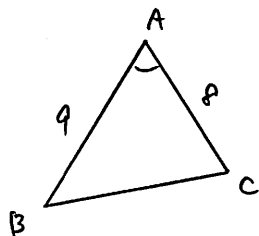
したがって

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \cdot 1$$

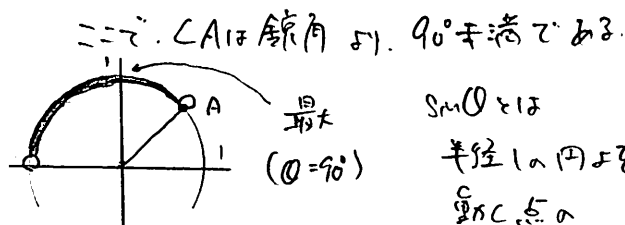
$$= 2(4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) = \underline{8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}$$

[31]



$$= \frac{32}{2 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$= \frac{2}{7}$$



$\sin \theta$ は
半径 1 の円に
点 C の
y 座標 (= $\sin \theta$) である。

(1) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

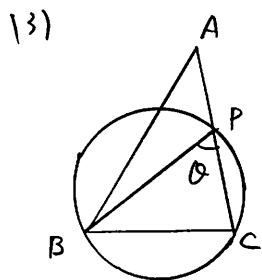
$$\sin^2 A + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \sin A = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



$\angle BPC = \theta$ である。
 $\triangle BPC$ において
正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle BPC} = 2R$$

$$\therefore \frac{7}{\sin \theta} = 2R$$

より

$$R = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$\sin \theta$ は $\theta = 90^\circ$ のとき最大になる。

$\theta = 90^\circ$ のとき $\sin \theta = 1$ より R の最小値は $R = \frac{7}{2}$

$\angle BPC = 90^\circ$ であり $\triangle BPC$ の外心 O は
線分 BC の中点である。

より $OC = \frac{1}{2} BC = \frac{7}{2}$

また (1) より $\cos C = \frac{2}{7}$ であり

$\triangle ACO$ において余弦定理より

$$OA^2 = AC^2 + OC^2 - 2 \cdot AC \cdot OC \cdot \cos C$$

$$= 8^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7}$$

$$= 64 + \frac{49}{4} - 16$$

$$= 48 + \frac{49}{4}$$

$$= \frac{241}{4}$$

$OA > 0$ より $OA = \frac{\sqrt{241}}{2}$

また $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= 12\sqrt{5}$$

(2) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$= 9^2 + 8^2 - 2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \frac{2}{3}$$

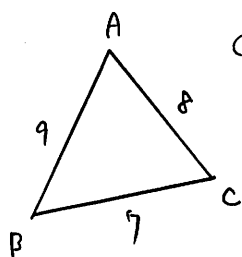
$$= 81 + 64 - 96$$

$$= 49$$

$BC = \pm 7$ より $BC > 0$ より $BC = 7$

より R は一定値である。

また $\triangle ABC$ で余弦定理より

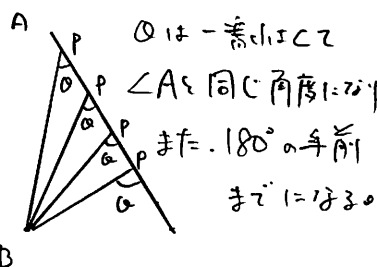


$$\cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC}$$

$$= \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 8}$$

$$= \frac{49 + 64 - 81}{2 \cdot 7 \cdot 8}$$

つまり、点 P が A と C
の間を動くとき、



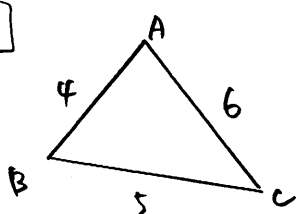
O は一定値である。

$\angle A$ と同じ角度になる。

つまり、 180° の角。

また、これは

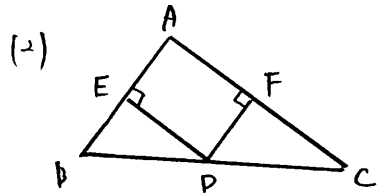
[32]



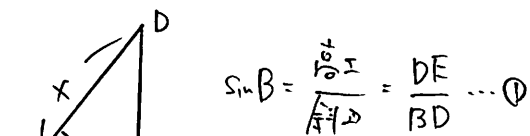
(1) $\triangle ABC$ の余弦定理より.

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} \\ &= \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{16 + 25 - 36}{2 \cdot 4 \cdot 5} \\ &= \frac{5}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot AC} \\ &= \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= \frac{25 + 36 - 16}{2 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= \frac{45}{2 \cdot 5 \cdot 6} \\ &= \frac{9}{2 \cdot 6} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$



直線 EF 平行 BC である.



$$\sin B = \frac{DE}{BD} = \frac{y}{z} \quad \text{--- (1)}$$

同様にして、 $\sin B = \frac{y}{z}$ である.

(1) $\therefore \cos B = \frac{1}{8}$ より

$$\begin{aligned}\sin^2 B + \cos^2 B &= 1 \\ \sin^2 B + \left(\frac{1}{8}\right)^2 &= 1\end{aligned}$$

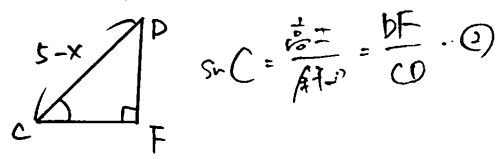
$$\begin{aligned}\therefore \sin^2 B &= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64} \\ \therefore \sin B &= \pm \frac{\sqrt{63}}{8} = \pm \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ \because 0^\circ < B < 180^\circ \therefore \sin B > 0 \\ \therefore \sin B &= \frac{3\sqrt{7}}{8}\end{aligned}$$

よって (1) より

$$\frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{DE}{x} \quad \therefore DE = \frac{3\sqrt{7}}{8}x$$

また、直線 EF 平行 BC であるので

$$DC = BC - BD = 5 - x \quad \text{より}$$



$$\sin C = \frac{DF}{CF} = \frac{y}{z} \quad \text{--- (2)}$$

また

$$\begin{aligned}\sin^2 C + \cos^2 C &= 1 \\ \sin^2 C + \left(\frac{3}{4}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2 C &= 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \\ 0^\circ < C < 180^\circ \therefore \sin C > 0 \\ \therefore \sin C &= \frac{\sqrt{7}}{4}\end{aligned}$$

よって (2) より

$$\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{DF}{5-x} \quad \therefore DF = \frac{\sqrt{7}}{4}(5-x)$$

(3) (1) 同様にして AEDF の面積を求めよう.

$\triangle BED$ の (1) と同様にして

$$\frac{BE}{BD} = \frac{DE}{BD} = \cos B$$

$$\therefore \frac{BE}{x} = \frac{1}{8} \quad \therefore BE = \frac{1}{8}x$$

また $\triangle BED$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle BED &= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot DE \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}x \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}x \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{128}x^2 \quad \dots (i)\end{aligned}$$

$\triangle CDF$ と同様にして

$$\frac{CF}{CD} = \frac{DF}{CD} = \cos C$$

$$\frac{CF}{5-x} = \frac{3}{4} \quad \therefore CF = \frac{3}{4}(5-x)$$

よって $\triangle CDF$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle CDF &= \frac{1}{2} \cdot CF \cdot DF \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}(5-x) \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}(5-x) \\ &= \frac{3\sqrt{7}}{32}(5-x)^2 \quad \dots (ii)\end{aligned}$$

また、 $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin B \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \dots (iii)\end{aligned}$$

よって (i)(ii)(iii) より

$$\begin{aligned}S &= \triangle ABC - (\triangle BED + \triangle CDF) \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \left\{ \frac{3\sqrt{7}}{128}x^2 + \frac{3\sqrt{7}}{32}(5-x)^2 \right\}\end{aligned}$$

よって、 x の二次関数である.

また、 $0 < x < 5$ であるので、 x の範囲を求めよう.

$$\begin{aligned}S &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{3\sqrt{7}}{128} \{ x^2 + 4(5-x)^2 \} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{3\sqrt{7}}{128} \{ x^2 + 4(x^2 - 10x + 25) \} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{3\sqrt{7}}{128} (5x^2 - 40x + 100) \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{15\sqrt{7}}{128} (x^2 - 8x + 20) \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{15\sqrt{7}}{128} \{ (x-4)^2 - 16 + 20 \} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{15\sqrt{7}}{128} \{ (x-4)^2 + 4 \} \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{15\sqrt{7}}{128} (x-4)^2 - \frac{15\sqrt{7}}{32} \cdot 4 \\ &= \frac{15\sqrt{7}}{4} - \frac{15\sqrt{7}}{128} (x-4)^2 - \frac{15\sqrt{7}}{8} \\ &= -\frac{15\sqrt{7}}{128} (x-4)^2 + \frac{15\sqrt{7}}{4} \left(1 - \frac{1}{8}\right) \\ &= -\frac{15\sqrt{7}}{128} (x-4)^2 + \frac{15\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{7}{8} \\ &= -\frac{15\sqrt{7}}{128} (x-4)^2 + \frac{105\sqrt{7}}{32}\end{aligned}$$

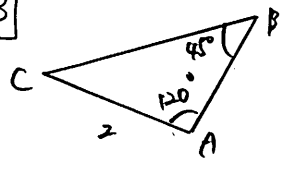
よって $0 < x < 5$ より、 S は

$$x = BD = 4 \text{ のとき、}$$

$$\text{最大値 } \frac{105\sqrt{7}}{32} \text{ である.}$$



[33]



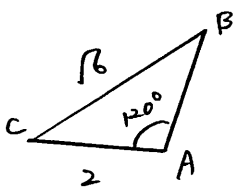
(1) $\triangle ABC$ で正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$$

$$\therefore \frac{BC}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\begin{aligned} BC &= \frac{2}{\sin 45^\circ} \times \sin 120^\circ \\ &= \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ で余弦定理より



$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &\quad - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 7 \quad (\sqrt{6})^2 &= AB^2 + 2^2 - 2 \cdot AB \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ \\ 6 &= AB^2 + 4 - 2 \cdot AB \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 + 2AB - 2 = 0$$

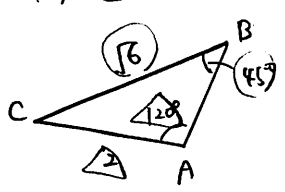
解の公式より

$$\begin{aligned} AB &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-2)}}{1} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{1} \end{aligned}$$

$$AB > 0 \text{ より } AB = -1 - \sqrt{3} \text{ (不適)}$$

$$\therefore AB = -1 + \sqrt{3}$$

(2) ⑧



第1余弦定理より

$$\begin{aligned} AB &= BC \cos B + CA \cos A \\ &= \sqrt{6} \cdot \cos 45^\circ + 2 \cdot \cos 120^\circ \end{aligned}$$

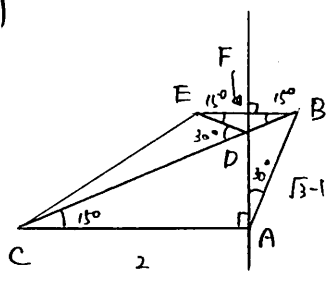
$$S = \triangle ACD + \triangle DEC$$

である。

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

(3)



$$\angle BAD = 30^\circ \text{ より } \angle CAD = 90^\circ$$

また、B を直線 AD に投影 (7 対称) に

移動した点 E となり BE と AD

は直交する。よって

BE と AC は平行

1:2 のため

$$\angle CBE = \angle BCA = 15^\circ \text{ (錯角)}$$

また、BE と直線 AD の交点を F

とすると、点 B を直線 AD に

投影 (7 対称) した点 E となり

点 E となり BF = FE である

よって

$\triangle DBF$ と $\triangle DEF$ は合同

である。よって $\angle DEF = \angle DBF = 15^\circ$

よって、外角は隣り合わない

内角の和は 180° である

$$\angle CDE = \angle DEB + \angle DBE$$

$$= 15^\circ + 15^\circ = 30^\circ$$

である。

四角形 ADEC の面積を

S とすると

$$\therefore \triangle DEC = \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DE \cdot \sin 30^\circ$$

である。よって AD の長さが求まる。

三平方の定理より DC が求まる。

よって DB が求まるので $DB = DE$ より

DE も求まる。

よって AD を求める。

$\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AC \cdot \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot AD \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot 2 \cdot 1$$

両辺4倍して

$$2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1)AD + 4AD$$

$$2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = (3 + \sqrt{3})AD$$

$$2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)AD$$

$$\therefore AD = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{2(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1} = 4 - 2\sqrt{3}$$

よって $\triangle ACD$ で

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$

$$= 2^2 + (4 - 2\sqrt{3})^2$$

$$= 4 + 16 - 16\sqrt{3} + 12$$

$$= 32 - 16\sqrt{3}$$

$$= 8(4 - 2\sqrt{3}) = 8(\sqrt{3} - 1)^2$$

$$\therefore CD = 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$$

よって

$$DE = DB = BC - CD$$

$$= \sqrt{6} - (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$$

$$= 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

よって

$$S = \triangle ACD + \triangle DEC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD + \frac{1}{2} \cdot DC \cdot DE \cdot \sin 30^\circ$$

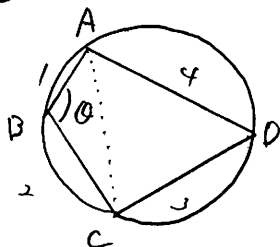
$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (4 - 2\sqrt{3})$$

$$+ \frac{1}{2} (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})(2\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{3} - 1$$

(34)

(1)



$\angle ABC = \theta$ とおく。

$\triangle ABC$ と余弦定理より

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \theta$$

$$= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \theta$$

$$= 5 - 4 \cos \theta \dots (*)$$

また $\triangle ACD$ と余弦定理より

$$AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2 \cdot CD \cdot DA \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$= 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-\cos \theta)$$

$$= 25 + 24 \cos \theta \dots (**)$$

(*) (**) より

$$\begin{cases} AC^2 = 5 - 4 \cos \theta \\ AC^2 = 25 + 24 \cos \theta \end{cases}$$

$$\therefore 5 - 4 \cos \theta = 25 + 24 \cos \theta$$

$$28 \cos \theta = -20$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{5}{7}$$

また

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{5}{7}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{25}{49} = \frac{24}{49}$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ より } \sin \theta > 0$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

ゆえに 四角形 ABCD の面積 T は

$$T = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \cdot \sin(180^\circ - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot CD \cdot DA \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta (AB \cdot BC + CD \cdot DA)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} (1 \cdot 2 + 3 \cdot 4)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{6}}{7} \cdot 14 = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore T = 2\sqrt{6}$$

$$- \frac{1}{6} \cos \theta = -\frac{5}{7} \text{ より } (*) = \frac{5}{7} \text{ (7) } (3) \text{ } CD = a \text{ とおく。}$$

$$AC^2 = 5 - 4 \left(-\frac{5}{7}\right)$$

$$= 5 + \frac{20}{7} = \frac{55}{7}$$

$$\therefore AC > 0 \text{ より } AC = \sqrt{\frac{55}{7}}$$

また $\triangle ABC$ と正弦定理より

$$2R = \frac{AC}{\sin \theta}$$

$$= \sqrt{\frac{55}{7}} \div \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

$$= \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{7}} \times \frac{7}{2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{55} \cdot 7}{2\sqrt{6}}$$

$$\therefore R = \frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}$$

ゆえに (7) の面積 S_{12} は

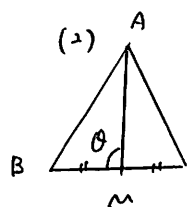
$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}\right)^2$$

1. x 上より

$$\frac{S}{T} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \pi \left(\frac{\sqrt{385}}{4\sqrt{6}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \cdot \pi \cdot \frac{385}{96}$$

$$= \frac{385}{1152} \sqrt{6} \pi$$



$\angle AMB = \theta$ とおく

$\angle AMC = 180^\circ - \theta$

と置く。

$\triangle ABM$ と余弦定理より

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos \theta \dots (1)$$

$\triangle ACM$ と余弦定理より

$$AC^2 = AM^2 + CM^2 - 2 \cdot AM \cdot CM \cdot \cos(180^\circ - \theta) \dots (2)$$

$$\therefore BM = CM \cdot \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

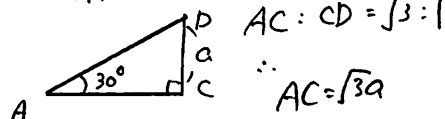
より (2) は

$$AC^2 = AM^2 + BM^2 + 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos \theta \dots (3)$$

また (1) + (3) より

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2) //$$

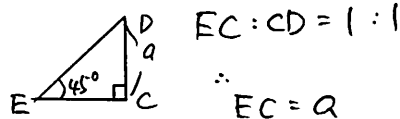
$\triangle DAC$ は直角三角形



$AC : CD = \sqrt{3} : 1$

$$\therefore AC = \sqrt{3}a$$

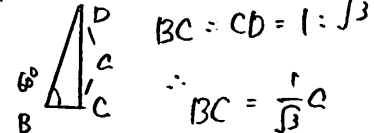
$\triangle DEC$ は直角三角形



$EC : CD = 1 : 1$

$$\therefore EC = a$$

$\triangle DBC$ は直角三角形

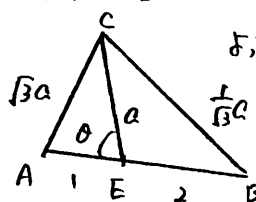


$BC : CD = 1 : \sqrt{3}$

$$\therefore BC = \frac{1}{\sqrt{3}}a$$

また $\triangle ABC$ は直角三角形 $AB = 3$ より

$$AE : EB = 1 : 2 \text{ より } AE = 1, EB = 2$$



また $\triangle ABC$ は直角三角形

$\angle CEA = \theta$ とおく

$\angle CEB = 180^\circ - \theta$

$\triangle AEC$ と余弦定理より

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 - 2 \cdot AE \cdot CE \cdot \cos \theta$$

$$(\sqrt{3}a)^2 = 1^2 + a^2 - 2 \cdot 1 \cdot a \cdot \cos \theta$$

$$\therefore 3a^2 = 1 + a^2 - 2a \cos \theta \dots (1)$$

$\triangle CEB$ と余弦定理より

$$BC^2 = CE^2 + EB^2 - 2 \cdot CE \cdot EB \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}a\right)^2 = a^2 + 2^2 - 2 \cdot a \cdot 2 \cdot (-\cos \theta)$$

$$\frac{1}{3}a^2 = a^2 + 4 + 4a \cos \theta \dots (2)$$

(1) x 2 + (2) より

$$6a^2 = 2 + 2a^2 - 4a \cos \theta$$

$$+ \frac{1}{3}a^2 = a^2 + 4 + 4a \cos \theta$$

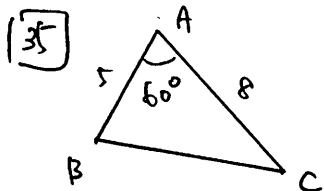
$$\frac{19}{3}a^2 = 6 + 3a^2$$

$$\therefore \frac{10}{3}a^2 = 6$$

$$a^2 = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$a > 0$ より

$$CD = a = \frac{3}{\sqrt{5}}$$



(1) $\triangle ABC$ の面積を S とす

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 25 + 64 - 40 \\ &= 49 \end{aligned}$$

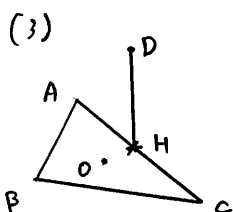
$$\therefore BC > 0 \text{ より } BC = 7$$

※ OA は $\triangle ABC$ の
外接円の半径に
等しいので $\triangle ABC$ で
正弦定理より

$$2OA = \frac{BC}{\sin A}$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot OA &= \frac{7}{\sin 60^\circ} \\ &= \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{14}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\therefore OA = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



四面体 $ABCD$ の体積 V は
 DH が平面 ABC に垂直なので

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot DH$$

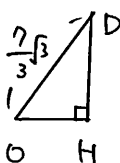
(底面積) (高さ)

よって計算より $\triangle ABC$ の
面積は (1) より $10\sqrt{3}$ である。

以下、 DH の長さを求める。

$$OD = OA \text{ より } OD = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

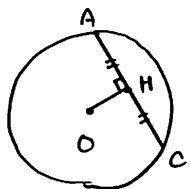
また、 $\triangle ODH$ は $\angle OHD = 90^\circ$
の直角三角形より OH の長さを
求めるには三平方の定理より



DH が求まる。

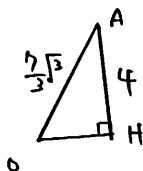
また、 $\triangle OAH$ を考える。

$\triangle ABC$ の外接円の中心 O
と、弦 AC の中点 H と
結ぶ線分 OH は、
弦 AC と垂直に交わる。



※ AH は
 AC の半分より
 $AH = \frac{1}{2} \cdot 8$
 $= 4$

よって $\triangle OAH$ は



三平方の定理より

$$\begin{aligned} OH^2 + AH^2 &= AO^2 \\ OH^2 + 4^2 &= \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ OH^2 + 16 &= \frac{49}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore OH^2 &= \frac{49}{3} - 16 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore OH > 0 \text{ より } OH = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって $\triangle ODH$ は

三平方の定理より

$$\begin{aligned} OH^2 + DH^2 &= OD^2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + DH^2 &= \left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ \frac{1}{3} + DH^2 &= \frac{49}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore DH^2 = 16$$

$$DH > 0 \text{ より } DH = 4$$

よって、四面体 $ABCD$ の
体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot DH \\ &= \frac{1}{3} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 4 = \frac{40}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

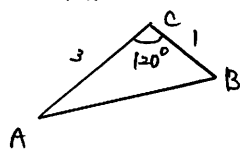
$\triangle OAH$ と $\triangle ODH$ は

- $OA = OD$ (半径より)
- OH : 共通
- $\angle AHO = \angle DHO = 90^\circ$

よって $\triangle OAH$ と $\triangle ODH$ は
合同なので
 $DH = AH = 4$
と証明される。

(36)

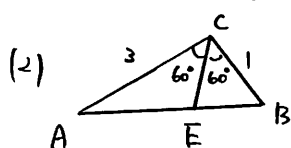
(1) $\triangle ABC$ について



余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos 120^\circ \\ &= 3^2 + 1^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 9 + 1 + 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

$AB > 0$ より $AB = \sqrt{13}$



$\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \triangle ACE + \triangle BCE$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin 120^\circ &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CB \cdot \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CE \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot CE \cdot CB \cdot \sin 60^\circ \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot CE \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot CE \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

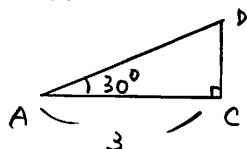
よって

$$3 = 3CE + CE$$

$$4CE = 3$$

$$\therefore CE = \frac{3}{4}$$

(3) $\triangle ACD$ について

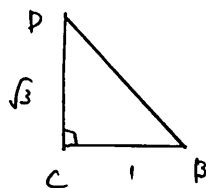


$$CD : AD : AC = 1 : 2 : \sqrt{3}$$

$$\therefore AC = 3 \text{ より}$$

$$CD = \sqrt{3}, AD = 2\sqrt{3}$$

よって $\triangle BCD$ について



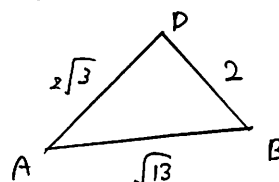
$$CD = \sqrt{3}, BC = 1$$

よって三平方の定理より

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 \\ &= 1^2 + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 + 3 = 4 \end{aligned}$$

$$BD > 0 \text{ より } BD = 2$$

よって $\triangle ABD$ は



上図より $\angle ADB = 90^\circ$

よって $AB \perp CD$

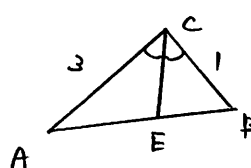
$$AF = BE$$

よって点 F は

点 E は $\triangle ABC$ について

$\angle ACB$ の二等分線は

AB の交点より



$$AE : EB = CA : CB$$

が成り立つ。よって

$$AE : EB = 3 : 1$$

$$\therefore EB = \frac{1}{4} AB$$

$$\text{よって (1) より } AB = \sqrt{13}$$

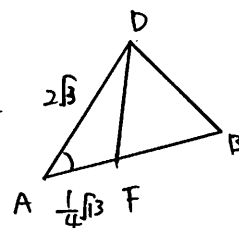
$$\text{よって } EB = \frac{1}{4} \sqrt{13}$$

$$\text{よって点 F は } AF = \frac{1}{4} \sqrt{13}$$

よって $\triangle ABD$ について

余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle BAD &= \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} \\ &= \frac{13 + 12 - 4}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{21}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{21}{4\sqrt{39}} \end{aligned}$$



よって $\triangle ADF$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} DF^2 &= AD^2 + AF^2 - 2 \cdot AD \cdot AF \cdot \cos \angle DAF \\ &= (2\sqrt{3})^2 + \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{21}{4\sqrt{39}} \\ &= 12 + \frac{13}{16} - \frac{21}{4} \\ &= \frac{192 + 13 - 84}{16} \\ &= \frac{121}{16} \end{aligned}$$

$$= \frac{121}{16}$$

$$\therefore DF > 0 \text{ より } DF = \frac{11}{4}$$

⑦

$$(1) \cos \angle BAC = \frac{4}{5}$$

$$1 + \tan^2 \angle BAC = \frac{1}{\cos^2 \angle BAC}$$

$$\therefore 1 + \tan^2 \angle BAC = \frac{1}{(\frac{4}{5})^2}$$

$$\therefore 1 + \tan^2 \angle BAC = \frac{25}{16}$$

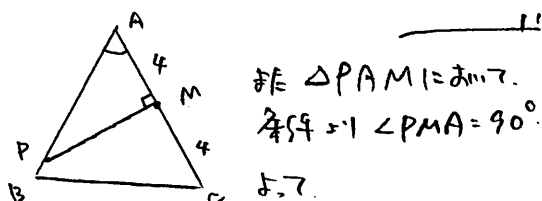
$$\tan^2 \angle BAC = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \tan \angle BAC = \pm \frac{3}{4}$$

$\therefore 0^\circ < \angle BAC < 180^\circ$ より

よって $\cos \angle BAC > 0$ より $\angle BAC$ は鋭角

よって $\tan \angle BAC > 0$ より $\tan \angle BAC = \frac{3}{4}$



$$\frac{PM}{AM} = \frac{15}{16} = \tan \angle BAC$$

が成り立つ。

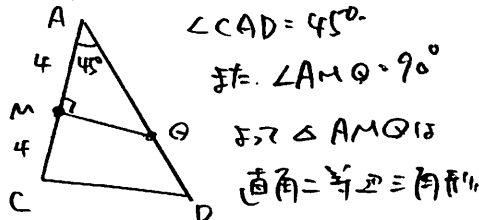
$$\therefore \frac{PM}{4} = \frac{3}{4} \therefore PM = 3$$

(2) (1)と同様に $\triangle PAM$ において

$$\frac{AM}{PA} = \frac{15}{16} = \cos \angle BAC$$

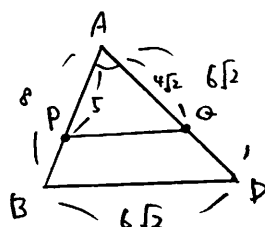
$$\therefore \frac{4}{PA} = \frac{4}{5} \text{ より } PA = 5$$

よって $\triangle AMQ$ において、よって



$$AM = 4 \text{ より } MQ = 4, AQ = 4\sqrt{2}$$

よって $\triangle BAD$ において 余弦定理より



$$\cos \angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD} = \frac{8^2 + (4\sqrt{2})^2 - (6\sqrt{2})^2}{2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8^2}{2 \cdot 8 \cdot 6\sqrt{2}}$$

$$= \frac{8}{2 \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

よって $\triangle APQ$ において 余弦定理より

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \angle BAD$$

$$= 5^2 + (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$= 25 + 32 - \frac{80}{3}$$

$$= \frac{91}{3}$$

$$PQ > 0 \text{ より } PQ = \sqrt{\frac{91}{3}}$$

$$= \frac{-\frac{16}{3}}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{2}{9}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{77}{81}$$

$$0^\circ < \theta < 180^\circ \text{ より } \sin \theta > 0$$

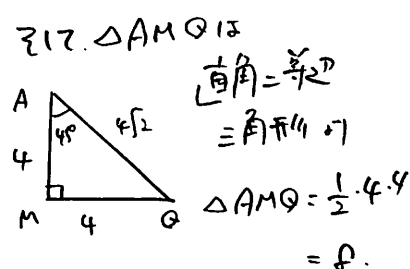
$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{77}}{9}$$

$$\therefore \triangle PQM = \frac{1}{2} \cdot PM \cdot MQ \cdot \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{77}}{9}$$

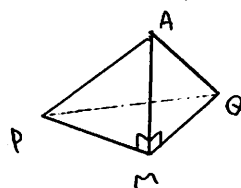
$$= \frac{2\sqrt{77}}{3}$$

よって $AM = 4$ より



(3) (1)と同様に $\triangle PAMQ$ において

よって $\angle AMP = \angle AMQ = 90^\circ$



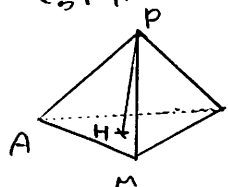
よって $\triangle PMQ$ において

よって AM が高さになる。

よって $\triangle PAMQ$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle PMQ \cdot AM \dots (*)$$

よって $\triangle AMQ$ の体積 V は



よって $\triangle AMQ$ の体積 V は

よって AMQ は $\triangle PAMQ$ の底面である。

よって AMQ は $\triangle PAMQ$ の底面である。

よって AMQ は $\triangle PAMQ$ の底面である。

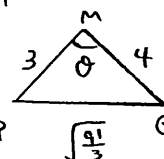
よって $\triangle AMQ$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle AMQ \cdot PH \dots (**)$$

よって $\triangle AMQ$ の体積 V は

よって PH の長さを求める。

よって $\triangle PAMQ$ において $\angle PMQ = \theta$ とおく。



よって $\triangle PAMQ$ において 余弦定理より

$$\cos \theta = \frac{3^2 + 4^2 - 5^2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 + 16 - 25}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{0}{24} = 0$$

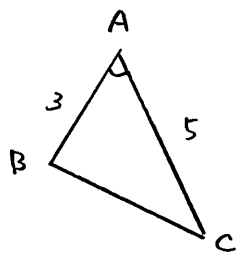
$$\frac{1}{3} \cdot \triangle PMQ \cdot AM = \frac{1}{3} \cdot \triangle AMQ \cdot PH$$

$$\therefore \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{77}}{3} \cdot 4 = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot PH$$

$$\frac{8\sqrt{77}}{3} = 8PH$$

$$\therefore PH = \frac{\sqrt{77}}{3}$$

138



(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{3} \\ &= 9 + 25 - 10 \\ &= 24 \end{aligned}$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{また、} \sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sin^2 A + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 A = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$0^\circ < A < 180^\circ \text{ より } \sin A > 0$$

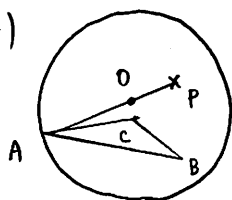
$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって、正弦定理より

$$\begin{aligned} 2R &= \frac{BC}{\sin A} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

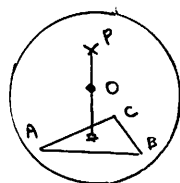
$$\therefore R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

(2)



四面体 PABC の
内接している球の中心
O がある。

(3)



四面体 PABC を考える。

$\triangle ABC$ の面積は (1) より

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\triangle AP$ の長さが最大となるのは

と一定である。

$\triangle AP$ が球の直径となる時である。

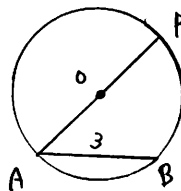
よって高さが

よって、この球を 3 点 P, A, B を通る平面

最大となる。

で切ると、その切り口は下図のようになる。

体積も最大となる。



AP が球の直径となる。

今、球の半径が 3 より

$$AP = 6$$

また、AP が直径より

直径に対する円周角より

$$\angle ABP = 90^\circ \text{ となる。}$$

よって、 $\triangle ABP$ で三平方の定理より

$$AB^2 + BP^2 = AP^2$$

$$3^2 + BP^2 = 6^2$$

$$BP^2 = 36 - 9 = 27$$

$$BP > 0 \text{ より } BP = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

高さが最大となるのは

点 P から $\triangle ABC$ へ下した

垂線の長さが最大となる。

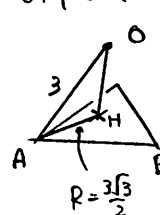
それは、その垂線が点 O を通る。

である。そしてこのとき、その垂線と

$\triangle ABC$ の交点は、 $\triangle ABC$ の外接円の

中心に一致する。 $\triangle ABC$ の外接円の

中心を H とする。



OA は球の半径より

AH は $\triangle ABC$ の外接円の

半径より、(1) から

$$AH = R = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

そして、 $\angle AHO = 90^\circ$ (OH は垂線)

より、 $\triangle OAH$ で三平方の定理

より

$$AH^2 + OH^2 = OA^2$$

$$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + OH^2 = 3^2$$

$$OH^2 = 9 - \frac{27}{4} = \frac{9}{4}$$

$$OH > 0 \text{ より } OH = \frac{3}{2}$$

よって、このとき PH は

$$PH = PO + OH = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

(球の半径)

以上より、四面体 PABC の

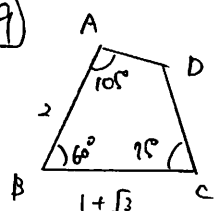
体積の最大値は

$$\frac{1}{3} \cdot \triangle ABC \cdot PH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

である。

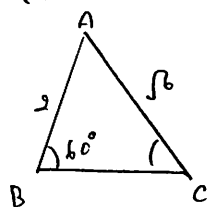
39



(1) $\triangle ABC$ に余弦定理より

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 60^\circ \\ &= 2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 4 + (1+3+2\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 4 + 4 + 2\sqrt{3} - 2 - 2\sqrt{3} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$AC^2 = 6$ より $AC > 0$ より $AC = \sqrt{6}$
 また $\triangle ABC$ に正弦定理より



$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin C}$$

$$\sqrt{6} \sin C = 2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$\sqrt{6} \sin C = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{6} \sin C = \sqrt{3}$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $0^\circ < C < 180^\circ$ より

$$C = 45^\circ, 135^\circ$$

(しかし $\angle B = 60^\circ$ より

$C = 135^\circ$ は不適)

ゆえに

$$\angle ACB = 45^\circ$$

(2) 四角形 ABCD は ?

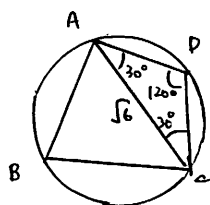
$$\angle BAD = 105^\circ$$

$$\angle BCD = 75^\circ$$

より 対角の和が 180° なるので

四角形 ABCD は円に

内接する。



よって正弦定理より

$$\frac{AC}{\sin D} = \frac{AD}{\sin C}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{AD}{\sin 30^\circ}$$

$$AD = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} \times \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \sqrt{2}$$

よって $\triangle ACD$ の面積は

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $\triangle ACD$ の外接円の半径は

正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{6}}{\sin 120^\circ}$$

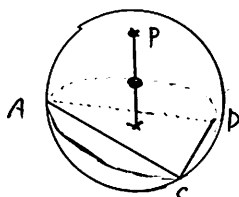
$$= \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore R = \sqrt{2}$$

$\triangle ACD$ の底面は (T=45度) 三角錐

PACD の体積が最大となるのは

高さ (点 P から $\triangle ACD$ に下した垂線の長さ) が最大となる時にあつて



すなわち、その垂線が

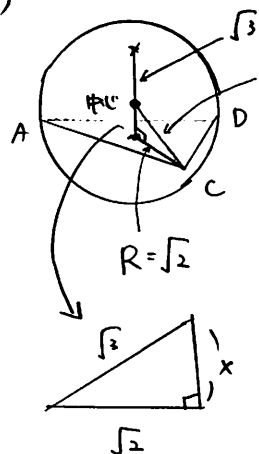
球の中心を通る

時にあつて

この時、P から $\triangle ACD$ に

下した垂線は、球の中心を

通る。よって、 $\triangle ACD$ の外接円の中心を通る。



) 球の半径

よって、球の中心と

$\triangle ACD$ の外接円の中心と点 C と

結ぶと「直角三角形」になり

1=2 あり。三平方の定理より

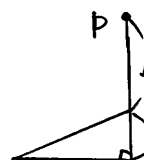
$$(\sqrt{3})^2 = x^2 + (\sqrt{2})^2$$

$$3 = x^2 + 2$$

$$\therefore x^2 = 1, x > 0 \text{ より } x = 1$$

よって (1) が最大となる。

この高さは $\sqrt{3} + 1$ である。



よって (2) より

$\triangle ACD$ の面積は

$$\triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ より}$$

体積の最大は

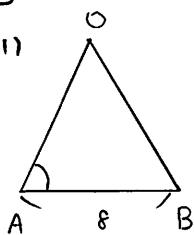
$$\frac{1}{3} \cdot \triangle ACD \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} + 1)$$

$$= \frac{3 + \sqrt{2}}{6}$$

40

(1)



$\triangle OAB$ の面積が $32\sqrt{2}$ である

$\sin \angle OAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ であり $AB = 8$ である

$$\triangle OAB = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB \cdot \sin \angle OAB$$

$$32\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot 8 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore 32\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3} OA$$

$$\therefore OA = \frac{3}{8\sqrt{2}} \cdot 32\sqrt{2}$$

$$= 12$$

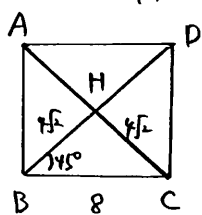
また、四面体 O-ABCD の高さは、

点 O から底面 ABCD へ下ろした

垂線の長さに等しい。この垂線

と底面 ABCD の交点は ABCD

の対角線の交点に等しい。



底面 ABCD において

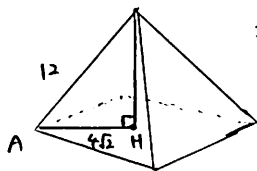
AC と BD の交点

H とおくと、

ABCD は正方形の

正角形である

$$AH = BH = CH = DH = 4\sqrt{2}$$



また、 $OA = 12$ である

直角三角形 OAH

において、三平方

定理から

$$OA^2 = AH^2 + OH^2$$

$$12^2 = (4\sqrt{2})^2 + OH^2$$

$$OH^2 = 144 - 32$$

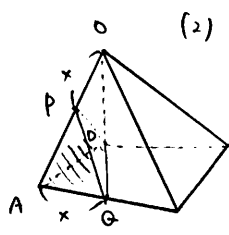
$$= 112$$

$$\therefore OH > 0$$

$$OH = \sqrt{112}$$

$$= 4\sqrt{7}$$

(2) 四面体 AOD を考える。



$$\angle BAO = 90^\circ$$

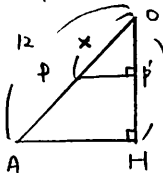
$$AD = 8$$

$$AO = x$$

$$\therefore \triangle AOD = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot AD$$

$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot 8 = 4x$$

また、(1) の $\triangle AHO$ において、



点 P を OH 上に

任意点 P を

とる

四面体 PAOD

の高さは PH である

また、 $\triangle OPP'$ と $\triangle OAH$ は相似である

$$OP : OP' = OA : OH$$

$$x : OP' = 12 : 4\sqrt{7}$$

$$\therefore x : OP' = 3 : \sqrt{7}$$

$$3OP' = \sqrt{7}x$$

$$\therefore OP' = \frac{1}{3}\sqrt{7}x$$

$$\therefore PH = OH - OP'$$

$$= 4\sqrt{7} - \frac{1}{3}\sqrt{7}x$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{3}(12 - x)$$

よって、四面体 PAOD

の体積を $V(x)$ とすると

$$V(x) = \frac{1}{3} \cdot \triangle AOD \cdot PH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4x \cdot \frac{\sqrt{7}}{3}(12 - x)$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{9} x(12 - x)$$

すなわち、点 P は線分 OA 上に

$$0 < x < 12$$

点 Q は線分 AB 上に

$$0 < x < 8$$

共通範囲は

$$0 < x < 8$$

よって、

$$V(x) = \frac{4\sqrt{7}}{9} x(12 - x) \quad (0 < x < 8)$$

の最大値を求めよう。

$$V(x) = \frac{4\sqrt{7}}{9} (12x - x^2)$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{9} \{ -(x-6)^2 + 36 \}$$

$$\max \quad \therefore V(x) \text{ は } x=6 \text{ のとき}$$

$$\text{最大値 } 16\sqrt{7} \text{ である}$$

$$\therefore V(x) \text{ は } x=6 \text{ のとき}$$

(3) 四面体 PAQD の体積の最大値は

$$16\sqrt{7} \text{ である。}$$

$$\text{すなわち、} V = \frac{1}{3} \cdot \triangle PQD \cdot AH \cdots (*)$$

と計算できる。よって



$\triangle PQD$ の面積を求めよう。

(2) より $x = 6$ である。

$$\sin \angle OAB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos^2 \angle OAB = 1 - \sin^2 \angle OAB = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

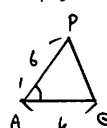
$\angle OAB$ は鋭角であるから $\cos \angle OAB > 0$ 。

$$\therefore \cos \angle OAB = \frac{1}{3}$$

$\triangle APQ$ において、余弦定理より

$$PQ^2 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \angle PAQ$$

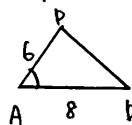
$$= 36 + 36 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{3} = 72 - 24 = 48 \quad \therefore PQ = 4\sqrt{3}$$



$\triangle PAD$ において、余弦定理より

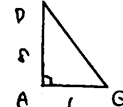
$$PD^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos \angle PAD$$

$$= 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{3} = 100 - 32 = 68 \quad \therefore PD = 2\sqrt{17}$$



$\triangle AQD$ において、三平方の定理より

$$QD^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \quad \therefore QD = 10$$



よって、 $\triangle PQD$ において、余弦定理より

$$\cos \angle Q = \frac{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{17})^2 - 10^2}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{48 + 68 - 100}{2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{17}}$$

$$\sin^2 \angle Q = 1 - \cos^2 \angle Q = 1 - \frac{1}{3 \cdot 17} = 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}$$

$$\sin \angle Q > 0 \quad \therefore \sin \angle Q = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{51}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{51}}$$

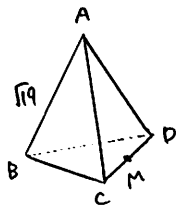
よって

$$\triangle PQD = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PD \cdot \sin \angle Q = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{51}} = 20\sqrt{2}$$

よって (4) より

$$16\sqrt{7} = \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{2} \cdot AH \quad \therefore AH = \frac{12\sqrt{7}}{5} = \frac{6\sqrt{14}}{5}$$

41



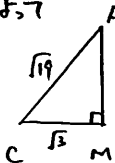
(1) $\triangle ACD$ にあつて

$AC = AD$ である。

CD の中点を M とし

$\angle AMC = 90^\circ$ となる。

よて



三平方の定理より

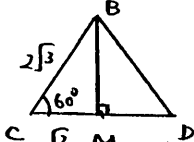
$$AC^2 = AM^2 + CM^2$$

$$(\sqrt{19})^2 = AM^2 + (3)^2$$

$$19 = AM^2 + 9$$

$$\therefore AM^2 = 10, AM > 0 \text{ より } AM = \sqrt{10}$$

また $\triangle BCD$ について 正三角形より



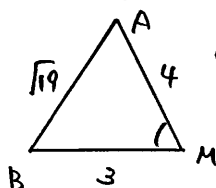
$$CM : BM = 1 : \sqrt{3}$$

$\therefore$

$$BM = \sqrt{3} CM$$

$$= \sqrt{3} \cdot 3 = 3\sqrt{3}$$

よて $\triangle ABM$ について 余弦定理より



$$\cos \angle AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2 \cdot AM \cdot BM}$$

$$= \frac{4^2 + 3^2 - (\sqrt{19})^2}{2 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$= \frac{16 + 9 - 19}{2 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{4}$$

(2) 正四面体 ABCD には

内接する球の中心を

O とする。すると点 O から、各面には OM は

垂線の長さであり、また球の半径に

一致する。よて、 O を頂点とし、各面を

底面とする四面体 4 つは、正四面体

ABCD と合同である。よて 4 つの四面体の

体積の和が V である。よて、正四面体 ABCD の

体積を求めよう。また、正四面体 ABCD

の体積を V 、内接球の半径を r とする。

$$V = \frac{1}{3} \triangle ABC \cdot r + \frac{1}{3} \triangle ACD \cdot r + \frac{1}{3} \triangle ABD \cdot r + \frac{1}{3} \triangle BCD \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$$

$\therefore \triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$ はすべて合同である。

面積は $\frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM = 4\sqrt{3}$ である。

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 4 = 4\sqrt{3}$$

また $\triangle BCD$ は $2\sqrt{3}$ の

正三角形より

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

よて

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}r + \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}r + \frac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}r$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3}r$$

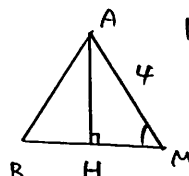
$$= \frac{1}{3} (4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3})r$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{3}r = 5\sqrt{3}r \quad \dots \textcircled{1}$$

また、正四面体 ABCD の

体積 V は、(1) より $\cos \angle AMB = \frac{1}{4}$

である。よて $\triangle ABM$ で点 A から BM



に垂線を AH と下ろすと

AH は正四面体 ABCD

にある。よて $\triangle BCD$ の

面積と $\triangle ABM$ の

高さ h は等しい。

$$\cos \angle AMB = \frac{1}{4} \text{ より}$$

$$\sin^2 \angle AMB = 1 - \cos^2 \angle AMB$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$\sin \angle AMB > 0$ より

$$\sin \angle AMB = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{よて } \frac{AH}{AM} = \frac{\sqrt{15}}{4} = \sin \angle AMB$$

$$\therefore \frac{AH}{AM} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore AH = \frac{\sqrt{15}}{4} AM$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 4 = \sqrt{15}$$

よて 正四面体 ABCD の

体積 V は

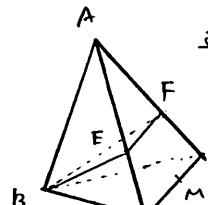
$$V = \frac{1}{3} \triangle BCD \cdot AH$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}$$

よて (1), (2) より

$$5\sqrt{3}r = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{15} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

(3)



平面 BEF は $\epsilon \cdot BCD$

に接する球の中心を O とする。

3点 A, B, M と

ある平面での $\triangle BCD$

に接する球の

球の中心 O は平面 ACD に

接する時に

M の半径が最大となる。

よて $\triangle BNM$ に内接する円の半径を

$AM = 4$ より $AN : NM = 3 : 1$ より $NM = 1$

また $\cos \angle AMB = \frac{1}{4}$ より

$\triangle BMN$ で余弦定理より

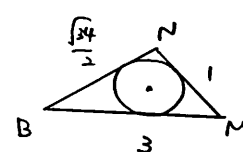
$$BN^2 = MN^2 + BM^2$$

$$- 2 \cdot BM \cdot MN \cdot \cos \angle BMN$$

$$= 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 1 + 9 - \frac{3}{2} = \frac{17}{2}$$

$$\therefore BN > 0 \text{ より } BN = \sqrt{\frac{17}{2}} = \frac{\sqrt{34}}{2}$$



$$\text{また } \sin \angle BMN = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

より

$$\triangle BNM = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot MN \cdot \sin \angle BMN$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

よて、球の半径を r' とすると

$$\triangle BNM = \frac{1}{2} (BM + MN + NB) r'$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{15}}{8} = \frac{1}{2} \left(3 + 1 + \frac{\sqrt{34}}{2} \right) r'$$

$$= \frac{1}{2} \left(4 + \frac{\sqrt{34}}{2} \right) r'$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{8 + \sqrt{34}}{2} r'$$

$$\therefore \frac{3\sqrt{15}}{8} = \left(2 + \frac{\sqrt{34}}{4} \right) r'$$

$$r' = \frac{1}{2 + \frac{\sqrt{34}}{4}} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

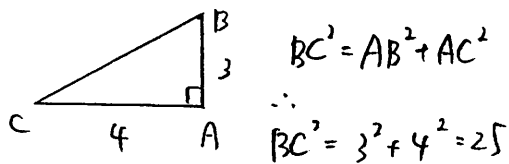
$$= \frac{8 - \sqrt{34}}{8 - 34} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$= \frac{8 - \sqrt{34}}{30} \cdot \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{15} (8 - \sqrt{34})}{20}$$

42

(1) $\triangle ABC$ に $\angle A = 90^\circ$ である。

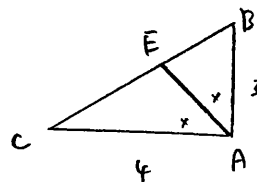


$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\therefore BC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$BC > 0 \text{ より } BC = 5$$

また、 $\angle A$ の二等分線と BC の交点を E とする。



$$AB : AC = BE : EC$$

が成り立つ。

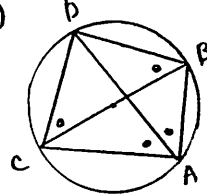
$$\text{よって } BE : EC = 3 : 4$$

よって BE は BC 全体の $\frac{3}{7}$ である。

$$BE = \frac{3}{7} BC$$

$$= \frac{3}{7} \times 5 = \frac{15}{7}$$

(2) $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ である。



$\angle DAB = \angle DCB$ である。...①

($\angle A, \angle D$ は対頂角)

$\angle DAC = \angle DBC$ である。...②

($\angle A, \angle D$ は対頂角)

今、 AD は $\angle A$ の二等分線である。

$\angle DAB = \angle DAC$ である。よって ①②より

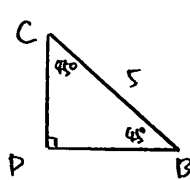
$\triangle DCB$ は $\angle C = \angle B$ の二等分線である。

また、 $\triangle ABC$ は $\angle A = 90^\circ$ である。

BC は円の直径であり、 $\therefore \angle D = 90^\circ$ である。

以上より、 $\triangle DCB$ は $CD = BD$ の二等分線である。

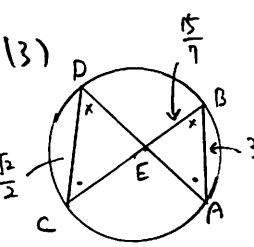
(1) より $BC = 5$ である。



$$CD : BC = 1 : \sqrt{2}$$

$$CD : 5 = 1 : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} CD = 5 \quad \therefore CD = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$



$\triangle EBA$ と $\triangle EDC$ について

$\angle ABC = \angle ADC$ ($\angle A, \angle D$ は対頂角)

$\angle DCB = \angle DAB$ ($\angle A, \angle D$ は対頂角)

より $\triangle EBA$ と $\triangle EDC$ は

相似である。

よって

$$EB : ED = AB : CD$$

$$\frac{15}{7} : ED = 3 : \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore ED = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{15}{7}$$

$$ED = \frac{25\sqrt{2}}{14}$$

また、2つの線分

AD と BC は

垂直である。

$$AE \times ED = BE \times EC \quad \dots (*)$$

$$\therefore (*) \text{ より } BE = \frac{15}{7}$$

$$\text{よって } EC = BC - BE$$

$$= 5 - \frac{15}{7}$$

$$= \frac{20}{7}$$

$\therefore (*)$ に代入して

$$AE \cdot \frac{25\sqrt{2}}{14} = \frac{15}{7} \cdot \frac{20}{7}$$

$$AE = \frac{15}{7} \cdot \frac{20}{7} \cdot \frac{14}{25\sqrt{2}}$$

$$= \frac{24}{7\sqrt{2}}$$

$$= \frac{24\sqrt{2}}{7 \cdot 2}$$

$$= \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

よって

$$AD = AE + ED$$

$$= \frac{12\sqrt{2}}{7} + \frac{25\sqrt{2}}{14}$$

$$= \frac{49\sqrt{2}}{14}$$

$$= \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

(3) (31)

$\triangle ABD$ について余弦定理

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 45^\circ$$

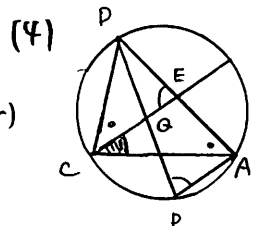
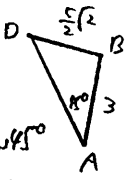
$$\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3^2 + AD^2 - 2 \cdot 3 \cdot AD \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$AD^2 - 3\sqrt{2}AD - \frac{7}{2} = 0$$

$$AD = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18 + 4 \cdot \frac{7}{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$\therefore AD = \frac{3\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$AD > 0 \text{ より } AD = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$



$\triangle ACE$ について、 $\angle DEQ$ は
外角である。つまり、
内角の和に等しい。

$$\therefore \angle DEQ = \angle ECA + \angle EAC = \angle ECA + 45^\circ \dots \textcircled{1}$$

また、 $\angle DPA = \angle DCA$ (円周角) ...②

よって、 $\angle DCA$ は

$$\angle DCA = \angle DCE + \angle ECA$$

$$= 45^\circ + \angle ECA \dots \textcircled{3}$$

よって ①②③より

$$\angle DEQ = \angle DPA$$

である。よって、

四角形 $EQPA$ は

「1つの内角と、その対角の外角が等しい」から

四角形 $EQPA$ は円内接である。

よって2本の線分

DA と DP について

「円内接の四角形の対角線」

より

$$DP \cdot DQ = DA \cdot DE$$

が成り立つ。

$$AD = \frac{7\sqrt{2}}{2}, ED = \frac{25\sqrt{2}}{14}$$

$$\therefore DP \cdot DQ = \frac{7\sqrt{2}}{2} \times \frac{25\sqrt{2}}{14} = \frac{25}{2}$$