1 (1) 解答

$x=2$ のとき，最大値 5

解説

$p=2$ のとき，$f(x)$ に代入して

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2+2px-p^2+p+3 \\ &= -x^2+4x-2^2+2+3 \\ &= -x^2+4x+1 \end{aligned}$$

よって平方完成して

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2+4x+1 \\ &= -(x^2-4x)+1 \\ &= -\{(x-2)^2-2^2\}+1 \\ &= -(x-2)^2+4+1 \\ &= -(x-2)^2+5 \end{aligned}$$

ゆえに，$f(x)$ は $x=2$ のとき，最大値 5 をとる。

(2) 解答

$p \leqq 1$

解説

$f(x)$ を平方完成して

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2+2px-p^2+p+3 \\ &= -(x^2-2px)-p^2+p+3 \\ &= -\{(x-p)^2-p^2\}-p^2+p+3 \\ &= -(x-p)^2+p^2-p^2+p+3 \\ &= -(x-p)^2+p+3 \end{aligned}$$

より，$f(x)$ は $x=p$ で最大値 $p+3$ をとる。条件から，最大値が 4 以下であるので

$$p+3 \leqq 4$$

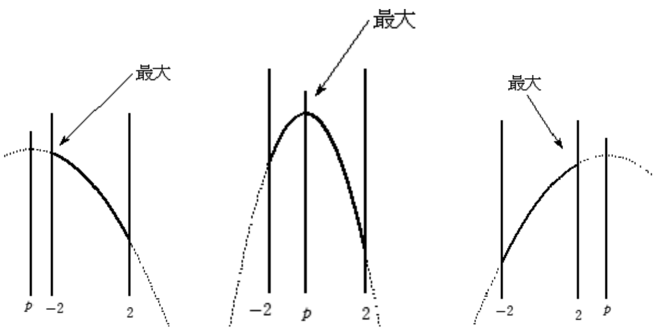
より，解いて $p \leqq 1$

(3) 解答

$p=1,\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$

解説

$y=f(x)$ のグラフは頂点が $(p,\ p+3)$ なので軸は $x=p$ である。また x^2 の係数が -1 なので上に凸である。よって，最大となる x の値は軸が定義域 $-2 \leqq x \leqq 2$ の左側・内側・右側で場合分けをする。



$p<-2$ のとき　$-2 \leqq p \leqq 2$ のとき　$2<p$ のとき

- $p<-2$ のとき

軸 $x=p$ が $x=-2$ よりも左側にあるので，$y=f(x)$ のグラフは定義域内で単調に減少している。ゆえに，最大下がり始めの $x=-2$ のときである。$x=-2$ のとき

$$\begin{aligned} f(-2) &= -(-2)^2+2p(-2)-p^2+p+3 \\ &= -4-4p-p^2+p+3 \\ &= -p^2-3p-1 \end{aligned}$$

である。よって最大値 $-p^2-3p-1\ (x=-2)$ である。条件から最大値が 4 となるので

$$-p^2-3p-1=4$$

より，

$$\begin{aligned} p^2+3p+5 &= 0 \text{ (解の公式を用いると)} \\ p &= \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot5}}{2} \\ &= \frac{-3\pm\sqrt{-11}}{2} \end{aligned}$$

となる。しかし根号内が負になってしまうため，$p<-2$ においては解が存在しない。

- $-2 \leqq p \leqq 2$ のとき

軸 $x=p$ が $x=-2$ と $x=2$ の間にあるので，$y=f(x)$ のグラフは定義域内で上に凸の形状をしている。ゆえに，最大は $x=p$ のときである。$x=p$ のとき

$$\begin{aligned} f(p) &= -(p-p)^2+p+3 \\ &= p+3 \end{aligned}$$

である。よって最大値 $p+3\ (x=p)$ である。条件から最大値が 4 となるので

$$p+3=4$$

より，$p=1$ となる。今，$-2 \leqq p \leqq 2$ であるから $p=1$ はこれを満たす。

- $2<p$ のとき

軸 $x=p$ が $x=2$ よりも右側にあるので，$y=f(x)$ のグラフは定義域内で単調に増加している。ゆえに，最大は登り切った $x=2$ のときである。$x=2$ のとき

$$\begin{aligned} f(2) &= -2^2+2p\cdot2-p^2+p+3 \\ &= -4+4p-p^2+p+3 \\ &= -p^2+5p-1 \end{aligned}$$

である。よって最大値 $-p^2+5p-1\ (x=2)$ である。条件から最大値が 4 となるので

$$-p^2+5p-1=4$$

より，

$$\begin{aligned} p^2-5p+5 &= 0 \text{ (解の公式を用いると)} \\ p &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot5}}{2} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{25-20}}{2} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。今，$2<p$ であるので，$\sqrt{5}$ を 2.2 程度と考えると，$\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ は $p>2$ を満たすが，$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}$ は $p>2$ を満たさない。

以上より，求める p の値は $p=1,\ \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ である。

参考

(2) において，$f(x)$ の最大値が 4 以下となる範囲が $p \leqq 1$ と求められた。これは，すべての x について考えた際，$f(x)$ の最大値が 4 未満であれば，仮に $-2 \leqq x \leqq 2$ という範囲で考えたとしても最大値は必ず 4 未満となる。つまり (3) で，$p<-2$，$-2 \leqq p \leqq 2$，$2<p$ と場合分けしなくても，$p<1$ のときは考えなくてもいいので，$1 \leqq p \leqq 2$，$2<p$ の 2 つの場合だけ調べてもよい。

2 (1) 解答

(2, -4)

解説

$a=2$ のとき，

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax-a^2+2a \\ &= x^2-2\cdot 2x-2^2+2\cdot 2 \\ &= x^2-4x \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-4x \\ &= (x-2)^2-2^2 \\ &= (x-2)^2-4 \end{aligned}$$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフの頂点は (2, -4) である。

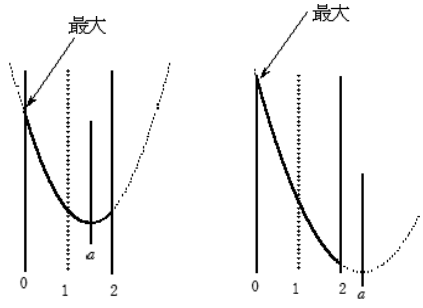
(2) 解答

$a=3$

解説

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2ax-a^2+2a \\ &= (x^2-2ax)-a^2+2a \\ &= \{(x-a)^2-a^2\}-a^2+2a \\ &= (x-a)^2-2a^2+2a \end{aligned}$$

よって $y=f(x)$ のグラフの頂点は $(a,\ -2a^2+2a)$ である。ここで軸は $x=a$ であるから，定義域 $0\leqq x\leqq 2$ において，どのような形状のグラフが見えるか場合分けをする。$a\geqq 1$ であるから，軸は定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中央である $x=1$ よりも必ず右側に存在する。ゆえにグラフより $x=0$ のとき最大となる。



$1\leqq a<2$ のとき　　$2\leqq a$ のとき

このときの最大値は

$$\begin{aligned} f(0) &= 0^2-2\cdot 0-a^2+2a \\ &= -a^2+2a \end{aligned}$$

より，最大値 $-a^2+2a$ $(x=0)$ である。今，条件より最大値が -3 であるから

$$-a^2+2a=-3$$

である。すると

$$\begin{aligned} a^2-2a-3 &= 0 \\ (a-3)(a+1) &= 0 \\ a &= 3,\ -1 \end{aligned}$$

である。今，$a\geqq 1$ であるから $a=-1$ は不適。ゆえに $a=3$ である。

(3) 解答

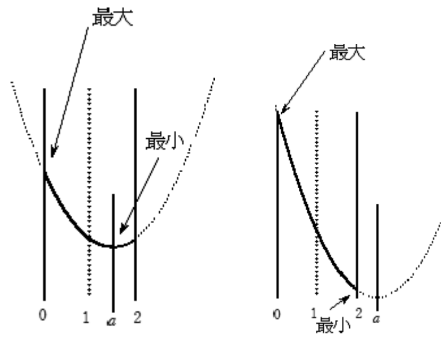
$a=\dfrac{6}{5}$

解説

(2) と同様に考える。$a\geqq 1$ において $f(x)$ は $x=0$ で最大となる。$f(0)=-a^2+2a$ であったから $a\geqq 1$ においては

$$M=-a^2+2a$$

である。最小値は，軸 $x=a$ が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中に入る時と入らない時で場合分けをする。$a\geqq 1$ であることから，a が 2 より小さい時と大きい時で場合分けすると



$1\leqq a<2$ のとき　　$2\leqq a$ のとき

$$\begin{aligned} 1\leqq a<2 \text{ のとき} &\quad x=a \text{ で最小より} \quad m=f(a) \\ 2\leqq a \text{ のとき} &\quad x=2 \text{ で最小より} \quad m=f(2) \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-a)^2-2a^2+2a \\ &= -2a^2+2a \\ f(2) &= 2^2-2a\cdot 2-a^2+2a \\ &= 4-4a-a^2+2a \\ &= -a^2-2a+4 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} 1\leqq a<2 \text{ のとき} &\quad m=-2a^2+2a \\ 2\leqq a \text{ のとき} &\quad m=-a^2-2a+4 \end{aligned}$$

である。

- $1\leqq a<2$ のとき

$$M=-a^2+2a,\ m=-2a^2+2a$$

である。条件より $M+2m=0$ より

$$\begin{aligned} M+2m &= (-a^2+2a)+2(-2a^2+2a) \\ &= -a^2+2a-4a^2+4a \\ &= -5a^2+6a \end{aligned}$$

よって，$-5a^2+6a=0$ を解くと

$$\begin{aligned} -5a^2+6a &= 0 \\ a(5a-6) &= 0 \\ a &= 0,\ \frac{6}{5} \end{aligned}$$

ここで，$1 \leqq a < 2$ に適するのは $a=\dfrac{6}{5}$ である。

- $2 \leqq a$ のとき

$$M=-a^2+2a,\ m=-a^2-2a+4$$

である。条件より $M+2m=0$ より

$$\begin{aligned} M+2m &= (-a^2+2a)+2(-a^2-2a+4) \\ &= -a^2+2a-2a^2-4a+8 \\ &= -3a^2-2a+8 \end{aligned}$$

よって，$-3a^2-2a+8=0$ を解くと

$$\begin{aligned} -3a^2-2a+8 &= 0 \\ 3a^2+2a-8 &= 0 \\ (3a-4)(a+2) &= 0 \\ a &= -2,\ \frac{4}{3} \end{aligned}$$

しかし，$2 \leqq a$ に適するものは存在しないので，$2 \leqq a$ の場合は解がない。

以上より，求める a の値は $a=\dfrac{6}{5}$ である。

3 (1) 解答

(2, 1)

解説

$$\begin{aligned} y &= x^2-4x+5 \\ &= (x-2)^2-2^2+5 \\ &= (x-2)^2+1 \end{aligned}$$

より，頂点の座標は (2, 1) である。

(2) 解答

$k=-3,\ f(x)=x^2-6x+7$

解説

放物線　のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に k だけ平行移動すると，頂点 (2, 1) も $(3,\ 1+k)$ に動く。平行移動で x^2 の係数は変わらないので，移動後のグラフの方程式は

$$y=(x-3)^2+1+k$$

となる。つまりこれが $y=f(x)$ である。ここで，このグラフは点 (1, 2) を通るので，x に 1，y に 2 を代入した

$$2=(1-3)^2+1+k$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} 2 &= (-2)^2+1+k \\ 2 &= 5+k \\ 5+k &= 2 \\ k &= -3 \end{aligned}$$

となる。そして $k=-3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-3)^2+1+k \\ &= (x-3)^2+1-3 \\ &= (x^2-6x+9)-2 \\ &= x^2-6x+7 \end{aligned}$$

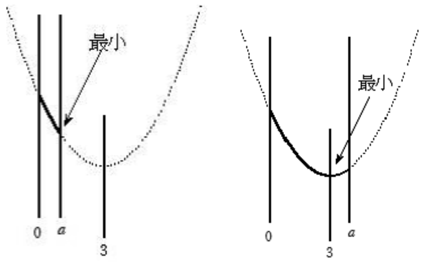
である。

(3) 解答

$$m=\begin{cases} a^2-6a+7 & (0<a<3) \\ -2 & (3 \leqq a) \end{cases}$$

解説

(2) より，$f(x)=(x-3)^2-2$ であるから，$y=f(x)$ は下に凸で頂点が $(3,\ -2)$ である。今，定義域が $0 \leqq x \leqq a$ であるから，最小値を考える際は，軸 $x=3$ が定義域内に入る・入らないで場合分けをする。つまり，定義域の右端の $x=a$ と軸 $x=3$ の位置関係で分ける。



$0<a<3$ のとき　　$3 \leqq a$ のとき

- $0<a<3$ のとき
グラフより，軸 $x=3$ が定義域の右端 $x=a$ よりも右側にあるから，グラフは定義域内で単調減少している。ゆえに最小値は定義域右端の $x=a$ の時である。$x=a$ のとき，

$$f(a)=a^2-6a+7$$

である。つまり，最小値 m は a^2-6a+7 である。
- $3 \leqq a$ のとき
グラフより，軸 $x=3$ が定義域内にあるので，定義域内では下に凸である。(つまり，谷の形状が定義域内で見えることとなる)。ゆえに最小値は軸 $x=3$ の時である。$x=3$ のとき，

$$f(3)=(3-3)^2-2=-2$$

である。つまり，最小値 m は -2 である。

以上より

$$m=\begin{cases} a^2-6a+7 & (0<a<3) \\ -2 & (3 \leqq a) \end{cases}$$

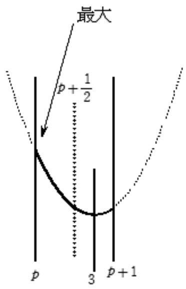
(4) 解答

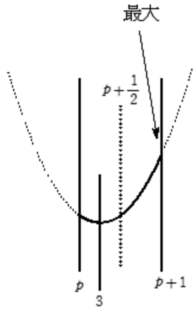
$$M=\begin{cases} p^2-6p+7 & (p<\dfrac{5}{2}) \\ p^2-4p+2 & (p \geqq \dfrac{5}{2}) \end{cases}$$

解説

定義域 $p \leqq x \leqq p+1$ の幅は 1 である。よって，この定義域の中央は $x=p+\dfrac{1}{2}$ である。最大値は放物線の軸 $x=3$ と中央 $x=p+\dfrac{1}{2}$ の位置関係で場

合分けをして求める。





$p+\dfrac{1}{2}<3$ のとき　　　$3 \leqq p+\dfrac{1}{2}$

- $p+\dfrac{1}{2}<3$ のとき，つまり $p<\dfrac{5}{2}$ のとき
  グラフより，定義域の中央 $x = p+\dfrac{1}{2}$ が軸 $x=3$ の左側であるから，軸 $x=3$ から右端 $x=p+1$ までの距離より，軸 $x=3$ から左端 $x=p$ までの距離の方が遠い。放物線は軸に対して対称なので，軸より離れれば離れるほど増加する。よって最大は定義域左端の $x=p$ の時である。$x=p$ のとき,

  $$f(p)=p^2-6p+7$$

  である。つまり，最大値 M は p^2-6p+7 である。
- $3 \leqq p+\dfrac{1}{2}$ のとき，つまり $p \geqq \dfrac{5}{2}$ のとき
  グラフより, 定義域の中央 $x=p+\dfrac{1}{2}$ が軸 $x=3$ の右側であるから，軸 $x=3$ から左端 $x=p$ までの距離より，軸 $x=3$ から右端 $x=p+1$ までの距離の方が遠い。放物線は軸に対して対称なので，軸より離れれば離れるほど増加する。よって最大は定義域右端の $x=p+1$ の時である。$x=p+1$ のとき,

  $$\begin{aligned} f(p+1) &= (p+1)^2-6(p+1)+7 \\ &= (p^2+2p+1)-6(p+1)+7 \\ &= p^2+2p+1-6p-6+7 \\ &= p^2-4p+2 \end{aligned}$$

  である。つまり，最大値 M は p^2-4p+2 である。

以上より

$$M=\begin{cases} p^2-6p+7 & (p<\dfrac{5}{2}) \\ p^2-4p+2 & (p \geqq \dfrac{5}{2}) \end{cases}$$

4 (1) 解答

$$x < -2,\ x > 3$$

解説

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &> 0 \\ (x-3)(x+2) &> 0 \end{aligned}$$

より，$x < -2,\ x > 3$ である。

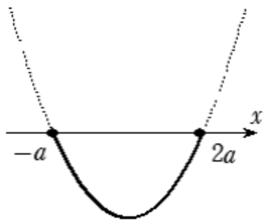
(2) 解答

$$-a \leqq x \leqq 2a,\ a > \frac{3}{2}$$

解説

$$\begin{aligned} x^2 - ax - 2a^2 &\leqq 0 \\ (x+a)(x-2a) &\leqq 0 \end{aligned}$$

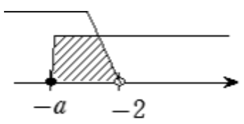
である。ここで，$y = (x+a)(x-2a)$ のグラフを考えると，このグラフは下に凸であり，また x 軸と $x = 2a,\ -a$ で交わる。ここで，$a > 0$ であるから，$2a$ の方が $-a$ よりも大きくなる。よって，グラフで $y \leqq 0$，つまり x 軸より下の部分は $-a \leqq x \leqq 2a$ である。

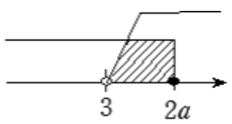


また，不等式①と②を同時に満たす x が存在するためには,

$$\begin{aligned} &x < -2,\ x > 3 \\ &-a \leqq x \leqq 2a \end{aligned}$$

の共通範囲が存在すればいい。よって数直線から





$-a < -2$ と $3 < 2a$ のどちらかが成り立てばいい。解いて

$$a > 2,\ a > \frac{3}{2}$$

となる。a はこのどちらかの範囲に含まれていればいいので，求める a の範囲は $a > \frac{3}{2}$ である。ここで，この範囲内の a はすべて $a > 0$ を満たす。

(3) 解答

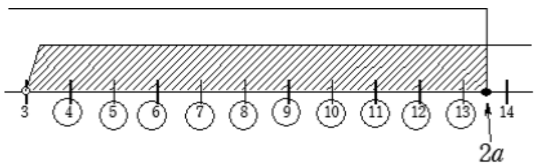
$$\frac{13}{2} \leqq a < 7,\ \text{負の整数は 4 個}$$

解説

不等式①の解は (1) より $x < -2,\ x > 3$ である。よって，この範囲に含まれる正の整数は小さい順に

$$4,\ 5,\ 6,\ 7,\ \cdots\cdots$$

となる。今，①，②の両方を満たす正の整数が１０個なので，その１０個は $4,\ 5,\ \cdots,13$ が該当する。



よって数直線から

$$13 \leqq 2a < 14 \tag{1}$$

が成り立てばよく，すべてを２で割って

$$\frac{13}{2} \leqq a < 7$$

であればよい。ここで，a がこの範囲のとき，$-a$ のとりうる値の範囲を求める。すべてを (-1) 倍すると

$$-\frac{13}{2} \geqq -a > -7$$

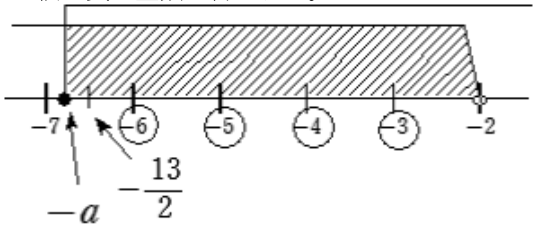
すなわち

$$-7 < -a \leqq -\frac{13}{2}$$

が成り立つ。つまり，$-a$ は数直線上において -7 の目盛りと $-\frac{13}{2}$ の目盛りの間に存在する。よって，数直線から $-a \leqq x < -2$ の中には

$$-6,\ -5,\ -4,\ -3$$

の４個の負の整数が含まれる。



(4) 参考

第 (1) 式において，$2a$ は 13**以上**14**未満** となる。これは，$2a$ が数直線上のどこにならば存在できるかを示した式である。図の数直線において，$2a$ が 13 の目盛りと 14 の目盛りの間にいればいいことは分かるが，13 や 14 とぴったり一致したときはどうな

のか個別に考える。すると，$2a$ がぴったり 13 のとき $3 < x \leqq 2a$ という x の範囲は

$$3 < x \leqq 13 \tag{2}$$

となる。するとこの第 (2) 式の範囲に含まれる整数は $x = 4,\ 5,\ \cdots, 12,\ 13$ の 10 個となる。（$x \leqq 13$ と等号が付いているから，$x = 13$ も範囲に入っている）問題文では，「10 個あるときの a の値の範囲を求めよ」と言っているので，$2a$ がぴったり 13 のとき，つまり $2a = 13$ の場合も整数 x は 10 個になったから，$2a = 13$ はこの問題の答えになれる。
一方で，$2a$ がぴったり 14 のとき $3 < x \leqq 2a$ という x の範囲は

$$3 < x \leqq 14 \tag{3}$$

となる。するとこの第 (3) 式の範囲に含まれる整数は $x = 4,\ 5,\ \cdots, 12,\ 13,\ 14$ の 11 個となる。（$x \leqq 14$ と等号が付いているから，$x = 14$ も範囲に入っている）問題文では，「10 個あるときの a の値の範囲を求めよ」と言っているので，$2a$ がぴったり 14 のとき，つまり $2a = 14$ の場合は整数 x が 11 個になってしまうから，$2a = 14$ はこの問題の答えになれない。
以上より，$2a = 13$ はこの問題の答えになることができ，$2a = 14$ はこの問題の答えになることができないので，第 (1) 式において，$2a$ は 13**以上**14**未満**となっている。

$\boxed{5}$ (1) 解答

$b = a^2 + 2$

解説

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + b \\ &= (x-a)^2 - a^2 + b \end{aligned}$$

よって $f(x)$ は $x = a$ のとき最小値 $-a^2 + b$ をとる。ここで条件より，最小値が 2 であるから

$-a^2 + b = 2$

である。これを b について解くと $b = a^2 + 2$ となる。

(2) 解答

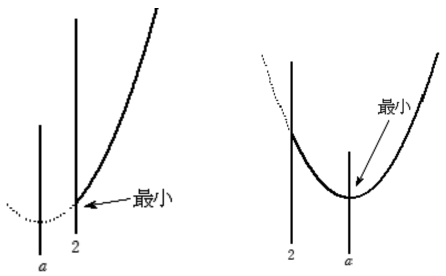
$a = 2 - \sqrt{2}$

解説

(1) より $b = a^2 + 2$ であるから，これを用いると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 2ax + (a^2 + 2) \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + 2 \\ &= (x-a)^2 + 2 \end{aligned}$$

となる。つまり，$f(x)$ は $x = a$ で最小値をとる。軸は $x = a$ より，軸が定義域 $x \geqq 2$ に入る時と入らない時で場合分けをする。つまり，a が 2 より大きい時と小さい時で分ける。ここで $a > 0$ であることに注意すると



$0 < a < 2$ のとき　　$2 \leqq a$ のとき

- $0 < a < 2$ のとき
  グラフより，$x = 2$ のときに最小となる。（軸が定義域よりも左にあるから，定義域内では単調増加しているグラフしか見えない。）ここで $x = 2$ のとき

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - 2a \cdot 2 + a^2 + 2 \\ &= a^2 - 4a + 6 \end{aligned}$$

  より，$f(x)$ は $x = 2$ のとき最小値 $a^2 - 4a + 6$ をとる。今，条件より最小値が 4 であるから

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 6 &= 4 \\ a^2 - 4a + 2 &= 0 \\ a &= -(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 1 \cdot 2} \\ &= 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

  となる。ここで $0 < a < 2$ であるから，$\sqrt{2}$ を 1.4 程度と考え $a = 2 \pm \sqrt{2}$ のおおよその値を調べると，$a = 2 \pm \sqrt{2}$ のうち，この範囲内にあるのは $a = 2 - \sqrt{2}$ のみである。
- $2 \leqq a$ のとき
  グラフより，$x = a$ のときに最小となる。（軸が定義内にあるから，軸の場所で最小となる。）ここで $x = a$ のとき

$$\begin{aligned} f(a) &= (a-a)^2 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

  より，$f(x)$ は $x = a$ のとき最小値 2 をとる。今，条件より最小値が 4 であるが，$2 \leqq a$ のときの最小値は必ず 2 になってしまう。つまり最小値が 4 になるような a は $2 \leqq a$ において存在しない。

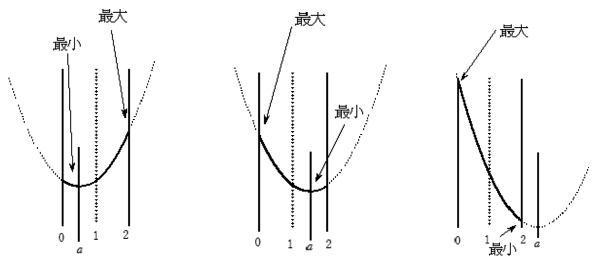
以上より，求める a の値は $a = 2 - \sqrt{2}$ である。

(3) 解答

$a = 2 - \sqrt{3},\ \sqrt{3}$

解説

最小値は軸 $x = a$ が定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の中に入る・入らないで場合分けをする。また最大値は定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央が $x = 1$ であるので，軸 $x = a$ と中央 $x = 1$ の位置関係で場合分けをする。$a > 0$ に注意すると，a を $0 < a < 1,\ 1 \leqq a < 2,\ 2 \leqq a$ の 3 つの範囲で分ける。



$0 \leqq a < 1$ のとき　$1 \leqq a < 2$ のとき　$2 \leqq a$ のとき

- $0 < a < 1$ のとき
  グラフより，$x = a$ のときに最小，$x = 2$ で最大となる。ここで

$$f(a) = 2,\ f(2) = a^2 - 4a + 6$$

  であるので，最大値 $a^2 - 4a + 6$，最小値 2 である。今，条件から最大値と最小値の差が 3 なので

$$\begin{aligned} \text{最大値} - \text{最小値} &= 3 \\ (a^2 - 4a + 6) - 2 &= 3 \\ a^2 - 4a + 1 &= 0 \end{aligned}$$

  となる。解の公式を用いて解くと $a = 2 \pm \sqrt{3}$ となるが，今 $0 < a < 1$ であったから，$\sqrt{3}$ を

1.7 程度と考えて，$a = 2 \pm \sqrt{3}$ のおおよその値を調べると，この範囲にあるものは $a = 2 - \sqrt{3}$ のみである。

- $1 \leqq a < 2$ のとき
  グラフより，$x = a$ のときに最小，$x = 0$ で最大となる。ここで
  $$f(a) = 2,\ f(0) = a^2 + 2$$
  であるので，最大値 $a^2 + 2$，最小値 2 である。今，条件から最大値と最小値の差が 3 なので
  $$\begin{aligned} \text{最大値} - \text{最小値} &= 3 \\ (a^2+2) - 2 &= 3 \\ a^2 &= 3 \end{aligned}$$
  となる。解くと $a = \pm\sqrt{3}$ となるが，今 $1 \leqq a < 2$ であったから，この範囲にあるものは $a = \sqrt{3}$ のみである。
- $2 \leqq a$ のとき
  グラフより，$x = 2$ のときに最小，$x = 0$ で最大となる。ここで
  $$f(2) = a^2 - 4a + 6,\ f(0) = a^2 + 2$$
  であるので，最大値 $a^2 + 2$，最小値 $a^2 - 4a + 6$ である。今，条件から最大値と最小値の差が 3 なので
  $$\begin{aligned} \text{最大値} - \text{最小値} &= 3 \\ (a^2+2) - (a^2 - 4a + 6) &= 3 \\ 4a - 4 &= 3 \\ a &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$
  となる。しかし今 $2 \leqq a$ であるから，$a = \dfrac{7}{4}$ はこれを満たさない。

以上より，求める a の値は $a = 2 - \sqrt{3},\ \sqrt{3}$ である。

6 (1) 解答

$x \leqq 0,\ x \geqq 5$

解説

$$\begin{aligned} x^2-5x &\geqq 0 \\ x(x-5) &\geqq 0 \end{aligned}$$

より，$x \leqq 0,\ x \geqq 5$ である。

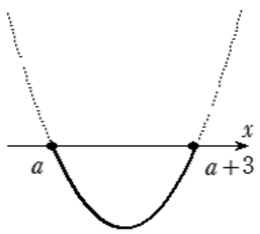
(2) 解答

$a \leqq x \leqq a+3,\ a \leqq 0,\ a \geqq 2$

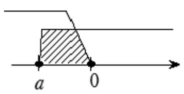
解説

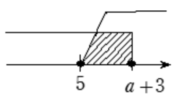
$$(x-a)(x-a-3) \leqq 0$$

について，$y=(x-a)(x-a-3)$ のグラフを考えると，このグラフは下に凸であり，また x 軸と $x=a,\ a+3$ で交わる。ここで $a+3$ の方が a よりも大きいので，グラフで $y \leqq 0$，つまり x 軸より下の部分は $a \leqq x \leqq a+3$ である。



また，不等式①と②を同時に満たす x が存在するには





$a \leqq 0$，または $5 \leqq a+3$

が成り立てばよい。よって解いて

$a \leqq 0$，または $2 \leqq a$

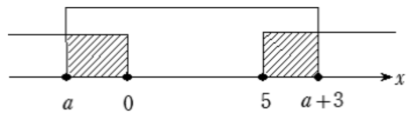
であればいい。以上より，求める a の範囲は $a \leqq 0,\ a \geqq 2$

(3) 解答

$-2 < a \leqq -1,\ 3 \leqq a < 4$

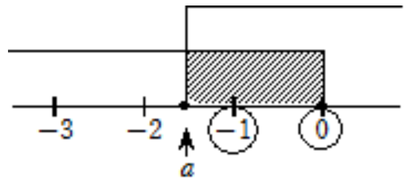
解説

2つの不等式①，②を同時に満たす x について考える。ここで，不等式②を満たす x は $a \leqq x \leqq a+3$ より，a の値にかかわらず範囲の幅が3であり，また $0 \leqq x \leqq 5$ の幅は5であるから，以下の図のようなことは起こらない。



よって，$x \leqq 0$ と $a \leqq x \leqq a+3$ の共通範囲の中に整数が2個のみ含まれる場合と $x \geqq 5$ と $a \leqq x \leqq a+3$ の共通範囲の中に整数が2個のみ含まれる場合を考える。それは (2) より，前者は $a \leqq 0$ のときであり，後者は $a \geqq 2$ の場合である。

- $a \leqq 0$ のとき

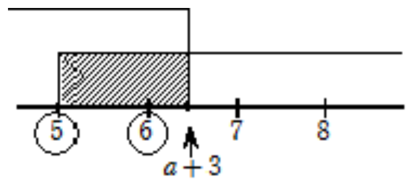


数直線より，$x=-1$ と $x=0$ が該当すればいい。よって

$-2 < a \leqq -1$

であればよい。ここで $a \leqq 0$ であるが，$-2 < a \leqq -1$ に含まれる a はすべて $a \leqq 0$ を満たす。

- $a \geqq 2$ のとき



数直線より，$x=5$ と $x=6$ が該当すればいい。よって

$6 \leqq a+3 < 7$

であればよい。不等式全体から3を引いて

$3 \leqq a < 4$

ここで $a \geqq 2$ であるが，$3 \leqq a < 4$ に含まれる a はすべて $a \geqq 2$ を満たす。

以上より，求める a の範囲は

$-2 < a \leqq -1,\ 3 \leqq a < 4$

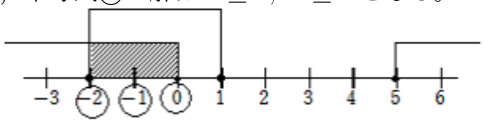
である。

注意

$-2 < a \leqq -1$ など等号をつける位置については，「a は -2 になれるか」「a は -1 になれるか」を考

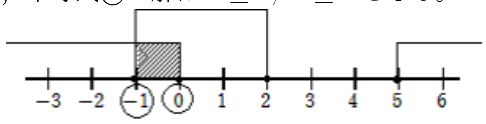
える。つまり，a の値を -1 や -2 に設定して，問題に適するかどうかを考える。

- $a=-2$ のとき
  $a=-2$ とすると，不等式①の解は $-2 \leqq x \leqq 1$，不等式②の解は $x \leqq 0$，$x \geqq 5$ となる。



  同時に満たす整数は $x=-2$，-1，0 の **3 個** である。しかし，問題文より同時に満たす整数は **2 個** でなければならないので，$a=-2$ は題意を満たさない。

- $a=-1$ のとき
  $a=-1$ とすると，不等式①の解は $-1 \leqq x \leqq 2$，不等式②の解は $x \leqq 0$，$x \geqq 5$ となる。



  同時に満たす整数は $x=-1$，0 の **2 個** である。問題文より同時に満たす整数は **2 個** でなければならないので，$a=-1$ は題意を満たす。

以上より，$a=-2$ は答えにすることはできないが，$a=-1$ は答えにすることができるの。よって，a の範囲として -2 には等号が入らず，-1 には等号が入るので $-2<a \leqq -1$ となる。

7 (1) 解答

$$b=-2a,\ (1,\ a^2-a-3)$$

解説

$f(x)=ax^2+bx+a^2-3$ であるから

$$\begin{aligned} f(0) &= a\cdot 0^2+b\cdot 0+a^2-3 \\ &= a^2-3 \\ f(2) &= a\cdot 2^2+b\cdot 2+a^2-3 \\ &= 4a+2b+a^2-3 \end{aligned}$$

条件から $f(0)=f(2)$ なので

$$\begin{aligned} a^2-3 &= 4a+2b+a^2-3 \\ 0 &= 4a+2b \\ 2b &= -4a \\ b &= -2a \end{aligned}$$

である。また，このとき

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2-2ax+a^2-3 \\ &= a(x^2-2x)+a^2-3 \\ &= a\{(x-1)^2-1\}+a^2-3 \\ &= a(x-1)^2-a+a^2-3 \\ &= a(x-1)^2+a^2-a-3 \end{aligned}$$

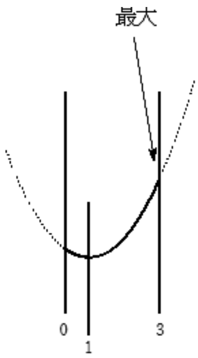
より，$y=f(x)$ の頂点は $(1,\ a^2-a-3)$ である。

(2) 解答

$$a=2$$

解説

x^2 の係数が a である。今，$a>0$ よりグラフは下に凸である。(1) より，$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=1$ であり，$x=1$ で最小となる。



よって，軸 $x=1$ から左端 $x=0$ までの距離より，軸 $x=1$ から右端 $x=3$ までの距離の方が遠い。放物線は軸に対して対称なので，軸より離れれば離れるほど増加する。よって最大は定義域右端の $x=3$ の時である。このとき

$$\begin{aligned} f(3) &= a\cdot 3^2-2a\cdot 3+a^2-3 \\ &= 9a-6a+a^2-3 \\ &= a^2+3a-3 \end{aligned}$$

であるから，最大値は a^2+3a-3 である。条件から，この値が 7 であるから

$$a^2+3a-3=7$$

が成り立つ。解くと

$$\begin{aligned} a^2+3a-3 &= 7 \\ a^2+3a-10 &= 0 \\ (a+5)(a-2) &= 0 \\ a &= -5,\ 2 \end{aligned}$$

となる。ここで $a>0$ であったから $a=-5$ は不適。よって $a=2$ である。

(3) 解答

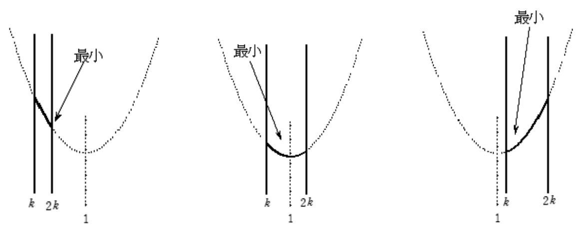
$$\begin{cases} 8k^2-8k+1 & (0<k<\frac{1}{2}) \\ -1 & (\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1) \\ 2k^2-4k+1 & (1<k) \end{cases}$$

解説

(2) より，$a=2$ である。従って (1) より

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2-2\cdot 2x+2^2-3 \\ &= 2x^2-4x+1 \\ &= 2(x^2-2x)+1 \\ &= 2\{(x-1)^2-1\}+1 \\ &= 2(x-1)^2-2+1 \\ &= 2(x-1)^2-1 \end{aligned}$$

つまり，$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=1$ である。今，定義域は $k\leqq x\leqq 2k$ であるから，最小値を考える際は，軸が定義域の内部にある・外部にあるで場合分けをする。



$2k<1$ のとき　$k\leqq 1\leqq 2k$ のとき　$1<k$ のとき

- $2k<1$ のとき
  解いて $k<\frac{1}{2}$ であるが，k が正であることに注意して $0<k<\frac{1}{2}$ のときである。今，$2k<1$ であるから，定義域 $k\leqq x\leqq 2k$ の右端の $x=2k$ よりもさらに右側に軸 $x=1$ がある。よって，定義域内では単調に減少する形状のグラフが見えるので，$f(x)$ は定義域の右端である $x=2k$ で最小となる。$x=2k$ のとき

$$\begin{aligned} f(2k) &= 2(2k)^2-4\cdot 2k+1 \\ &= 8k^2-8k+1 \end{aligned}$$

  であるから，最小値 $8k^2-8k+1$ となる。
- $k\leqq 1\leqq 2k$ のとき
  解いて $k\leqq 1$ かつ $\frac{1}{2}\leqq k$ であるので $\frac{1}{2}\leqq k\leqq 1$ のときである。今，定義域 $k\leqq x\leqq 2k$ の内部に軸 $x=1$ がある。よって，定義域内では下

に凸の形状（つまり谷の形）のグラフが見えるので，$f(x)$ は軸 $x = 1$ で最小となる。$x = 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(1-1)^2 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

であるから，最小値 -1 となる。

- $1 < k$ のとき
今，定義域 $k \leqq x \leqq 2k$ の左端よりも左側に軸 $x = 1$ がある。よって，定義域内では単調に増加する形状のグラフが見えるので，$f(x)$ は定義域の左端である $x = k$ で最小となる。$x = k$ のとき

$$f(k) = 2k^2 - 4k + 1$$

であるから，最小値 $2k^2 - 4k + 1$ となる。

以上より，最小値は

$$\begin{cases} 8k^2 - 8k + 1 & (0 < k < \frac{1}{2}) \\ -1 & (\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1) \\ 2k^2 - 4k + 1 & (1 < k) \end{cases}$$

$\boxed{8}$

(1) $x^2-x-2 \geqq 0$

$(x-2)(x+1) \geqq 0$

∴ $x \leqq -1,\ x \geqq 2$ //

(2)

・$x^2-x-2 \geqq 0$

つまり $x \leqq -1,\ x \geqq 2$ の時

$|x^2-x-2| = x^2-x-2$ (そのまま) より

$y = |x^2-x-2| - 2x$

$= x^2-x-2-2x$

$= x^2-3x-2$

$= (x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2-2$

$= (x-\frac{3}{2})^2-\frac{17}{4}$

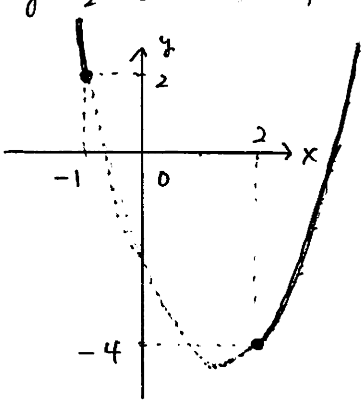
よって このグラフを $x \leqq -1,\ x \geqq 2$ の部分のみ書く。

ここで $x=-1$の時

$y=(-1)^2-3(-1)-2=2$

$x=2$の時

$y=2^2-3\cdot2-2=-4$



(グラフその1)

・$x^2-x-2<0$

つまり $-1<x<2$ の時

$|x^2-x-2| = -(x^2-x-2)$

(中身を(−1)倍) より

$y = |x^2-x-2| - 2x$

$= -(x^2-x-2)-2x$

$= -x^2-x+2$

$= -(x^2+x)+2$

$= -\{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2\}+2$

$= -(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}+2$

$= -(x+\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}$

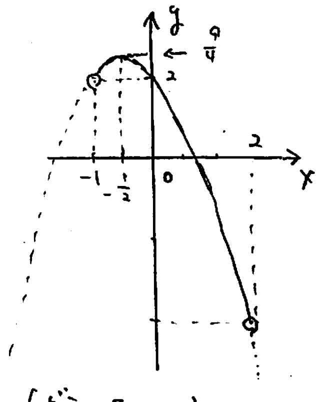
よって このグラフを $-1<x<2$ の部分のみ書く。

ここで、$x=-1$の時

$y=-(-1)^2-(-1)+2=2$

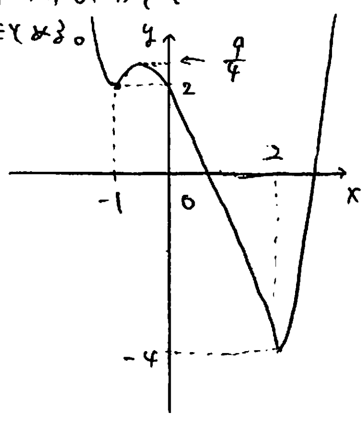
$x=2$の時

$y=-2^2-2+2=-4$.



(グラフその2)

以上、2つのグラフの実線部分を1枚にまとめる。



//

(3) 方程式①を

$k=|x^2-x-2|-2x$ と変形する

これは 2つのグラフ

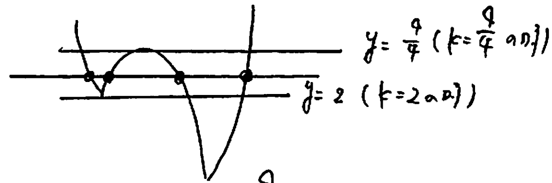
$\begin{cases} y=|x^2-x-2|-2x \\ y=k \end{cases}$

の交点を求めることに等しい。

つまり、方程式①が解を4つ持つとは

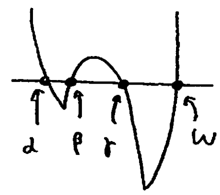
2つのグラフが交点を4つ持つ。

これは(2)のグラフより



$2<k<\frac{9}{4}$ ならばよい。 //

また、解を小さい方から $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ とする。



すると、(2)の結果を あわせて 考えて

「αとωは $y=k$と$y=x^2-3x-2$の交点」

「βとγは $y=k$と$y=-x^2-x+2$の交点」

よって

$k=x^2-3x-2$

∴ $x^2-3x-2-k=0$

$x=\frac{3\pm\sqrt{9-4(-2-k)}}{2}$

$=\frac{3\pm\sqrt{17+4k}}{2}$

$k=-x^2-x+2$

∴ $x^2+x-2+k=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-2+k)}}{2}$

$=\frac{-1\pm\sqrt{9-4k}}{2}$

ゆえに

$\alpha=\frac{3-\sqrt{17+4k}}{2}$　$\beta=\frac{-1-\sqrt{9-4k}}{2}$

$\omega=\frac{3+\sqrt{17+4k}}{2}$　$\gamma=\frac{-1+\sqrt{9-4k}}{2}$

∴ 4つの解の和は

$\alpha+\beta+\gamma+\omega$

$=(\alpha+\omega)+(\beta+\gamma)$

$=3+(-1)=2$ //

9 (1) 解答

$$f(-1)=9,\ a>\frac{9}{8}$$

解説

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2-2(a+1)(-1)-2a+6 \\ &= 1+2a+2-2a+6 \\ &= 9 \end{aligned}$$

また，$f(3)<0$ となる a の範囲は

$$\begin{aligned} f(3) &= 3^2-2(a+1)\cdot 3-2a+6 \\ &= 9-6a-6-2a+6 \\ &= -8a+9 \end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned} -8a+9 &< 0 \\ -8a &< -9 \quad (\text{両辺を }-8\text{ で割る}) \\ a &> \frac{9}{8} \quad (\text{不等号の向きに注意}) \end{aligned}$$

となる。

(2) 解答

$$a=1$$

解説

$$\begin{aligned} D &= \{-2(a+1)\}^2-4\cdot 1\cdot(-2a+6) \\ &= 4(a+1)^2-4(-2a+6) \\ &= 4\{(a+1)^2-(-2a+6)\} \\ &= 4\{(a^2+2a+1)+2a-6\} \\ &= 4(a^2+4a-5) \end{aligned}$$

である。$y=f(x)$ のグラフが x 軸に接するので，$D=0$ が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned} 4(a^2+4a-5) &= 0 \\ a^2+4a-5 &= 0 \\ (a+5)(a-1) &= 0 \\ a &= -5,\ 1 \end{aligned}$$

となる。ここで条件より，接点の x 座標が $-1<x<3$ の範囲に存在しなければならない。

- $a=-5$ のとき
  $f(x)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2(-5+1)x-2(-5)+6 \\ &= x^2+8x+16 \\ &= (x+4)^2 \end{aligned}$$

  より，$y=f(x)$ は $x=-4$ で x 軸と接する。しかし，$-1<x<3$ を満たさないので不適。

- $a=1$ のとき
  $f(x)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2(1+1)x-2\cdot 1+6 \\ &= x^2-4x+4 \\ &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

  より，$y=f(x)$ は $x=2$ で x 軸と接する。これは $-1<x<3$ を満たすので適する。

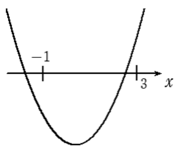
以上より，求める a の値は $a=1$ である。

(3) 解答

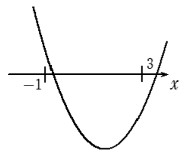
$$a=1,\ a\geqq\frac{9}{8}$$

解説

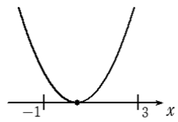
$y=f(x)$ のグラフが $-1<x<3$ の範囲で x 軸とただ 1 つの共有点を持つのは次の 5 つの場合である。



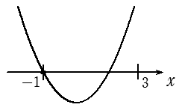
①



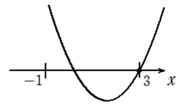
②



③



④



⑤

① $x=-1$ のとき $y<0$，かつ，$x=3$ のとき $y>0$
(1) の結果より，$f(-1)=9$，$f(3)=-8a+9$ である。ここで，$x=-1$ のときは，a の値にかかわらず常に $y>0$ であるから，この①のような状況は絶対に起こらない。

② $x=-1$ のとき $y>0$，かつ，$x=3$ のとき $y<0$
(1) の結果より，$f(-1)=9$，$f(3)=-8a+9$ である。ここで，$x=-1$ のときは，a の値にかかわらず常に $y>0$ であるから，$-8a+9<0$ ならばよい。この a の不等式を解いて $a>\frac{9}{8}$

③ $-1<x<3$ の範囲で接する
これは (2) の結果より，$a=1$ ならばよい。

④ $x=-1$ のときに $y=0$
図のようになればいい。しかし，$x=-1$ のときは，a の値にかかわらず常に $y>0$ であるから，この④のような状況は絶対に起こらない。

⑤ $x=3$ のときに $y=0$
図のようになればいい。ここで，$x=3$ のとき

$y=-8a+9$ より，$y=0$ となるのは $a=\dfrac{9}{8}$ のときである。このとき，$f(x)$ の式に $a=\dfrac{9}{8}$ を代入すると

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-2\left(\frac{9}{8}+1\right)x-2\cdot\frac{9}{8}+6 \\ &= x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{4} \\ &= \frac{1}{4}(4x^2-17x+15) \\ &= \frac{1}{4}(x-3)(4x-5) \end{aligned}$$

となるので，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と $x=3$ と $x=\dfrac{5}{4}$ で交わる。$\dfrac{5}{4}$ は -1 と 3 の間の数なので，$a=\dfrac{9}{8}$ のときは確かに $-1<x<3$ の範囲にただ 1 つの共有点を持つ。

以上①〜⑤より，条件に適する a の範囲は $a>\dfrac{9}{8}$ と $a=1$ と $a=\dfrac{9}{8}$ である。これらをまとめると

$$a=1,\ a\geqq\frac{9}{8}$$

となり，これが求める a の値の範囲である。

10 (1) 解答

$4 < a < 8$

解説

$x = 4$ が不等式①を満たすとは，①に $x = 4$ を代入してできる不等式が成り立つということである。よって，①に $x = 4$ を代入すると

$$\begin{aligned} 4^2 - a \cdot 4 + (a-4)^2 &< 0 \\ 16 - 4a + a^2 - 8a + 16 &< 0 \\ a^2 - 12a + 32 &< 0 \\ (a-4)(a-8) &< 0 \end{aligned}$$

より，解いて $4 < a < 8$ となる。

(2) 解答

$a \leqq \frac{8}{3}$，$8 \leqq a$

解説

不等式①が解を持たないとは，①の左辺を「$y =$」としたときに，x がどんな値であったとしても $y < 0$ にはならないということである。つまり，$y = x^2 - ax + (a-4)^2$ のグラフにおいて，x の値にかかわらず常に $y \geqq 0$ である。これは x^2 の係数が正であるから，

i. x 軸と共有点を持たない。つまり $D < 0$
ii. x 軸に接する。つまり $D = 0$

の 2 通りの場合である。結局これら 2 通りを合わせて，$D \leqq 0$ ならばよい。

$$\begin{aligned} D &= a^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a-4)^2 \\ &= a^2 - 4(a^2 - 8a + 16) \\ &= -3a^2 + 32a - 64 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} -3a^2 + 32a - 64 &\leqq 0 \\ 3a^2 - 32a + 64 &\geqq 0 \\ (3a-8)(a-8) &\geqq 0 \end{aligned}$$

より，解いて $a \leqq \frac{8}{3}$，$8 \leqq a$ である。

(3) 解答

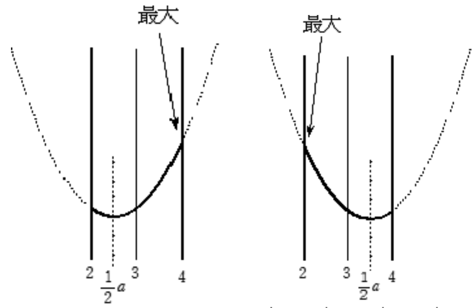
$4 < a < 5 + \sqrt{5}$

解説

(2) と同様，①の左辺を「$y =$」とする。$2 \leqq x \leqq 4$ において常に $y < 0$ となるには，$2 \leqq x \leqq 4$ における y の最大値が 0 未満ならばよい。ここで

$$\begin{aligned} y &= x^2 - ax + (a-4)^2 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (a-4)^2 \end{aligned}$$

より，$y = x^2 - ax + (a-4)^2$ のグラフの軸は $x = \frac{1}{2}a$ である。また，定義域 $2 \leqq x \leqq 4$ の中央は $x = 3$ であるから，$2 \leqq x \leqq 4$ における最大値は軸 $x = \frac{1}{2}a$ と中央 $x = 3$ との位置関係で場合分けをする。



軸 < 中央　　　中央 $\leqq$ 軸

- 軸 < 中央のとき
つまり，$\frac{1}{2}a < 3$ より $a < 6$ のとき，グラフより $x = 4$ のとき最大となる。ここで $x = 4$ のとき $y < 0$ となる a の値の範囲は (1) の結果から $4 < a < 8$ である。ここで今，$a < 6$ より，共通範囲をとって

$4 < a < 6$ $\cdots$ ⓐ

である。

- 中央 $\leqq$ 軸のとき
つまり，$3 \leqq \frac{1}{2}a$ より $a \geqq 6$ のとき，グラフより $x = 2$ のとき最大となる。ここで $x = 2$ のとき

$$\begin{aligned} y &= 2^2 - a \cdot 2 + (a-4)^2 \\ &= 4 - 2a + a^2 - 8a + 16 \\ &= a^2 - 10a + 20 \end{aligned}$$

である。ここで $a^2 - 10a + 20 = 0$ の解は $a = 5 \pm \sqrt{5}$ より，$y < 0$ となる a の値の範囲は $a^2 - 10a + 20 < 0$ を解いて

$5 - \sqrt{5} < a < 5 + \sqrt{5}$

である。ここで今，$a \geqq 6$ より，共通範囲をとって

$6 \leqq a < 5 + \sqrt{5}$ $\cdots$ ⓑ

である。

以上ⓐ，ⓑの範囲をくっつけた

$4 < a < 5 + \sqrt{5}$

が求める a の値の範囲である。

11 (1) 解答

$y=f(x)$ の頂点 $(-2,\ -5)$，$y=g(x)$ の頂点 $(2p,\ 3p^2)$

解説

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2+4x-1 \\ &= (x+2)^2-2^2-1 \\ &= (x+2)^2-5 \end{aligned}$$

より，$y=f(x)$ の頂点は $(-2,\ -5)$ である。

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2-4px+7p^2 \\ &= (x-2p)^2-(2p)^2+7p^2 \\ &= (x-2p)^2+3p^2 \end{aligned}$$

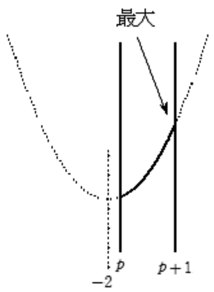
より，$y=g(x)$ の頂点は $(2p,\ 3p^2)$ である。

(2) 解答

$p=1$

解説

$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=-2$ であり，そこが最小である。条件より，p は正の数であり，$p+1$ も正の数であるので -2 より大きい。よって，定義域 $p \leqq x \leqq p+1$ は必ず軸の右側に存在するので，定義域内で $y=f(x)$ のグラフは単調に増加している。よって，$x=p+1$ のとき最大である。



$x=p+1$ のとき

$$\begin{aligned} f(p+1) &= (p+1)^2+4(p+1)-1 \\ &= (p^2+2p+1)+4p+4-1 \\ &= p^2+6p+4 \end{aligned}$$

であり，条件よりこれが 11 であるから

$$\begin{aligned} p^2+6p+4 &= 11 \\ p^2+6p-7 &= 0 \\ (p+7)(p-1) &= 0 \\ p &= -7,\ 1 \end{aligned}$$

である。ここで，$p>0$ であるから，$p=1$ である。

(3) 解答

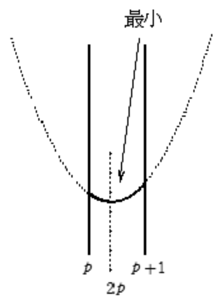
$p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

解説

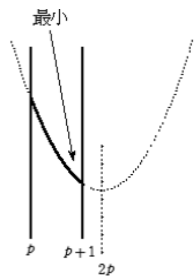
以下，定義域 $p \leqq x \leqq p+1$ における $f(x)$ の最小値を m_f，$g(x)$ の最小値を m_g とする。(2) の結果より，$p \leqq x \leqq p+1$ において，$f(x)$ は $x=p$ で最小となる。よって

$$\begin{aligned} m_f &= f(p) \\ &= p^2+4p-1 \end{aligned}$$

である。また，$g(x)$ の最小値は，$y=g(x)$ のグラフの軸 $x=2p$ が定義域 $p \leqq x \leqq p+1$ に入る・入らないで場合分けをする。ここで，p は正の数なので，$2p$ の方が p よりも必ず大きくなる。よって，次の 2 通りを考える。



①



②

① $2p<p+1$ のとき
この p の不等式を解くと $p<1$ であるが，今 $p>0$ であるので，共通範囲より $0<p<1$ のときを考える。このとき, 定義域 $p \leqq x \leqq p+1$ 内に軸 $x=2p$ が存在するので，$g(x)$ は $x=2p$ で最小となる。このとき,

$$\begin{aligned} m_g &= g(2p) \\ &= (2p-2p)^2+3p^2 \\ &= 3p^2 \end{aligned}$$

である。条件より，$m_f=m_g$ となる p を求めるので，$m_f=p^2+4p-1$，$m_g=3p^2$ より

$$\begin{aligned} p^2+4p-1 &= 3p^2 \\ 2p^2-4p+1 &= 0 \\ p &= \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-2\cdot 1}}{2} \\ &= \frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで今, $\sqrt{2}$ が 1 と 2 の間の数であることから, $0<p<1$ を満たすのは $p=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ である。

② $p+1 \leqq 2p$ のとき
この p の不等式を解くと $1 \leqq p$ である。このとき，定義域 $p \leqq x \leqq p+1$ の右側に軸 $x=2p$ が存在するので，$y=g(x)$ は定義域内で単調に減少する。よって，$g(x)$ は $x=p+1$ で最小

となる。このとき，

$$\begin{aligned}m_g &= g(p+1)\\&= (p+1)^2-4p(p+1)+7p^2\\&= (p^2+2p+1)-(4p^2+4p)+7p^2\\&= 4p^2-2p+1\end{aligned}$$

である。条件より，$m_f=m_g$ となる p を求めるので，$m_f=p^2+4p-1$，$m_g=4p^2-2p+1$ より

$$\begin{aligned}p^2+4p-1 &= 4p^2-2p+1\\3p^2-6p+2 &= 0\\p &= \frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-3\cdot 2}}{3}\\&= \frac{3\pm\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。ここで今，$\sqrt{3}$ が 1 と 2 の間の数であることから，$1\leqq p$ を満たすのは $p=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ である。

以上より，求める p の値は

$$p=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{3+\sqrt{3}}{3}$$

である。

12

(1) $x^2-3ax+2a^2<0$

$(x-a)(x-2a)<0$

ここで a は正の数より

a より $2a$ の方が大きいので

解は

$a<x<2a$

(2) $x^2-(a+6)x+5(a+1)=0$

より

$D=(a+6)^2-4\cdot1\cdot5(a+1)$

$=a^2+12a+36-20a-20$

$=a^2-8a+16$

$=(a-4)^2$

重解を持つので $D=0$ となればよく

$(a-4)^2=0$ から $a=4$

この時 ①の解は (1)より

$4<x<8$

なので、この範囲に含まれる整数は

$x=5,6,7$

(3) ①を満たす整数3個のうち

2個は4と5である。

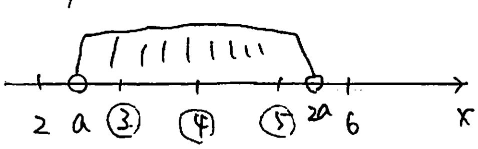
よって

(I) $x=3,4,5$ が①を満たす

(II) $x=4,5,6$ が①を満たす

の2通りがある。

・(I)の時



よって数直線より

$2\leqq a<3$ かつ $5<2a\leqq6$

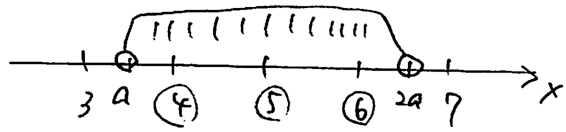
が成り立てばよい。よって

$2\leqq a<3$ かつ $\frac{5}{2}<a\leqq3$

より $\frac{5}{2}<a<3$

ならばよい。

・(II)の時



よって数直線より

$3\leqq a<4$ かつ $6<2a\leqq7$

が成り立てばよい。よって

$3\leqq a<4$ かつ $3<a\leqq\frac{7}{2}$

より $3<a\leqq\frac{7}{2}$

ならばよい。

以上 (I)(II)より

$\frac{5}{2}<a<3,\ 3<a\leqq\frac{7}{2}$

13

(1) $x^2-2x \leqq 0$

$x(x-2) \leqq 0$

∴ $0 \leqq x \leqq 2$ ……①

(2)

$x^2-ax-2a^2<0$

$(x-2a)(x+a)<0$ …(*)

ここで 2a と −a について

a は 0 よりも大きいので

2a の方が −a よりも大きい

∴(*)の解は

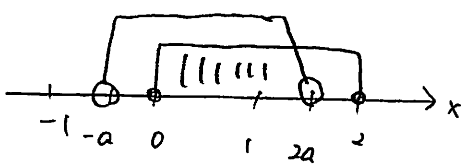
$-a<x<2a$ …②

また、a は 0 と 1 の間なので

−a は −1 と 0 の間

2a は 0 と 2 の間

の数である。よって①と②の共通範囲は、数直線より



$0 \leqq x < 2a$

(3) 不等式②の解は

(I) $a>0$ の時、2a の方が −a より大きいので

$-a<x<2a$

(II) $a=0$ の時、(*)に代入して $x^2<0$

これを満たす x は存在しない。

(III) $a<0$ の時、

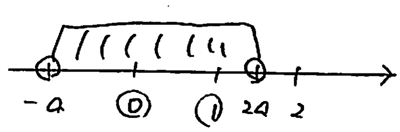
−a は正の数に、2a は負の数より

−a の方が 2a よりも大きいので

$2a<x<-a$

となる。よって上記の3通りについて調べる。

(I) $a>0$ の時



$1<2a \leqq 2$

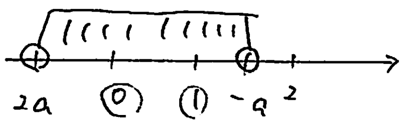
ならばよい。解いて $\frac{1}{2}<a \leqq 1$

であればよく、これは $a>0$ を満たす。

(II) $a=0$ の時

不等式②に解はないので、この場合は不適

(III) $a<0$ の時



$1<-a \leqq 2$

ならばよい。解いて、$-2 \leqq a < -1$

であればよく、これは $a<0$ を満たす。

以上より

$-2 \leqq a < -1,\ \frac{1}{2}<a \leqq 1$

$\boxed{14}$

(1) $y = x^2 - 2ax + 2a + 15$

$= (x^2 - 2ax) + 2a + 15$

$= (x-a)^2 - a^2 + 2a + 15$

頂点 $(a,\ -a^2+2a+15)$ //

(2) $y = x^2 - 2ax + 2a + 15$

について

$D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a+15)$

$= 4a^2 - 4(2a+15)$

$= 4\{a^2 - (2a+15)\}$

$= 4(a^2 - 2a - 15)$

よって x軸に接するのは $D=0$ より

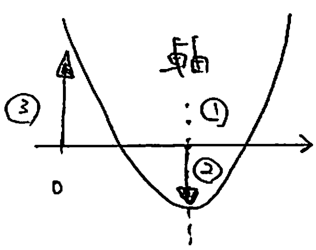
$4(a^2 - 2a - 15) = 0$

$a^2 - 2a - 15 = 0$

$(a-5)(a+3) = 0$

$\therefore\ a = 5,\ -3$ //

(3)



図のようになるには

① 軸 > 0

② 頂点のy座標 < 0

③ $x=0$ の時 $y>0$

の3つが成り立てばよい。

(1)より、軸は $x=a$

頂点のy座標は $-a^2+2a+15$

よって

① $a>0$

② $-a^2+2a+15<0$) (−1)を掛

$a^2-2a-15>0$

$(a-5)(a+3)>0$

$\therefore\ a<-3,\ a>5$

③ $y = x^2 - 2ax + 2a + 15$

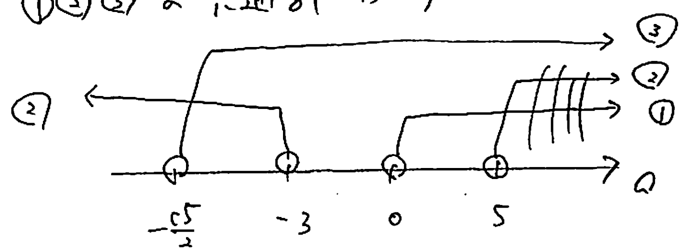
に $x=0$ を代入して

$y = 0^2 - 2a \cdot 0 + 2a + 15$

$= 2a + 15$

よって $2a+15>0$ $\quad \therefore\ a > -\frac{15}{2}$

①②③の共通部分より



$a > 5$ //

15

(1) 2次不等式の解が $x \leqq -2,\ x \geqq b$ となるので、それは

$$(x+2)(x-b) \geqq 0$$

を解いた結果である。上式を展開して

$$x^2+2x-bx-2b \geqq 0$$

∴

$$x^2-(b-2)x-2b \geqq 0$$

この式が条件より

$$x^2-ax+a+2 \geqq 0$$

と一致するので

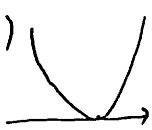
$$\begin{cases} -(b-2)=-a & (x\text{の係数}) \\ -2b=a+2 & (\text{定数項}) \end{cases}$$

が成り立つ。このaとbの連立方程式を解いて

$$b=0,\ a=-2$$

これは $b>-2$ を満たす。

(2) 2次不等式 $x^2-ax+a+2 \geqq 0$ において $y=x^2-ax+a+2$ とおくと、すべての実数xについて $y \geqq 0$ となればよい。これは $y=x^2-ax+a+2$ のグラフが

(I)  (II) 

の2通りになればよい。(I)は $D<0$、(II)は $D=0$ より、あわせて $D \leqq 0$ ならばよい。

ここで $D=(-a)^2-4\cdot1\cdot(a+2)$
$=a^2-4a-8$
なので $a^2-4a-8 \leqq 0$ を解く。

ここで $a^2-4a-8=0$ は、解の公式より
$a=2\pm\sqrt{4+8}=2\pm2\sqrt{3}$

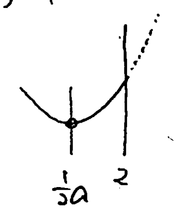
よって $a^2-4a-8 \leqq 0$ は

$$2-2\sqrt{3} \leqq a \leqq 2+2\sqrt{3}$$

(3) (2)と同様 $y=x^2-ax+a+2$ とおく。
$x \leqq 2$ における最小値が0以上ならばよい
(頂点理論)

よって $y=x^2-ax+a+2$
$=\left(x-\frac{1}{2}a\right)^2-\frac{1}{4}a^2+a+2$ より軸 $x=\frac{1}{2}a$

① $\frac{1}{2}a<2$ (つまり $a<4$ の時)

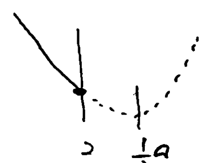


$x=\frac{1}{2}a$ で最小。
$x=\frac{1}{2}a$ の時 $y=-\frac{1}{4}a^2+a+2$

よって $-\frac{1}{4}a^2+a+2 \geqq 0$
$a^2-4a-8 \leqq 0$
∴ $2-2\sqrt{3} \leqq a \leqq 2+2\sqrt{3}$

ここで $a<4$ より共通範囲から $2-2\sqrt{3} \leqq a < 4$ ①

② $\frac{1}{2}a \geqq 2$ (つまり $a \geqq 4$ の時)



$x=2$ で最小。
$x=2$ の時 $y=2^2-a\cdot2+a+2$
$=-a+6$

よって $-a+6 \geqq 0$ ∴ $a \leqq 6$

ここで $a \geqq 4$ より共通範囲から $4 \leqq a \leqq 6$ ②

以上①②より、2つの範囲をあわせて

$$2-2\sqrt{3} \leqq a \leqq 6$$

66

(1) $y = x^2 - 4x + a$

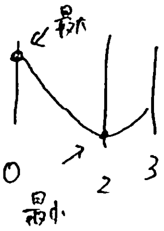
$= (x-2)^2 - 2^2 + a$

$= (x-2)^2 - 4 + a$

頂点 $(2, -4+a)$

(2) (1)より軸は $x=2$ であり

また、グラフは下に凸である



よって $x=0$ で最大，$x=2$ で最小．

$x=0$ の時 $y = 0^2 - 4\cdot 0 + a$

$= a$

$x=2$ の時 $y = (2-2)^2 - 4 + a$

$= -4 + a$

以上より

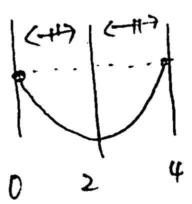
最大値 $a \ (x=0)$

最小値 $a-4 \ (x=2)$

(3) 軸が $x=2$ であるから

$x=0$ の時と同じ y 座標

になるのは $x=4$ の時である。

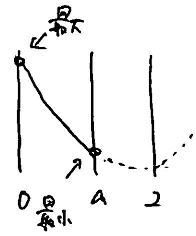


よって定義域 $0 \leqq x \leqq a$ に

軸が含まれるかどうか、そして

$x=4$ が含まれるかどうかで場合分け。

(I) $0 < a \leqq 2$ の時



軸が定義域の右側

より、定義域内で

グラフは単調に減少する。よって

$x=0$ で最大、$x=a$ で最小

$x=0$ の時 $y = 0^2 - 4\cdot 0 + a = a$

$x=a$ の時 $y = a^2 - 4\cdot a + a = a^2 - 3a$

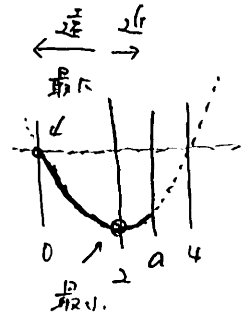
条件より、最大値と最小値の差が9より

$a - (a^2 - 3a) = 9$

$a^2 - 4a + 9 = 0$

$a = 2 \pm \sqrt{4-9}$

より解は存在しない。



(II) $2 < a \leqq 4$ の時

軸が定義域内なので、

グラフは下に凸のグラフである。

軸から $x=0$ の方が軸から $x=a$ よりも遠いので

$x=0$ で最大、$x=2$ で最小である。これは(2)と同じ

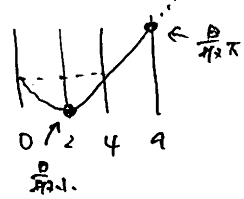
なので、最大値 a、最小値 $a-4$

条件より、最大値と最小値の差が9より

$a - (a-4) = 9$

$\therefore \ 4 = 9$ これは成り立たない。

(III) $a > 4$ の時



グラフより $x=2$ で最小、$x=a$ で最大

最大値と最小値の差が9より

$(a^2 - 3a) - (a-4) = 9$

$a^2 - 4a - 5 = 0$

$(a-5)(a+1) = 0$

$\therefore \ a = 5, -1$

$a > 4$ を満たすのは $a=5$ のみ

以上より、求める a の値は $a=5$

17 (1) 解答

$(2a,\ -4a^2+4)$

解説

$$
\begin{aligned}
y &= x^2-4ax+4\\
&= (x-2a)^2-(2a)^2+4\\
&= (x-2a)^2-4a^2+4
\end{aligned}
$$

より，頂点の座標は

$(2a,\ -4a^2+4)$

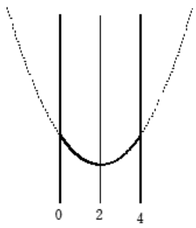
である。

(2) 解答

最大値 $4\ (x=0,\ 4)$，最小値 $0\ (x=2)$

解説

$a=1$ のとき，$y=x^2-4x+4$ となる。また，(1) より軸は $x=2$ となる。ゆえに $0 \leqq x \leqq 4$ において，$x=2$ で最小となり，また $x=0,\ 4$ で最大となる。



ここで，$x=2$ のとき $y=0$，$x=0$ のとき $y=4$ より

最大値 $4\ (x=0,\ 4)$，最小値 $0\ (x=2)$

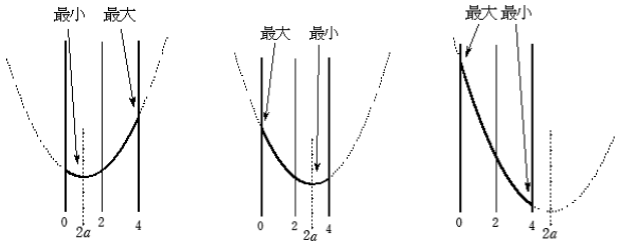
である。

(3) 解答

$a=\sqrt{2}$

解説

(1) から，軸は $x=2a$ である。最小値は軸が定義域に入る・入らないで場合分けをし，最大値は軸と定義域 $0 \leqq x \leqq 4$ の中央 $x=2$ との位置関係で場合分けをする。$a>0$ であることも考えると，軸が「定義域の左半分」「定義域の右半分」「定義域の右外側」の3パターンに分ける。



$0<2a \leqq 2$　　$2<2a \leqq 4$　　$4<2a$

- $0<2a \leqq 2$ のとき，つまり $0<a \leqq 1$ のとき
グラフより，$0 \leqq x \leqq 4$ において

$x=2a$ で最小，$x=4$ で最大

である。ここで

$$
\begin{aligned}
x=2a \quad \text{のとき} \quad y &= (2a-2a)^2-4a^2+4\\
&= -4a^2+4\\
x=4 \quad \text{のとき} \quad y &= 4^2-4a\cdot 4+4\\
&= 20-16a
\end{aligned}
$$

であるので，最大値 $20-16a$，最小値 $-4a^2+4$ である。今，条件より最大値と最小値の和が0であるから

$$
\begin{aligned}
(20-16a)+(-4a^2+4) &= 0\\
-4a^2-16a+24 &= 0\\
a^2+4a-6 &= 0\\
a &= -2 \pm \sqrt{10}
\end{aligned}
$$

となる。ここで $\sqrt{10}$ は3と4の間の数より，$-2+\sqrt{10}$ は1よりも大きな数となる。よって，$a=-2\pm\sqrt{10}$ はどちらも $0<a \leqq 1$ を満たさないので不適である。

- $2<2a \leqq 4$ のとき，つまり $1<a \leqq 2$ のとき
グラフより，$0 \leqq x \leqq 4$ において

$x=2a$ で最小，$x=0$ で最大

である。ここで

$$
\begin{aligned}
x=2a \quad \text{のとき} \quad y &= (2a-2a)^2-4a^2+4\\
&= -4a^2+4\\
x=0 \quad \text{のとき} \quad y &= 0^2-4a\cdot 0+4\\
&= 4
\end{aligned}
$$

であるので，最大値 4，最小値 $-4a^2+4$ である。今，条件より最大値と最小値の和が0であるから

$$
\begin{aligned}
4+(-4a^2+4) &= 0\\
-4a^2+8 &= 0\\
a^2 &= 2\\
a &= \pm\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となる。ここで $1<a \leqq 2$ を満たすのは $a=\sqrt{2}$ のみである。

- $4 < 2a$ のとき，つまり $2 < a$ のとき
  グラフより，$0 \leqq x \leqq 4$ において

  $$x = 4 \text{ で最小，} x = 0 \text{ で最大}$$

  である。ここで

  $$\begin{array}{lll} x=4 \quad \text{のとき} \quad y & = 4^2 - 4a \cdot 4 + 4 \\ & = 20 - 16a \\ x=0 \quad \text{のとき} \quad y & = 0^2 - 4a \cdot 0 + 4 \\ & = 4 \end{array}$$

  であるので，最大値 4，最小値 $20 - 16a$ である。今，条件より最大値と最小値の和が 0 であるから

  $$\begin{aligned} 4 + (20 - 16a) &= 0 \\ -16a + 24 &= 0 \\ -16a &= 24 \\ a &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

  となる。しかし $2 < a$ を満たさないので不適である。

以上より，求める a の値は

$$a = \sqrt{2}$$

である。

(18)

(1)

$$x^2-(a^2+a)x+a^3$$

$$=(x-a^2)(x-a)$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & x & -a \to & -a \\ 1 & & -a^2 \to & -a^2 \\ \hline & & a^3 & -(a^2+a) \end{array}\right)$$

(2)

$$x^2-(a^2+a)x+a^3<0$$

$$(x-a^2)(x-a)<0$$

を解く。ここで a と a^2 の大小関係を考える

・$a<a^2$ の時

つまり $a^2-a>0$

$a(a-1)>0$

∴ $a<0$, $a>1$. で $a>0$ より $a>1$ の時

a よりも a^2 の方が大きいので

① の解は $a<x<a^2$

・$a>a^2$ の時

つまり $a^2-a<0$

$a(a-1)<0$

∴ $0<a<1$ の時

a^2 よりも a の方が大きいので.

① の解は $a^2<x<a$

・$a=a^2$ の時

つまり $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$

$a=0, 1$. $a>0$ より $a=1$ の時

① に $a=1$ を代入すると

$(x-1^2)(x-1)<0$ つまり $(x-1)^2<0$

これを満たす実数は存在しない。

以上より

$$\begin{cases} a>1 \text{ の時} & a<x<a^2 \\ a=1 \text{ の時} & \text{解なし} \\ 0<a<1 \text{ の時} & a^2<x<a \end{cases}$$

(3) $0<a<1$ や $a=1$ の時は

整数が4個も含まれないので. $a>1$ の時である.

ここで. $a=2$ の時 ①の解は $2<x<4$

となり. 満たす整数は $x=3$ の1個のみ

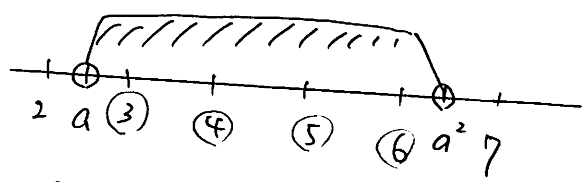
$a=3$ の時は ①の解は $3<x<9$

となり 満たす整数は $x=4, 5, 6, 7, 8$ の

5個となる。よって ①を満たす整数が

4個となるのは $2<a<3$ の時である。

この時. a が2と3の間なので.



a^2 が 6と7の間にあれば. ①を満たす整数は $x=3, 4, 5, 6$ の4個となる。

よって

$$6<a^2\leqq 7$$

より

$$\sqrt{6}<a\leqq\sqrt{7}$$

これは. $2<a<3$ を満たす.

∴

$$\sqrt{6}<a\leqq\sqrt{7}$$

19

(1) $a=1$ の時

$f(x) = 1\cdot x^2 + 2\cdot 1\cdot x - 1^2 + 1$

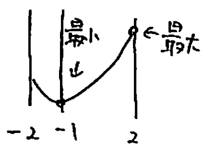
$= x^2 + 2x$

$= (x+1)^2 - 1^2$

$= (x+1)^2 - 1$

よって頂点 $(-1, -1)$ 下に凸

定義域が $-2 \leqq x \leqq 2$ より



$x=-1$ で最小

$x=2$ で最大

ここで、$f(-1) = (-1+1)^2 - 1 = -1$

$f(2) = 2^2 + 2\cdot 2 = 8$

∴ 最大値 8、最小値 -1

(2)

$f(x) = ax^2 + 2ax - a^2 + 1$

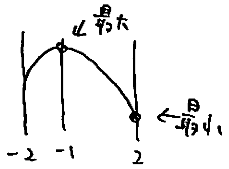
$= a(x^2 + 2x) - a^2 + 1$

$= a\{(x+1)^2 - 1^2\} - a^2 + 1$

$= a(x+1)^2 - a - a^2 + 1$

頂点 $(-1, -a^2 - a + 1)$

$a<0$ より上に凸のグラフ



$x=-1$ で最大

$x=2$ で最小

ここで、

$f(-1) = a(-1+1)^2 - a^2 - a + 1$

$= -a^2 - a + 1$

$f(2) = a\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 - a^2 + 1$

$= 4a + 4a - a^2 + 1$

$= -a^2 + 8a + 1$

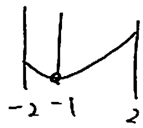
最小値 $-a^2 + 8a + 1$

最大値 $-a^2 - a + 1$

(3) $a>0$ と $a<0$ で場合分け。

(2)より、頂点 $(-1, -a^2 - a + 1)$

・$a>0$ の時 グラフは下に凸



$x=-1$ で最小である。

$f(-1) = -a^2 - a + 1$ より

最小値 $-a^2 - a + 1$ であり、これが -1 より

$-a^2 - a + 1 = -1$

$a^2 + a - 2 = 0$

$(a+2)(a-1) = 0$ ∴ $a = -2, 1$

$a>0$ を満たすのは $a=1$ のみ。

・$a<0$ の時

(2)より、$x=2$ で最小値 $-a^2 + 8a + 1$ をとる。

これが今、-1 なので

$-a^2 + 8a + 1 = -1$

$a^2 - 8a - 2 = 0$

$a = 4 \pm \sqrt{16-(-2)} = 4 \pm 3\sqrt{2}$

ここで $a<0$ を満たすのは $a = 4 - 3\sqrt{2}$ のみ

以上より

$a = 1, 4 - 3\sqrt{2}$

$\boxed{20}$

(1) 2次方程式 $x^2+2ax+2a^2-a-6=0$ …①

について

$D/4 = a^2-1\cdot(2a^2-a-6)$

$= a^2-2a^2+a+6$

$= -a^2+a+6$

である。①が異なる2つの解を持つのは

$D>0$ であればよいので

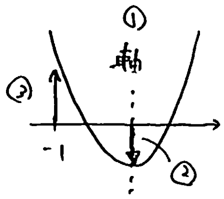
$-a^2+a+6>0$) (-1)倍

$a^2-a-6<0$

$(a-3)(a+2)<0$

∴ $-2<a<3$

(2) $x>-1$ の範囲に①が異なる2つの解を持つ。つまり $y=x^2+2ax+2a^2-a-6$ のグラフは $x>-1$ の範囲において x軸と異なる2つの交点を持つ。



それは

① 軸 >-1

② 頂点のy座標 <0

③ $x=-1$ の時 $y>0$

の3つを調べればよい。

$y=x^2+2ax+2a^2-a-6$

$=(x+a)^2-a^2+2a^2-a-6$

$=(x+a)^2+a^2-a-6$

頂点 $(-a,\ a^2-a-6)$

より

① 軸 $x=-a$ より

$-a>-1$ ∴ $a<1$ …①

② $a^2-a-6<0$

$(a-3)(a+2)<0$

∴ $-2<a<3$ …②

③ $x=-1$ の時

$y=(-1)^2+2a(-1)+2a^2-a-6$

$=1-2a+2a^2-a-6$

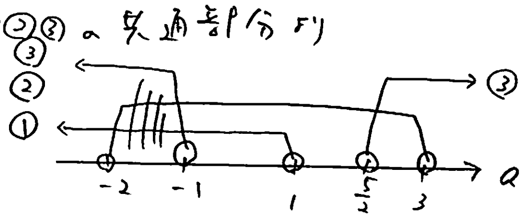
$=2a^2-3a-5$

より $2a^2-3a-5>0$

$(2a-5)(a+1)>0$

∴ $a<-1,\ a>\frac{5}{2}$ …③

①②③の共通部分より

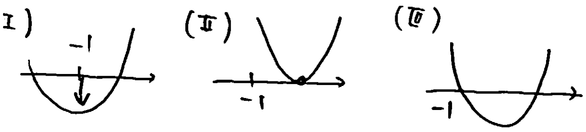


$-2<a<-1$

(3) 少なくとも1つの解を持つのは

・解を2つ持つ → (2)と同じ

・解を1つ持つ → 以下3通り



(I) $x=-1$ の時 $y<0$.

(2)の③より $-1<a<\frac{5}{2}$.

(II) 接点が $x>-1$ の範囲

$D=0$ となるのは(1)より $a=-2,\ 3$.

$a=-2$ の時 $y=x^2-4x+4=(x-2)^2$ で適する

$a=3$ の時 $y=x^2+6x+9=(x+3)^2$ で不適

(III) $x=-1$ と $x>-1$ にもう1点交わる.

$x=-1$ の時 $y=0$ となるのは(2)③より $a=-1,\ \frac{5}{2}$.

$a=-1$ の時 $y=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$ で適する.

$a=\frac{5}{2}$ の時 $y=x^2+5x+4=(x+1)(x+4)$ で不適.

以上 (2),(I),(II),(III)より

$-2<a<-1,\ -1<a<\frac{5}{2},\ a=-2,\ a=-1$ をまとめて

$-2\leqq a<\frac{5}{2}$

21

(1) $f(x)=ax^2-3ax+2a+1$

$=a(x^2-3x)+2a+1$

$=a\{(x-\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2\}+2a+1$

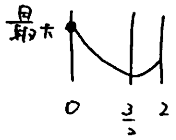
$=a(x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}a+2a+1$

$=a(x-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}a+1$

頂点$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}a+1)$ //

(2) aの正・負で場合分け

・$a>0$の時 グラフは下に凸



$x=0$で最大

$x=0$の時

$y=a\cdot 0^2-3a\cdot 0+2a+1$

$=2a+1$

条件より これが a^2-14 より

$2a+1=a^2-14$

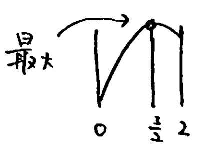
$a^2-2a-15=0$

$(a-5)(a+3)=0$

$\therefore a=5, -3$

$a>0$を満たすのは$a=5$.

・$a<0$の時 グラフは上に凸



$x=\frac{3}{2}$で最大

$x=\frac{3}{2}$の時

$y=a(\frac{3}{2}-\frac{3}{2})^2-\frac{1}{4}a+1$

$=-\frac{1}{4}a+1$

条件より これがa^2-14より

$-\frac{1}{4}a+1=a^2-14$

$-a+4=4a^2-56$

$4a^2+a-60=0$

$$\left(\begin{array}{ccccc} 4 & & -15 & \to & -15 \\ 1 & \times & 4 & \to & 16 \\ \hline & -60 & & 1 & \end{array}\right)$$

$(4a-15)(a+4)=0$

$\therefore a=\frac{15}{4}, -4$

$a<0$を満たすのは$a=-4$

以上より

$a=5, -4$ //

(3) $y=f(x)$のグラフを x軸方向にaだけ 動かしたグラフが $y=g(x)$

$y=f(x)$の頂点は $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}a+1)$

よって $y=g(x)$のグラフの頂点は

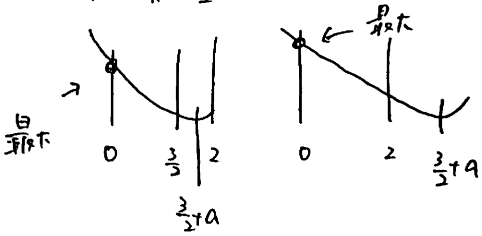
$(\frac{3}{2}+a, -\frac{1}{4}a+1)$

となる。また、平行移動によって x^2の係数は変わらないので x^2の係数は aである。

よって aの正負によって形状が変わるので、まずは$a>0$, $a<0$で分ける。

・$a>0$の時、グラフは下に凸。

ここで、$y=g(x)$の軸 $x=\frac{3}{2}+a$ は、$x=\frac{3}{2}$よりも右に存在する。



つまり、定義域$0\leqq x\leqq 2$の中央の$x=1$よりも必ず右に存在するので、$0\leqq x\leqq 2$においては $x=0$で最大となる。

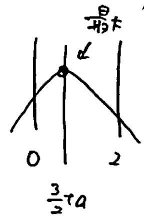
$g(x)=a\{x-(\frac{3}{2}+a)\}^2-\frac{1}{4}a+1$

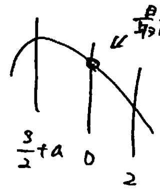
より

$g(0)=a(\frac{3}{2}+a)^2-\frac{1}{4}a+1$

$=a^3+3a^2+2a+1$

・$a<0$の時、グラフは上に凸





☆ $0<\frac{3}{2}+a$ の時

つまり $-\frac{3}{2}<a$ で、$a<0$より

$-\frac{3}{2}<a<0$の時

軸が定義域内より

$x=\frac{3}{2}+a$で最大

よって $g(\frac{3}{2}+a)=-\frac{1}{4}a+1$

☆ $\frac{3}{2}+a\leqq 0$

つまり $a\leqq -\frac{3}{2}$の時

定義域内では単調に減少

よって $x=0$で最大

$g(0)=a^3+3a^2+2a+1$

以上より $g(x)$の最大値は

$$\begin{cases} a>0,\ a\leqq -\frac{3}{2}\text{の時} & a^3+3a^2+2a+1 \\ -\frac{3}{2}<a<0\text{の時} & -\frac{1}{4}a+1 \end{cases}$$

//

(22)

(1) $x^2-4x \leqq 0$

$x(x-4) \leqq 0$

$\therefore\ \underline{0 \leqq x \leqq 4}$

(2) $f(x)=x^2-2x+a^2-3a-17$

x軸と異なる2個の共有点を持つので

$D/4=(-1)^2-1\cdot(a^2-3a-17)$

$=1-a^2+3a+17$

$=-a^2+3a+18$

より D>0 ならばよい

$\therefore\ -a^2+3a+18>0$

(−1)倍 $a^2-3a-18<0$

$(a-6)(a+3)<0$

$\therefore\ \underline{-3<a<6}$

(3) $a=5$ の時

$f(x)=x^2-2x+5^2-3\cdot5-17$

$=x^2-2x+25-15-17$

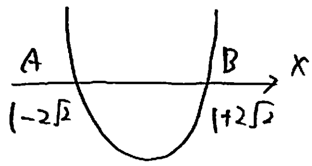
$=x^2-2x-7$

よって $y=x^2-2x-7$ とx軸との交点は

$x^2-2x-7=0$

$x=1\pm\sqrt{(-1)^2-(-7)}$

$=1\pm\sqrt{8}=1\pm2\sqrt{2}$



よって x座標の大きい方をB, x座標の小さい方をA とおくと

$AB=(1+2\sqrt{2})-(1-2\sqrt{2})$

$=\underline{4\sqrt{2}}$

(4)

$f(x)=x^2-2x+a^2-3a-17$

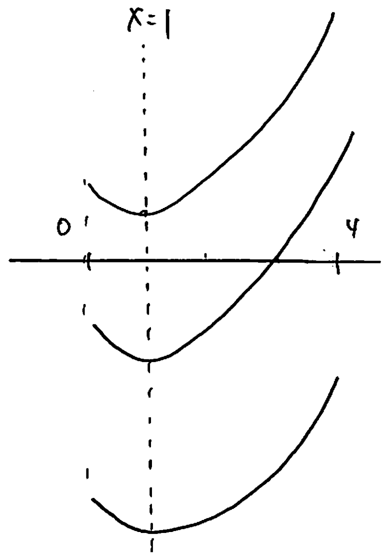
$=(x-1)^2-1^2+a^2-3a-17$

$=(x-1)^2+a^2-3a-18$

頂点 $(1,\ a^2-3a-18)$

下に凸のグラフである。

(1)の解は $0\leqq x\leqq 4$ より



$0\leqq x\leqq 4$ における

f(x)の最小値は $x=1$ の時

f(x)の最大値は $x=4$ の時

$0\leqq x\leqq 4$

において $y=f(x)$ と

x軸が共有点を持つには

$$\begin{cases} x=1 \text{の時}, & y\leqq 0 \\ x=4 \text{の時} & y\geqq 0 \end{cases}$$

が成り立てばよい。

$x=1$ の時

$y=(1-1)^2+a^2-3a-18$

$=a^2-3a-18$

より

$a^2-3a-18\leqq 0$

$(a-6)(a+3)\leqq 0$

$\therefore\ -3\leqq a\leqq 6$ …(I)

$x=4$ の時

$y=4^2-2\cdot4+a^2-3a-17$

$=a^2-3a-9$

$\therefore\ a^2-3a-9\geqq 0$

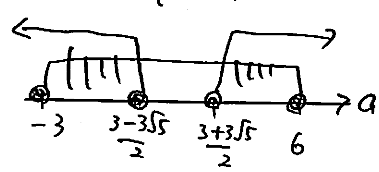
ここで $a^2-3a-9=0$

は $a=\dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$

$\therefore\ a\leqq\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2},\ a\geqq\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}$

…(II)

(I)(II)の共通範囲から



$-3\leqq a\leqq\dfrac{3-3\sqrt{5}}{2}$

$\underline{\dfrac{3+3\sqrt{5}}{2}\leqq a\leqq 6}$

23

(1)

$f(x) = -2x^2 + 4ax - 4a + 10$

$= -2(x^2 - 2ax) - 4a + 10$

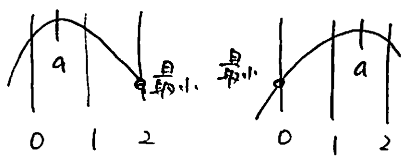
$= -2\{(x-a)^2 - a^2\} - 4a + 10$

$= -2(x-a)^2 + 2a^2 - 4a + 10$

$f(x)$は $x=a$ の時、最大値

$\underline{2a^2 - 4a + 10}$ をとる。

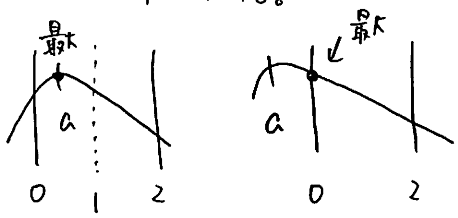
(2) $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値は グラフが上に凸 より 定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央 $x=1$ と軸の位置関係で考える。



$x=2$ で最小となるのは 軸 $x=a$ が中央 $x=1$ よりも左にある時である。よって

$a \leqq 1$ …(*)

である。また最大値が $\frac{17}{2}$ より 軸 $x=a$ が定義域に入る時と入らない時で分ける。



・$0 \leqq a \leqq 2$ の時

(*)から $a \leqq 1$ より $0 \leqq a \leqq 1$ の時

$x=a$ で最大

ここで

$f(a) = -2(a-a)^2 + 2a^2 - 4a + 10$

$= 2a^2 - 4a + 10$

これが今 $\frac{17}{2}$ より

$2a^2 - 4a + 10 = \frac{17}{2}$

$4a^2 - 8a + 3 = 0$

$(2a-1)(2a-3) = 0$

$\therefore a = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

ここで $0 \leqq a \leqq 1$ を満たすのは $a = \frac{1}{2}$

・$a < 0$ の時

$x=0$ で最大

ここで

$f(0) = -2 \cdot 0^2 + 4a \cdot 0 - 4a + 10$

$= -4a + 10$

であり、これが $\frac{17}{2}$ より

$-4a + 10 = \frac{17}{2}$

$-4a = -\frac{3}{2}$

$\therefore a = \frac{3}{8}$

しかしこれは $a < 0$ を満たさず。

以上より

$\underline{a = \frac{1}{2}}$

(3) $a = \frac{1}{2}$ より 軸が $x = \frac{1}{2}$、そして上に凸のグラフである。また定義域 $-t \leqq x \leqq 2t$ について

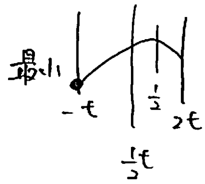
中央は $\frac{(-t)+2t}{2} = \frac{t}{2}$

より 軸 $x = \frac{1}{2}$ と中央 $x = \frac{t}{2}$ の位置関係で分ける。

・$\frac{t}{2} < \frac{1}{2}$ の時

解いて $t < 1$ の時。

今 $t > 0$ より $0 < t < 1$ の時



軸 $x = \frac{1}{2}$ が 中央 $x = \frac{1}{2}t$ よりも右 なので $x = -t$ で最小

ここで

$f(-t) = -2(-t)^2 + 2(-t) + 8$

$= -2t^2 - 2t + 8$

で、これが -4 より

$-2t^2 - 2t + 8 = -4$

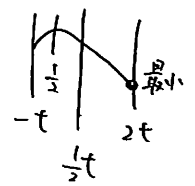
$t^2 + t - 6 = 0$

$(t+3)(t-2) = 0$

$\therefore t = -3, 2$

ともに $0 < t < 1$ を満たさない。

・$\frac{1}{2} \leqq \frac{t}{2}$、解いて $t \geqq 1$ の時



軸 $x = \frac{1}{2}$ が 中央 $x = \frac{1}{2}t$ よりも左 なので $x = 2t$ で最小

ここで

$f(2t) = -2(2t)^2 + 2 \cdot 2t + 8$

$= -8t^2 + 4t + 8$

これが -4 より

$-8t^2 + 4t + 8 = -4$

$2t^2 - t - 3 = 0$

$(2t-3)(t+1) = 0$

$t = \frac{3}{2}, -1$

$t \geqq 1$ を満たすのは $t = \frac{3}{2}$

以上より $\underline{t = \frac{3}{2}}$

$\boxed{24}$

(1) $y=x^2-4ax+b$ のグラフが

点 $(1,1)$ を通るので

代入して

$$1=1^2-4a\cdot1+b$$

$$1=1-4a+b$$

$$\therefore\ b=4a$$ //

(2) (1)より $b=4a$ より

$$y=x^2-4ax+4a$$

である。このグラフが

x軸と接するので

$$D/4=(-2a)^2-1\cdot4a$$

$$=4a^2-4a$$

において、$D=0$ である。

よって

$$4a^2-4a=0$$

$$a(a-1)=0$$

$$\therefore\ a=0,\ 1$$ //

・$a=0$ の時、代入して

$$y=x^2$$

よって接点の座標は

$(0,0)$ //

・$a=1$ の時、代入して

$$y=x^2-4x+4=(x-2)^2$$

よって接点の座標は

$(2,0)$ //

(3) $x\geqq1$ において、常に

$f(x)>0$ が成り立つ。

よって、赤点理論から

$x\geqq1$ における $f(x)$ の

最小値が0より大きければ

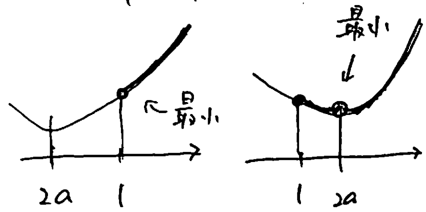
よい。

$$f(x)=x^2-4ax+4a$$

$$=(x-2a)^2-(2a)^2+4a$$

$$=(x-2a)^2-4a^2+4a$$

より軸 $x=2a$



・$2a<1$ の時

解いて $a<\frac{1}{2}$ の時

$x\geqq1$ における $f(x)$ の最小値

は $x=1$ の時

ここで $f(1)=1^2-4a\cdot1+4a$

$$=1$$

となり、これは正の値である。

つまり、$a<\frac{1}{2}$ であれば、

どんな a の値であっても

最小値 >0 となる。…(I)

・$1\leqq2a$ の時

解いて $a\geqq\frac{1}{2}$ の時

$x\geqq1$ における $f(x)$ の

最小値は $x=2a$ の時

ここで

$$f(2a)=(2a-2a)^2-4a^2+4a$$

$$=-4a^2+4a$$

より、最小値 $-4a^2+4a$

$$\therefore\ -4a^2+4a>0$$

$$a^2-a<0$$

$$a(a-1)<0$$

$$\therefore\ 0<a<1$$

今、$a\geqq\frac{1}{2}$ より

共通範囲をとって

$$\frac{1}{2}\leqq a<1\ \cdots(\mathrm{II})$$

以上、(I)(II)から

a の範囲をくっつけて

$$a<1$$ //

25

(1) $f(x)=x^2-(a+1)x+a^2+a-1$

$$=\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+a^2+a-1$$

$$=\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{a^2+2a+1}{4}+a^2+a-1$$

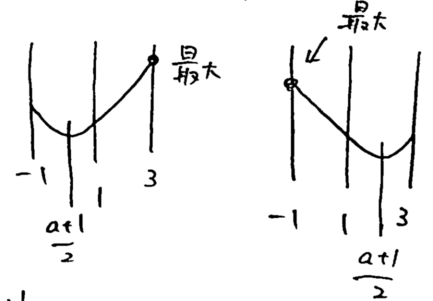
$$=\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{-a^2-2a-1+4a^2+4a-4}{4}$$

$$=\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{3a^2+2a-5}{4}$$

頂点 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{3a^2+2a-5}{4}\right)$ //

(2) 定義域 $-1\leqq x\leqq 3$ の中央は $x=1$ である。よってグラフは下に凸より

最大値は中央 $x=1$ と軸 $x=\frac{a+1}{2}$ の位置関係で分ける。



・$\frac{a+1}{2}<1$

解いて $a+1<2$ ∴ $a<1$ の時

軸が中央 $x=1$ の左より

$x=3$ で最大

よって

$M=f(3)$

$=3^2-(a+1)\cdot 3+a^2+a-1$

$=9-3a-3+a^2+a-1$

$=a^2-2a+5$

・$1\leqq\frac{a+1}{2}$

解いて $2\leqq a+1$ ∴ $a\geqq 1$ の時

軸が中央 $x=1$ の右より $x=-1$ で最大

∴

$M=f(-1)$

$=(-1)^2-(a+1)(-1)+a^2+a-1$

$=1+a+1+a^2+a-1$

$=a^2+2a+1$

以上より

$$M=\begin{cases}a^2-2a+5 & (a<1)\\ a^2+2a+1 & (a\geqq 1)\end{cases}$$ //

(3) $a>0$ より 軸 $x=\frac{a+1}{2}$ は $\frac{1}{2}$ よりも大きくなる。

最小値は軸が定義域に入るかどうかで分ける。

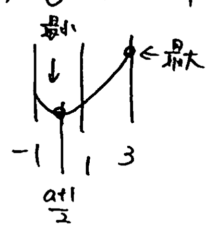
軸が $x=3$ と一致するのは

$\frac{a+1}{2}=3$ ∴ $a=5$

よって 最小値は $a=5$ が境界

(2)より 最大は $a=1$ が境界

(I) $0<a<1$ の時



$x=\frac{a+1}{2}$ で最小

$x=3$ で最大

ここで

$$m=f\left(\frac{a+1}{2}\right)=\left(\frac{a+1}{2}-\frac{a+1}{2}\right)^2+\frac{3a^2+2a-5}{4}$$

$$=\frac{3a^2+2a-5}{4}$$

$M=f(3)=a^2-2a+5$

条件より $M-4m=0$ より

$$(a^2-2a+5)-4\cdot\frac{3a^2+2a-5}{4}=0$$

$a^2-2a+5-(3a^2+2a-5)=0$

$-2a^2-4a+10=0$

$a^2+2a-5=0$

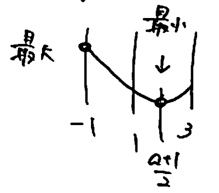
$a=-1\pm\sqrt{1-(-5)}$

$=-1\pm\sqrt{6}$

$\sqrt{6}$ は 2と3の間より

$0<a<1$ を満たすものはない

・$1\leqq a<5$



$x=\frac{a+1}{2}$ で最小

$x=-1$ で最大

∴ $m=f\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{3a^2+2a-5}{4}$

$M=f(-1)=a^2+2a+1$

条件より $M-4m=0$

$$a^2+2a+1-4\cdot\frac{3a^2+2a-5}{4}=0$$

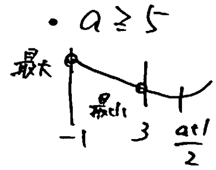
$-2a^2+6=0$

$a=\pm\sqrt{3}$

$1\leqq a<5$ を満たすのは

$a=\sqrt{3}$

・$a\geqq 5$



$x=3$ で最小

$x=-1$ で最大

$m=f(3)=a^2-2a+5$

$M=f(-1)=a^2+2a+1$

条件より $M-4m=0$

$a^2+2a+1-4(a^2-2a+5)=0$

$-3a^2+10a-19=0$

$3a^2-10a+19=0$

$$a=\frac{5\pm\sqrt{25-3\cdot 19}}{3}$$

a が実数にならず不適

以上より

$a=\sqrt{3}$ //

26

(1) $y = x^2 + 2ax + 2a^2 + 4a - 5$

点$(0,0)$を通るので代入して

$$0 = 0^2 + 2a \cdot 0 + 2a^2 + 4a - 5$$

$\therefore \quad 2a^2 + 4a - 5 = 0$

解の公式より

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 2(-5)}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{14}}{2}$$

(2) グラフがx軸と共有点を持つので、$D \geqq 0$である。

$$D/4 = a^2 - 1 \cdot (2a^2 + 4a - 5)$$

$$= a^2 - 2a^2 - 4a + 5$$

$$= -a^2 - 4a + 5$$

よって

$-a^2 - 4a + 5 \geqq 0$) $\times(-1)$

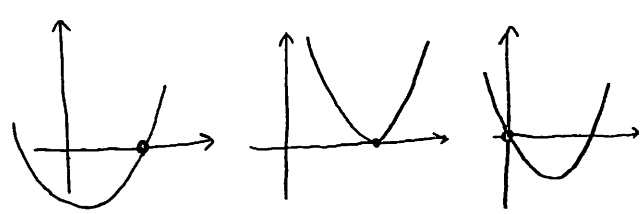
$a^2 + 4a - 5 \leqq 0$

$(a+5)(a-1) \leqq 0$

$\therefore \quad -5 \leqq a \leqq 1$

(3)

(I) (II) (III)



次の3通りである。

(I) x軸の正の部分と負の部分に1つずつ

(II) x軸の正の部分で接する

(III) 原点と正の部分に1つずつ

(I)の時、$x=0$の時、$y<0$ならばよい。

$x=0$の時、$y = 2a^2 + 4a - 5$である。

よって $2a^2 + 4a - 5 < 0$ ならばよい。

(1)の結果を用いて、この不等式の解は

$$\frac{-2-\sqrt{14}}{2} < a < \frac{-2+\sqrt{14}}{2} \quad \text{(I)}$$

(II)の時、$D=0$ならばよい。これは(2)より $a=-5,\ 1$の時

$a=-5$の時 代入して $y = x^2 - 10x + 25 = (x-5)^2$

接点$(5,0)$より、これは適する

$a=1$の時 代入して $y = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

接点$(-1,0)$より、これはx軸の正の部分ではない

よって $a = -5$ (II)

(III)の時 $x=0$の時、$y=0$となるのは(1)より $a = \frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}$の時

ここで、$a = \frac{-2\pm\sqrt{14}}{2}$の時 $2a^2+4a-5$は0になるので

グラフの式は $y = x^2 + 2ax$ となる。

よって $y = x^2 + 2ax = x(x+2a)$ より

x軸との交点は $x = 0,\ -2a$ である。

$a = \frac{-2-\sqrt{14}}{2}$の時 $x = -2a = -2\left(\frac{-2-\sqrt{14}}{2}\right) = 2+\sqrt{14}$

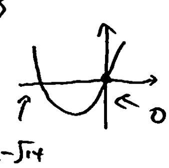
となり、これは正の数である。

よって条件に適する。

$a = \frac{-2+\sqrt{14}}{2}$の時 $x = -2a = -2\left(\frac{-2+\sqrt{14}}{2}\right) = 2-\sqrt{14}$

となり、これは負の数から

条件に適さない



以上より

$a = \frac{-2-\sqrt{14}}{2}$ (III)

よって(I)(II)(III)から、

$$a = \frac{-2-\sqrt{14}}{2} \leqq a < \frac{-2+\sqrt{14}}{2},\ -5$$

$\boxed{27}$

(1) $f(x)=x^2-ax+b$ より

$f(0)=0^2-a\cdot 0+b$

$=b$

$f(2)=2^2-a\cdot 2+b$

$=4-2a+b$

よって $f(0)=f(2)$ より

$b=4-2a+b$

$\therefore\ a=2$

(2) (1)より $a=2$ であるから

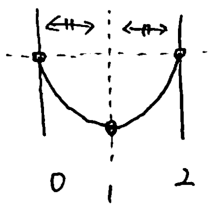
$f(x)=x^2-2x+b$

$=(x-1)^2-1^2+b$

$=(x-1)^2+b-1$

頂点 $(1,\ b-1)$

$0\leqq x\leqq 2$ において



$x=1$ の時最小

軸が定義域の中央なので

$x=0,2$ の時最大

ここで、

$f(1)=(1-1)^2+b-1$

$=b-1$

$f(0)=b$.

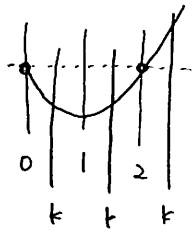
よって

最大値 b $(x=0,2)$

最小値 $b-1$ $(x=1)$

(3) $y=f(x)$ の軸は $x=1$ である。

また、$x=0$ の時と同じ y 座標になるのは $x=2$ の時である。



よって

定義域右端が

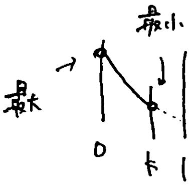
(I) 0と1の間

(II) 1と2の間

(III) 2よりも右

の3つの場合について考える

(I) $0<k\leqq 1$ の時



$x=0$ で最大

$x=k$ で最小

$x=0$ の時

$f(0)=0^2-2\cdot 0+b=b$

$f(k)=k^2-2k+b$

よって $\begin{cases} b=6 \\ k^2-2k+b=2 \end{cases}$

上式を下式に代入して

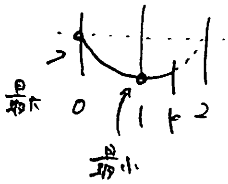
$k^2-2k+6=2$

$k^2-2k+4=0$

$k=1\pm\sqrt{1-4}$

実数にならないので不適

(II) $1<k\leqq 2$ の時



$x=0$ で最大

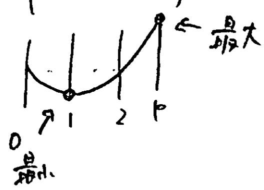
$x=1$ で最小

$x=0$ の時 $f(0)=b$

$x=1$ の時 $f(1)=b-1$

しかし、最大値と最小値の差が1しかないので、最大値が6、最小値が2になることはない。

(III) $k>2$ の時



$x=k$ で最大

$x=1$ で最小

$f(1)=b-1,\ f(k)=k^2-2k+b$

よって $\begin{cases} k^2-2k+b=6 \\ b-1=2 \end{cases}$

下式より $b=3$ を上式に代入して

$k^2-2k+3=6$

$k^2-2k-3=0$

$(k-3)(k+1)=0$ $\therefore\ k=3,-1$

$k>2$ を満たすのは $k=3$.

以上より

$k=3,\ b=3$

28

(1) $f(-2) = a(-2)^2 + b(-2) + c$

$= 4a - 2b + c$

$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c$

$= a - b + c$

よって条件より．$f(-2) = 1$，$f(-1) = 1$

より

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \cdots ① \\ a - b + c = 1 \cdots ② \end{cases}$$

① − ② から．

$3a - b = 0$

$\therefore b = 3a$．

①に代入して

$4a - 2(3a) + c = 1$

$4a - 6a + c = 1$

$\therefore c = 2a + 1$

以上より

$b = 3a$，$c = 2a + 1$

(2) (1)より $b = 3a$，$c = 2a + 1$

よって

$f(x) = ax^2 + 3ax + 2a + 1$

$= a(x^2 + 3x) + 2a + 1$

$= a\{(x + \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2\} + 2a + 1$

$= a\{(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}\} + 2a + 1$

$= a(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}a + 2a + 1$

$= a(x + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}a + 1$

頂点 $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}a + 1)$

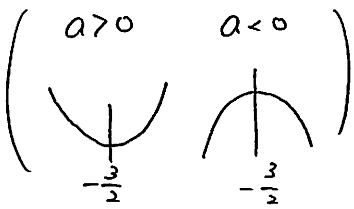
(3) aの正負によって

$y = f(x)$のグラフの

形状が変わるので．

まず．aの正負によって

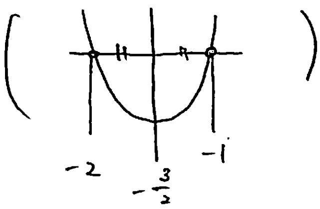
場合分けをする



また．軸が $x = -\frac{3}{2}$ より

$x = -2$の時と同じy座標

になるのは $x = -1$ である．

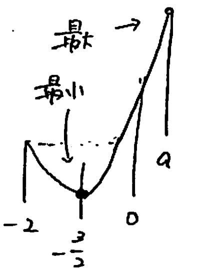


・$a > 0$ の時．

定義域の右端の $x = a$

は $x = 0$ よりも右側になる。

また．グラフは下に凸



グラフより．$x = a$で最大．$x = -\frac{3}{2}$で最小

$\therefore$

$M = f(a)$

$= a \cdot a^2 + 3a \cdot a + 2a + 1$

$= a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

$m = f(-\frac{3}{2})$

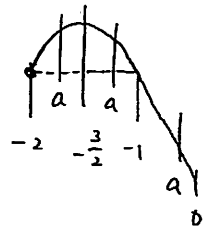
$= a(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}a + 1$

$= -\frac{1}{4}a + 1$

よって $M - m = (a^3 + 3a^2 + 2a + 1) - (-\frac{1}{4}a + 1)$

$= a^3 + 3a^2 + \frac{9}{4}a$．　(I)

・$a < 0$ の時．グラフは上に凸



よって．

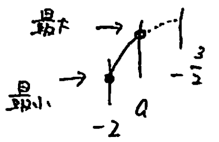
-2と$-\frac{3}{2}$の間

$-\frac{3}{2}$と-1の間

-1と0の間

で分ける。

☆ $-2 < a < -\frac{3}{2}$の時．



$x = a$で最大

$x = -2$で最小

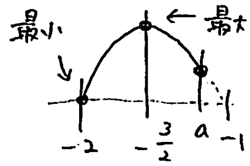
$M = f(a) = a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

$m = f(-2) = a(-2)^2 + 3a(-2) + 2a + 1 = 1$．

よって $M - m = (a^3 + 3a^2 + 2a + 1) - 1$

$= a^3 + 3a^2 + 2a$　(II)

☆ $-\frac{3}{2} \leqq a < -1$ の時



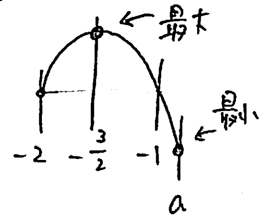
$x = -\frac{3}{2}$で最大

$x = -2$で最小

$M = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}a + 1$，$m = f(-2) = 1$

よって $M - m = (-\frac{1}{4}a + 1) - 1 = -\frac{1}{4}a$　(III)

☆ $-1 \leqq a < 0$



$x = -\frac{3}{2}$で最大

$x = a$で最小

$M = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}a + 1$．

$m = f(a) = a^3 + 3a^2 + 2a + 1$

$\therefore M - m = (-\frac{1}{4}a + 1) - (a^3 + 3a^2 + 2a + 1)$

$= -a^3 - 3a^2 - \frac{9}{4}a$．　(IV)

以上(I)(II)(III)(IV)より

$$M - m = \begin{cases} a^3 + 3a^2 + \frac{9}{4}a & (a > 0) \\ -a^3 - 3a^2 - \frac{9}{4}a & (-1 \leqq a < 0) \\ -\frac{1}{4}a & (-\frac{3}{2} \leqq a < -1) \\ a^3 + 3a^2 + 2a & (-2 < a < -\frac{3}{2}) \end{cases}$$

29 (1) 解答

$$\left(\frac{1}{4}a,\ -\frac{1}{8}a^2+b\right)$$

解説

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2-ax+b\\
&= 2\left(x^2-\frac{1}{2}a\right)+b\\
&= 2\left\{\left(x-\frac{1}{4}a\right)^2-\left(\frac{1}{4}a\right)^2\right\}+b\\
&= 2\left(x-\frac{1}{4}a\right)^2-2\cdot\left(\frac{1}{4}a\right)^2+b\\
&= 2\left(x-\frac{1}{4}a\right)-\frac{1}{8}a^2+b
\end{aligned}$$

より，頂点は $\left(\frac{1}{4}a,\ -\frac{1}{8}a^2+b\right)$ である。

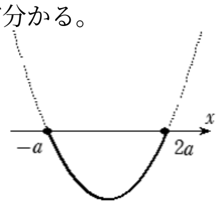
(2) 解答

$$a=6,\ b=1$$

解説

$0<a<8$ より，すべて4で割って $0<\frac{1}{4}a<2$ である。よって，軸 $x=\frac{1}{4}a$ は0と2の間に存在する。

i. $0\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)$ が最大となるときを考える。定義域 $0\leqq x\leqq 4$ の中央は $x=2$ であり，今 $0<\frac{1}{4}a<2$ が成り立つので $y=f(x)$ のグラフの軸が，定義域中央の $x=2$ よりも必ず右側に存在することから，$x=4$ のとき最大となることが分かる。



$x=4$ とき

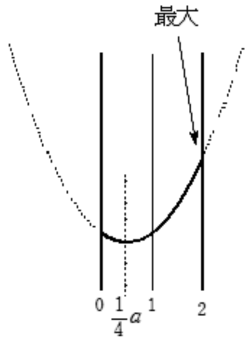
$$f(4)=2\cdot 4^2-a\cdot 4+b=32-4a+b$$

より，最大値 $32-4a+b$ であり，問題文の条件からこの値が9であるから

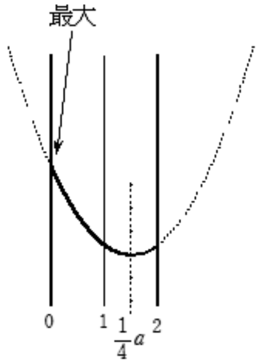
$$32-4a+b=9\ \cdots ①$$

が成り立つ。

ii. $0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ が最大となるときを考える。定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中央は $x=1$ であるから，軸 $x=\frac{1}{4}a$ が定義域中央の $x=1$ よりも右側ならば $x=0$ で最大，左側ならば $x=2$ で最大である。$0<\frac{1}{4}a<2$ より，軸が定義域の内部にはあるが，中央 $x=1$ との位置関係はわからないので，場合分けをする。

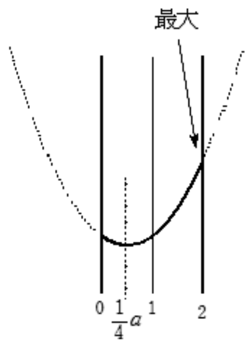


軸が中央の左側



軸が中央の右側

- 軸が中央の左側
  つまり，$\frac{1}{4}a<1$ のときで，解いて $a<4$ のときである。ここで今，$0<a<8$ であるから，共通範囲より $0<a<4$ のときである。



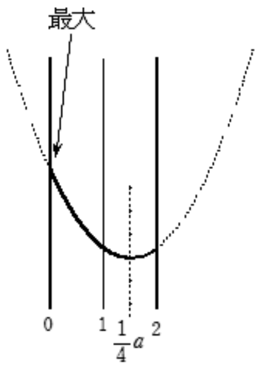
  このときグラフから，$f(x)$ は $x=2$ で最大となる。そして

$$f(2)=2\cdot 2^2-a\cdot 2+b=8-2a+b$$

  であるので，最大値は $8-2a+b$ である。条件より，これが1であるから $8-2a+b=1$ が成り立つ。この式と①式を連立すると

$$a=8,\ b=9$$

  となるが，これは $0<a<4$ を満たさない。
- 軸が中央の右側
  つまり，$1\leqq\frac{1}{4}a$ のときで，解いて $4\leqq a$ のときである。ここで今，$0<a<8$ であるから，共通範囲より $4\leqq a<8$ のときである。



このときグラフから，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。そして

$$f(0)=2\cdot 0^2-a\cdot 0+b=b$$

であるので, 最大値は b である。条件より，これが 1 であるから $b=1$ が成り立つ。この式と①式を連立すると

$$a=6,\ b=1$$

となり，これは $4\leqq a<8$ を満たす。

以上より，$a=6,\ b=1$ である。

(3) 解答

$$a=8,\ b=9$$

解説

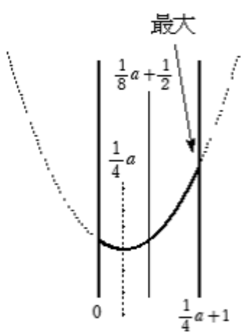
定義域が $0\leqq x\leqq \dfrac{a}{4}+1$ であり，また軸が $x=\dfrac{a}{4}$ なので，軸は必ず定義域の中に入る。よって，$x=\dfrac{1}{4}a$ で最小である。ここで

$$f\left(\frac{1}{4}a\right)=2\left(\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}a\right)^2-\frac{1}{8}a^2+b=-\frac{1}{8}a^2+b$$

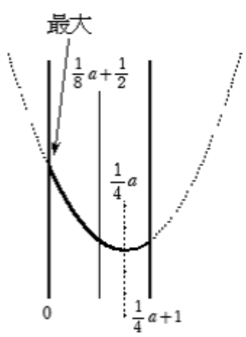
より，最小値は $-\dfrac{1}{8}a^2+b$ である。問題文の条件より，この値が 1 であるから

$$-\frac{1}{8}a^2+b=1\ \cdots ②$$

が成り立つ。また，定義域 $0\leqq x\leqq \dfrac{a}{4}+1$ の中央は $x=\dfrac{1}{8}a+\dfrac{1}{2}$ である。



軸が中央の左側

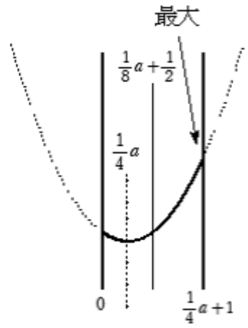


軸が中央の右側

- 軸が中央の左側
つまり，$\dfrac{1}{4}a\leqq\dfrac{1}{8}a+\dfrac{1}{2}$ のときで，解くと

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a &\leqq \frac{1}{8}a+\frac{1}{2} \quad (\text{両辺を 8 倍})\\ 2a &\leqq a+4\\ a &\leqq 4\end{aligned}$$

より $a\leqq 4$ のときである。ここで今，$0<a$ であるから，共通範囲より $0<a\leqq 4$ のときである。



このときグラフから，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{4}a+1$ で最大となる。よって最大値 $f\left(\dfrac{1}{4}a+1\right)$ の値は

$$\begin{aligned}f\left(\frac{1}{4}a+1\right) &= 2\left\{\left(\frac{1}{4}a+1\right)-\frac{1}{4}a\right\}^2-\frac{1}{8}a^2+b\\ &= 2\cdot 1^2-\frac{1}{8}a^2+b\\ &= 2-\frac{1}{8}a^2+b\end{aligned}$$

つまり

$$f\left(\frac{1}{4}a+1\right)=2-\frac{1}{8}a^2+b$$

より，最大値は $2-\dfrac{1}{8}a^2+b$ となる。問題文の条件から $2-\dfrac{1}{8}a^2+b=9$ となるが，②式と連立すると，

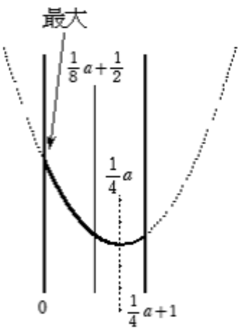
$$\begin{aligned}2 \quad -\tfrac{1}{8}a^2+b &= 9 \quad (②\text{を代入})\\ 2 \quad +1 \quad &= 9\end{aligned}$$

となって，$3=9$ となってしまう。これは成り立たないので，この連立方程式は解をもたず，不適である。ゆえに，$0<a\leqq 4$ のときは解はない。

- 軸が中央の右側
つまり，$\dfrac{1}{4}a>\dfrac{1}{8}a+\dfrac{1}{2}$ のときで，解くと

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}a &> \frac{1}{8}a+\frac{1}{2} \quad (\text{両辺を 8 倍})\\ 2a &> a+4\\ a &> 4\end{aligned}$$

より $a>4$ のときである。



このときグラフから，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。よって $f(x)=2x^2-ax+b$ に $x=0$ を代入して

$$f\,(0)=2\cdot 0^2-a\cdot 0+b$$

より，$f(0)=b$ となる。ゆえに最大値は b となり，問題文の条件から $b=9$ となる。②式に代入すると $-\dfrac{1}{8}a^2+9=1$ より両辺 8 倍して整理すると $a^2=64$，よって $a=\pm 8$ である。ここで $a>4$ を満たすのは $a=8$ のみである。

以上より，求める a，b の値は $a=8$，$b=9$ である。

30

(1) $f(x)=ax^2-4ax+4a+b-5$

$=a(x^2-4x)+4a+b-5$

$=a\{(x-2)^2-2^2\}+4a+b-5$

$=a\{(x-2)^2-4\}+4a+b-5$

$=a(x-2)^2-4a+4a+b-5$

$=a(x-2)^2+b-5 \cdots (*)$

頂点 $(2,\ b-5)$ //

(2) $y=f(x)$のグラフが点$(1,2)$を通るので代入して

$2=a\cdot 1^2-4a\cdot 1+4a+b-5$

$2=a-4a+4a+b-5$

$\therefore\ b=-a+7$

これを$(*)$に代入すると

$f(x)=a(x-2)^2-a+2$

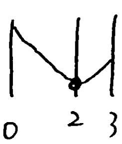
となる。$0\leqq x\leqq 3$におけるすべてのxについて$f(x)\geqq 0$となるには、$0\leqq x\leqq 3$における$f(x)$の最小値が0以上になればよい。

(赤点理論)

よって、aの正負で場合分け。

(aの正負で、グラフの形状が変わる)

・$a>0$の時、グラフは下に凸



$x=2$で最小

ここで

$f(2)=a(2-2)^2-a+2$

$=-a+2$

よって最小値は$-a+2$

これが0以上ならばよいので

$-a+2\geqq 0$

$\therefore\ a\leqq 2$

ここで$a>0$より、共通範囲から

$0<a\leqq 2$ ①

・$a<0$の時、グラフは上に凸

$x=0$で最小

ここで

$f(0)=a(0-2)^2-a+2$

$=a\cdot 4-a+2$

$=3a+2$

これが0以上より

$3a+2\geqq 0 \quad \therefore\ a\geqq -\frac{2}{3}$

ここで$a<0$より、共通範囲から

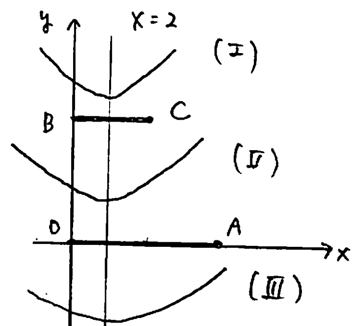
$-\frac{2}{3}\leqq a<0$ ②

①②より

$-\frac{2}{3}\leqq a<0,\ 0<a\leqq 2$ //

(3) $a=\frac{1}{2}$より

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+b-3=\frac{1}{2}(x-2)^2+b-5$



$b>2$であり、また軸が$x=2$より

$y=f(x)$の軸はOAやBCと交わる。

線分OA, BCと共有点を持たないのは、上図の3通りである。

(I) BCの上方を通る場合。

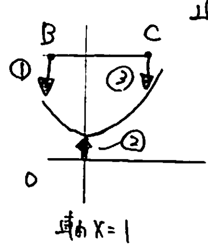
BもCもy座標は21より

頂点のy座標>21

ならばよい。よって

$b-5>21 \quad \therefore\ b>26$ (I)

(II) BCとOAの間を通る場合。



① $x=0$の時 $y<21$

② $x=1$の時 $y>0$

③ $x=b$の時 $y<21$

①②③の3つを調べる

①より、$x=0$の時

$f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0^2-2\cdot 0+b-3=b-3$

よって $b-3<21 \quad \therefore\ b<24$ ①

②より $x=1$の時 $y=b-5$

$\therefore\ b-5>0$より $b>5$ ②

③より $x=b$の時

$f(b)=\frac{1}{2}b^2-2b+b-3$

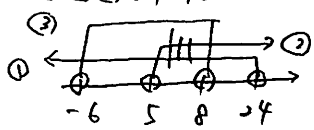
$=\frac{1}{2}b^2-b-3$

$\therefore\ \frac{1}{2}b^2-b-3<21$

$\therefore\ (b-8)(b+6)<0$

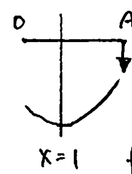
$\therefore\ -6<b<8$ ③

①②③より共通範囲は



$5<b<8$ (II)

(III) OAの下方を通る場合



$x=2b$の時、$y<0$ならばよい。

$f(2b)=\frac{1}{2}(2b)^2-2\cdot 2b+b-3$

$=2b^2-3b-3$

$\therefore\ 2b^2-3b-3=0$は

$b=\frac{3\pm\sqrt{9+24}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}$

よって $2b^2-3b-3<0$は

$\frac{3-\sqrt{33}}{4}<b<\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

であるが、$b>2$より

$2<b<\frac{3+\sqrt{33}}{4}$ (III)

以上、(I)(II)(III)より

$2<b<\frac{3+\sqrt{33}}{4},\ 5<b<8,\ 26<b$ //

31

(1) $D>0$ ならばよい。

$D/4=(2a)^2-a(5a+2)$

$=4a^2-5a^2-2a$

$=-a^2-2a$

より

$-a^2-2a>0$

$a^2+2a<0$

$a(a+2)<0$

∴

$-2<a<0$

(これは $a\neq0$ を満たす)

(2) $f(x)=ax^2+4ax+5a+2$

$=a(x^2+4x)+5a+2$

$=a\{(x+2)^2-2^2\}+5a+2$

$=a\{(x+2)^2-4\}+5a+2$

$=a(x+2)^2-4a+5a+2$

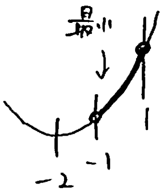
$=a(x+2)^2+a+2$

頂点 $(-2,\ a+2)$

$-1\leqq x\leqq 1$ において、常に $f(x)\geqq 0$ が成り立つには、

$-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値が 0 以上ならばよい(赤点理論)

• $a>0$ の時、グラフは下に凸



$x=-1$ で最小

ここで $f(-1)=a(-1)^2+4a(-1)+5a+2$

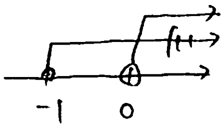
$=a-4a+5a+2$

$=2a+2$

よって $2a+2\geqq 0$ ならばよく

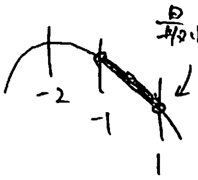
解いて $a\geqq -1$ ならばいい。

ここで今、$a>0$ より共通範囲から



$a>0$ ①

• $a<0$ の時、グラフは上に凸



$x=1$ で最小

$f(1)=a\cdot1^2+4a\cdot1+5a+2$

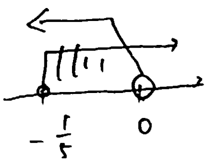
$=a+4a+5a+2$

$=10a+2$

よって $10a+2\geqq 0$ ならばよく

解いて $a\geqq -\frac{1}{5}$ ならばいい。

ここで今、$a<0$ より、共通範囲から



$-\frac{1}{5}\leqq a<0$ ②

①②より

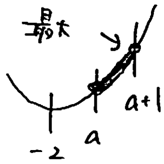
$-\frac{1}{5}\leqq a<0,\ 0<a$

(3) a の正負でグラフの形状が変わるので、$a>0$, $a<0$ で分ける。

• $a>0$ の時、グラフは下に凸

また軸は $x=-2$ である。

a は正より、a と $a+1$ も $x=-2$ よりも右にある。



$x=a+1$ で最大

ここで

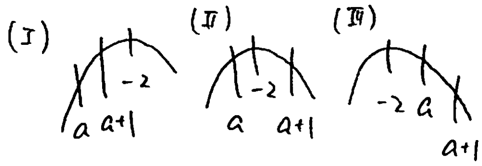
$f(a+1)=a(a+1)^2+4a(a+1)+5a+2$

$=a(a^2+2a+1)+4a^2+9a+2$

$=a^3+6a^2+10a+2$

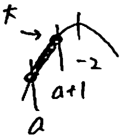
より 最大値 $a^3+6a^2+10a+2$

• $a<0$ の時、グラフは上に凸



(I) $a+1<-2$ の時、

つまり $a<-3$ の時、

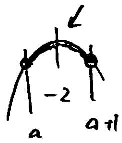


$x=a+1$ で最大

最大値 $a^3+6a^2+10a+2$

(II) $a\leqq -2\leqq a+1$

つまり $-3\leqq a\leqq -2$ の時



$x=-2$ で最大

$f(-2)=a(-2+2)^2+a+2=a+2$

最大値 $a+2$

(III) $-2<a$ の時

ここで $a<0$ より

$-2<a<0$ の時

$x=a$ で最大

$f(a)=a\cdot a^2+4a\cdot a+5a+2$

$=a^3+4a^2+5a+2$

最大値 a^3+4a^2+5a+2

以上より

$$\text{最大値}\begin{cases} a^3+6a^2+10a+2 & (a>0,\ a<-3) \\ a+2 & (-3\leqq a\leqq -2) \\ a^3+4a^2+5a+2 & (-2<a<0) \end{cases}$$

$\boxed{32}$

(1) $x^2+x-2 \geqq 0$

$(x+2)(x-1) \geqq 0$

$\therefore$ $x \leqq -2,\ x \geqq 1$

(2)

$x^2-(a+3)x+3a<0$

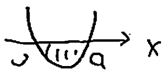
$(x-a)(x-3)<0$ …(*)

ここで aと3の大小関係について場合分けをする。

・aの方が3よりも大きい時。

つまり $a>3$ の時

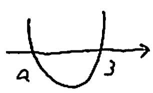
$3<x<a$



・aの方が3よりも小さい時。

つまり $a<3$の時

$a<x<3$

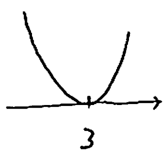


・$a=3$の時

(*)に代入すると

$(x-3)(x-3)<0$

$(x-3)^2<0$



よって、この不等式を満たすxは存在しない。

以上より

$a>3$の時 $3<x<a$

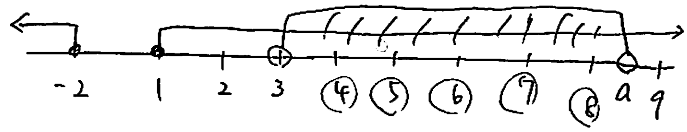
$a<3$の時 $a<x<3$

$a=3$の時 解なし

(3). (2)より、$a=3$の時は不適である。

・$a>3$の時、(2)より②の解は $3<x<a$

①との共通部分に整数が5個存在するのは aが8と9の間ならばよい

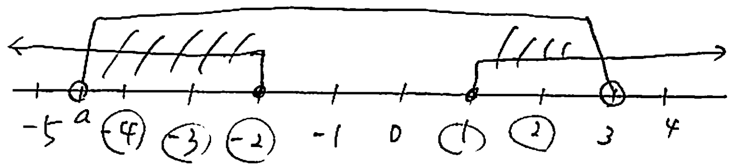


$\therefore$ $8<a \leqq 9$

(これは $a>3$を満たす)

・$a<3$の時、(2)より②の解は $a<x<3$

①との共通部分に整数が5個存在するのは



aが-5と-4の間ならばよい。

$\therefore$ $-5 \leqq a<-4$

(これは $a<3$を満たす)

以上より

$-5 \leqq a<-4,\ 8<a \leqq 9$

33

(1) $y = x^2 - 2ax + a^2 + 3a - 4$

$= (x-a)^2 - a^2 + a^2 + 3a - 4$

$= (x-a)^2 + 3a - 4$

頂点 $(a, 3a-4)$

(2) 放物線①とy軸との交点は

$x=0$を代入して

$y = 0^2 - 2a \cdot 0 + a^2 + 3a - 4$

$= a^2 + 3a - 4$

より $P(0, a^2+3a-4)$

ここで、点Pはy軸の負の部分にあるので、

$a^2 + 3a - 4 < 0$

$(a+4)(a-1) < 0$

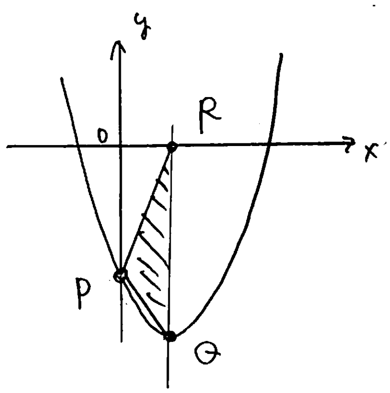
$\therefore -4 < a < 1$

(3) aが正の時と負の時で分ける。

・$a>0$の時

(2)より $-4<a<1$ より

$0<a<1$ の時



$R(a, 0)$, $Q(a, 3a-4)$

である。△PQRの面積は

$\frac{1}{2} \times OR \times RQ$

で求められる。ここで、aは正の数より

$OR = a$

しかし、Qのy座標は負より

$3a-4$は負の数なので

$RQ = -(3a-4)$

$= -3a+4$

$\therefore$

$\triangle PQR = \frac{1}{2}a(-3a+4)$

$= -\frac{3}{2}a^2 + 2a$

これが $\frac{1}{2}$ より

$-\frac{3}{2}a^2 + 2a = \frac{1}{2}$

$3a^2 - 4a + 1 = 0$

$(3a-1)(a-1) = 0$

$\therefore a = \frac{1}{3}, 1$

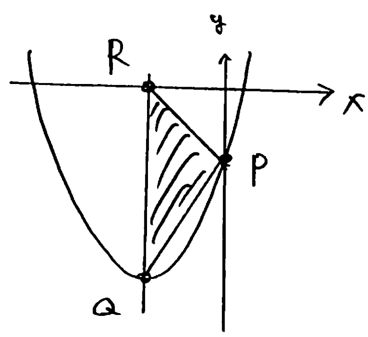
$0<a<1$ を満たすのは

$a = \frac{1}{3}$

・$a<0$ の時

(2)より $-4<a<1$ より

$-4<a<0$ の時



先程と同様に

$\triangle PQR = \frac{1}{2} \cdot OR \cdot RQ$

aは負の数より

$OR = -a$

$3a-4$も負より

$RQ = -3a+4$

よって

$\triangle PQR = \frac{1}{2}(-a)(-3a+4)$

$= \frac{3}{2}a^2 - 2a$

これが $\frac{1}{2}$ より

$\frac{3}{2}a^2 - 2a = \frac{1}{2}$

$3a^2 - 4a - 1 = 0$

$a = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 3 \cdot (-1)}}{3}$

$= \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

$-4 < a < 0$ より

$a = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$

以上より

求めるaの値は

$a = \frac{1}{3}, \frac{2-\sqrt{7}}{3}$

34

(1) $y = ax^2 - 6ax + 6a - 4$

$= a(x^2 - 6x) + 6a - 4$

$= a\{(x-3)^2 - 3^2\} + 6a - 4$

$= a\{(x-3)^2 - 9\} + 6a - 4$

$= a(x-3)^2 - 9a + 6a - 4$

$= a(x-3)^2 - 3a - 4$

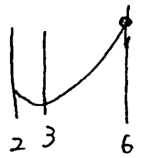
頂点 $(3, -3a-4)$ //

(2) $2 \leqq x \leqq 6$ における最大値が8

aの正負によって、グラフの形状が変わるので、場合分け

・$a>0$の時、グラフは下に凸

軸は$x=3$より、グラフから



$x=6$で最大

$x=6$の時

$y = a\cdot 6^2 - 6a\cdot 6 + 6a - 4$

$= 36a - 36a + 6a - 4$

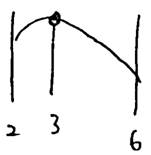
$= 6a - 4$

これが今8より

$6a - 4 = 8$

$\therefore a = 2$ （これは$a>0$を満たす）

・$a<0$の時、グラフは上に凸



グラフより

$x=3$で最大

$x=3$の時

$y = a(3-3)^2 - 3a - 4$

$= -3a - 4$

これが今8より

$-3a - 4 = 8$

$-3a = 12$

$a = -4$ （これは$a<0$を満たす）

以上より

$a = 2, -4$ //

(3) $a>0$より

グラフは下に凸。

定義域 $p \leqq x \leqq 3p$

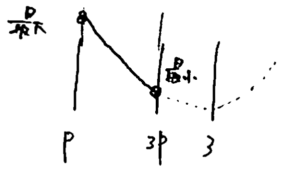
において中央は $x = 2p$

（最小値は、軸が定義域に入るかどうか

最大値は軸と中央の位置

で分ける。

・$3p<3$の時



$3p<3$を解いて $p<1$

かつ今、$0<p<3$より

共通範囲から $0<p<1$の時

定義域内では、グラフは単調減少

よって、

$x=p$で最大、$x=3p$で最小

$x=p$の時

$y = ap^2 - 6ap + 6a - 4$

$x=3p$の時

$y = a(3p)^2 - 6a\cdot 3p + 6a - 4$

$= 9ap^2 - 18ap + 6a - 4$

条件から、最大値 − 最小値 $= 3a$

より

$(ap^2 - 6ap + 6a - 4)$

$- (9ap^2 - 18ap + 6a - 4) = 3a$

$-8ap^2 + 12ap = 3a$

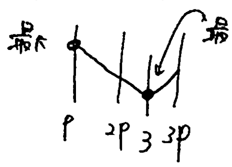
$-8p^2 + 12p = 3$

$8p^2 - 12p + 3 = 0$

$p = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{8} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{8} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$

$0<p<1$を満たすのは $p = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$

・$2p \leqq 3 < 3p$の時



$x=p$で最大

$x=3$で最小

$2p \leqq 3 < 3p$を解いて $1 < p \leqq \frac{3}{2}$の時

条件から、最大値 − 最小値 $= 3a$より

$(ap^2 - 6ap + 6a - 4) - (-3a - 4) = 3a$

$ap^2 - 6ap + 9a = 3a$

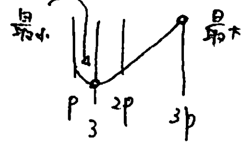
$p^2 - 6p + 9 = 3$

$p^2 - 6p + 6 = 0$

$p = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$

$1 < p \leqq \frac{3}{2}$を満たすのは $p = 3 - \sqrt{3}$

・$p < 3 < 2p$の時



$x=3$で最小

$x=3p$で最大

$p<3<2p$を解いて $\frac{3}{2} < p < 3$

条件から、最大値 − 最小値 $= 3a$

$(9ap^2 - 18ap + 6a - 4) - (-3a - 4) = 3a$

$9ap^2 - 18ap + 9a = 3a$

$9p^2 - 18p + 9 = 3$

$3p^2 - 6p + 2 = 0$

$p = \frac{3 \pm \sqrt{9-6}}{3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

$\frac{3}{2} < p < 3$を満たすのは $p = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$

以上より $p = \frac{3-\sqrt{3}}{4},\ 3-\sqrt{3},\ \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ //

35

(1)

$f(x) < 0$

$x^2 - 4x + 3 < 0$

$(x-1)(x-3) < 0$

$\therefore$ $1 < x < 3$

(2)

すべてのxに対して $x^2 - ax + a + 3 > 0$ となる。つまり、

「$y = x^2 - ax + a + 3$ とした時、すべてのxに対して $y > 0$ となる」

これは、x^2の係数が正なので

$y = x^2 - ax + a + 3$ のグラフがx軸と交点を持たなければよい。

つまり $D < 0$ ならばよい。

$D = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a+3)$

$= a^2 - 4a - 12$

より

$a^2 - 4a - 12 < 0$

$(a-6)(a+2) < 0$

$\therefore$ $-2 < a < 6$

(3)

$f(x) < 0$を満たすすべてのxに対して $g(x) > 0$ であればよい。

(1)より $f(x) < 0$ となるのは $1 < x < 3$ なので、赤点理論から

「$1 < x < 3$における$g(x)$の最小値が0より大きければよい」

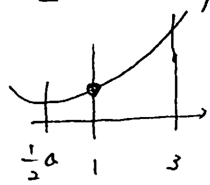
$g(x) = x^2 - ax + a + 3$

$= (x - \frac{1}{2}a)^2 - (\frac{1}{2}a)^2 + a + 3$

$= (x - \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a + 3$

$y = g(x)$のグラフは軸 $x = \frac{1}{2}a$ で下に凸

• $\frac{1}{2}a \leqq 1$ の時 つまり $a \leqq 2$



$x = 1$ の時に $y \geqq 0$ となればよい

（$1 < x < 3$ で $g(x) > 0$ より $x = 1$ の時は $y = 0$ でもよい）

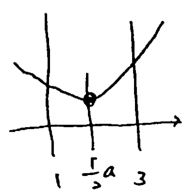
$x = 1$ の時

$y = 1^2 - a \cdot 1 + a + 3$

$= 1 - a + a + 3 = 4$

で、aがいくつであっても必ず$y \geqq 0$となる。よって $a \leqq 2$ ならば条件を満たす ……(I)

• $1 < \frac{1}{2}a < 3$、つまり $2 < a < 6$



$x = \frac{1}{2}a$ の時、$y > 0$ ならばよい

$x = \frac{1}{2}a$ の時

$y = (\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a)^2 - \frac{1}{4}a^2 + a + 3$

$= -\frac{1}{4}a^2 + a + 3$

よって

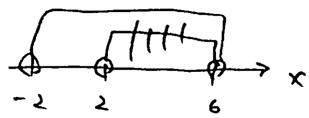
$-\frac{1}{4}a^2 + a + 3 > 0$

$a^2 - 4a - 12 < 0$

$(a-6)(a+2) < 0$

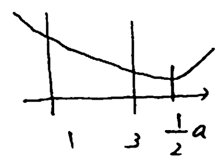
$-2 < a < 6$.

ここで今、$2 < a < 6$ より共通範囲から



$2 < a < 6$ …(II)

• $3 \leqq \frac{1}{2}a$ の時 つまり $6 \leqq a$



$x = 3$ の時、$y \geqq 0$ となればよい。

（$1 < x < 3$ で $g(x) > 0$ より $x = 3$ の時は $y = 0$ でもよい）

$x = 3$ の時

$y = 3^2 - a \cdot 3 + a + 3$

$= 9 - 3a + a + 3$

$= -2a + 12$

$\therefore$ $-2a + 12 \geqq 0$

$a \leqq 6$

今、$a \geqq 6$ であるから共通範囲は

$a = 6$ のみ (III)

以上 (I)(II)(III) から

$a \leqq 2$、$2 < a < 6$, $a = 6$

ならばよく、これらの範囲をくっつけて

$a \leqq 6$

ならばよい。

36 (1) 解答

$a=-1$

解説

$f(-1)=-1$ より

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^2+(-1)+a \\ &= 1-1+a \\ &= a \end{aligned}$$

であるから，$a=-1$ である。

(2) 解答

$-2 \leqq x \leqq 1$

解説

(1) より，$a=-1$ である。よって

$$\begin{aligned} f(-1) &\leqq 1 \\ x^2+x-1 &\leqq 1 \\ x^2+x-2 &\leqq 0 \\ (x+2)(x-1) &\leqq 0 \end{aligned}$$

となるので，解いて $-2 \leqq x \leqq 1$ である。

(3) 解答

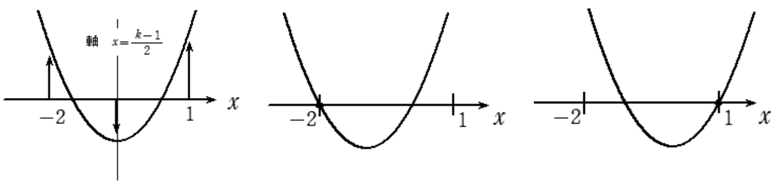
$-\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$

解説

$f(x)=kx$ を満たす異なる 2 つの x が $-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲に存在する。ここで，与えられた方程式を変形して

$$\begin{aligned} f(x) &= kx \\ x^2+x-1 &= kx \\ x^2-kx+x-1 &= 0 \\ x^2-(k-1)x-1 &= 0 \cdots (※) \end{aligned}$$

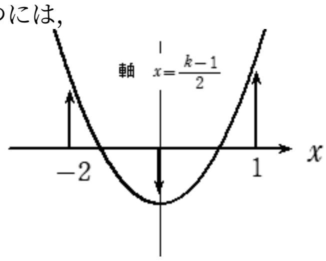
とすると，$-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，方程式 (※) が異なる 2 つの実数解を持つことに等しい。そしてそれは，$y=x^2-(k-1)x-1$ **のグラフが，**$-2 \leqq x \leqq 1$ **の範囲で，**x **軸と異なる 2 個の交点を持つ**ことに等しい。それは以下の 3 通りである。



i. $-2<x<1$ の範囲で異なる 2 個の交点をもつグラフの式を平方完成すると

$$\begin{aligned} y &= x^2-(k-1)x-1 \\ &= \left(x-\frac{k-1}{2}\right)^2-\left(\frac{k-1}{2}\right)^2-1 \\ &= \left(x-\frac{k-1}{2}\right)^2-\frac{k^2-2k+1}{4}-1 \\ &= \left(x-\frac{k-1}{2}\right)^2-\frac{k^2-2k+5}{4} \end{aligned}$$

より，頂点の座標は $\left(\dfrac{k-1}{2},\ -\dfrac{k^2-2k+5}{4}\right)$ である。$-2<x<1$ の範囲で異なる 2 個の交点をもつには，



① 軸が -2 と 1 の間

② 頂点の y 座標 <0

③ $x=-2$ のとき $y>0$，$x=1$ のとき $y>0$

の 3 つが成り立てばよい。

① について

軸は $x=\dfrac{k-1}{2}$ より，$-2<\dfrac{k-1}{2}<1$ が成り立てばよい。よって

$$\begin{array}{ccccccl} -2 & < & \dfrac{k-1}{2} & < & 1 & & (\text{すべてを 2 倍}) \\ -4 & < & k-1 & < & 2 & & (\text{すべてに 1 加える}) \\ -3 & < & k & < & 3 & & \end{array}$$

であればよい。

② について

頂点の y 座標は $-\dfrac{k^2-2k+5}{4}$ であるので，

$-\dfrac{k^2-2k+5}{4}<0$ であればよい。両辺を -4 倍すると，不等号の向きが変わることに注意して

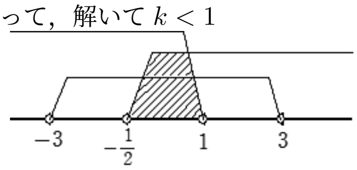
$$k^2-2k+5>0 \cdots (♪)$$

となる。ここで，方程式 $k^2-2k+5=0$ を解くと $k=1 \pm \sqrt{1-5}$ より，根号内が負になってしまうので，この方程式は解を持たない。ゆえに，不等式 (♪) の解はすべての実数である。

③ について

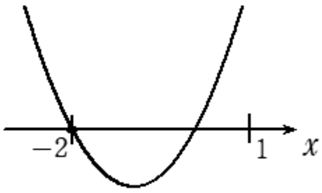
$x=-2$ のとき $y=(-2)^2-(k-1)(-2)-1=2k+1$ より，$2k+1>0$ ならばよい。よって，解いて $k>-\dfrac{1}{2}$ である。また同様に，$x=1$ のとき $y=1^2-(k-1)\cdot 1-1=$

$-k+1$ より，$-k+1>0$ ならばよい。よって，解いて $k<1$



以上，①〜③までの共通範囲より $-\frac{1}{2}<k<1$

ii. $x=-2$ で 1 点と $-2<x<1$ の範囲で 1 点交わる場合



$y=x^2-(k-1)x-1$ のグラフが $x=-2$ で x 軸と交わるので，

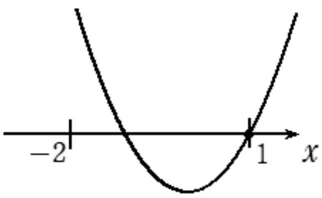
$$\begin{aligned} 0 &= (-2)^2-(k-1)(-2)-1 \\ 0 &= 4+2k-2-1 \\ k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} y &= x^2-\left(-\frac{1}{2}-1\right)x-1 \\ &= \frac{1}{2}(2x^2+3x-2) \\ &= \frac{1}{2}(x+2)(2x-1) \end{aligned}$$

より，$x=-2$ の他に $x=\frac{1}{2}$ とも交わる。これは $-2<x<1$ を満たすので，$k=-\frac{1}{2}$ は条件を満たす。

iii. $-2<x<1$ の範囲で 1 点と $x=1$ で 1 点交わる場合



$y=x^2-(k-1)x-1$ のグラフが $x=1$ で x 軸と交わるので，

$$\begin{aligned} 0 &= 1^2-(k-1)\cdot 1-1 \\ 0 &= 1-k+1-1 \\ k &= 1 \end{aligned}$$

である。このとき

$$\begin{aligned} y &= x^2-(1-1)x-1 \\ &= x^2-1 \\ &= (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

より，$x=1$ の他に $x=-1$ とも交わる。これは $-2<x<1$ を満たすので，$k=1$ は条件を満たす。

以上より $-\frac{1}{2}<k<1$, $k=-\frac{1}{2}$, $k=1$ より，まとめて

$$-\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1$$

である。

37

(1) $y = ax^2 - 2ax - 4a + 2$

$= a(x^2 - 2x) - 4a + 2$

$= a\{(x-1)^2 - 1^2\} - 4a + 2$

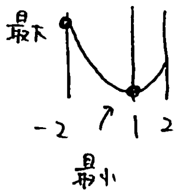
$= a(x-1)^2 - a - 4a + 2$

$= a(x-1)^2 - 5a + 2$

頂点 $(1, -5a+2)$

(2) aの正負で、グラフの形状が変わるので、場合分け

・$a>0$の時、グラフは下に凸



$x=-2$で最大

$f(-2) = a(-2)^2 - 2a(-2) - 4a + 2$

$= 4a+2$

条件より、これが今10なので

$4a+2=10 \quad \therefore a=2$

これは$a>0$を満たす。

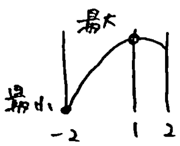
この時、

$f(x) = 2(x-1)^2 - 5\cdot 2 + 2$

$= 2(x-1)^2 - 8$

であり、$x=1$の時最小値-8をとる。

・$a<0$の時 グラフは上に凸



$x=1$で最大

$f(1) = a(1-1)^2 - 5a + 2$

$= -5a + 2$

条件より、これが今10なので

$-5a+2=10$

$-5a=8 \quad \therefore a=-\frac{8}{5}$

これは$a<0$を満たす。

この時、

$f(x) = -\frac{8}{5}(x-1)^2 - 5\cdot\left(-\frac{8}{5}\right) + 2$

$= -\frac{8}{5}(x-1)^2 + 10$

であり、$x=-2$で最小となるので

$f(-2) = -\frac{8}{5}(-2-1)^2 + 10$

$= -\frac{8}{5}\cdot 9 + 10$

$= -\frac{72}{5} + \frac{50}{5}$

$= -\frac{22}{5}$

以上より

$a=2$, 最小値-8 $(x=1)$

$a=-\frac{8}{5}$, 最小値$-\frac{22}{5}$ $(x=-2)$

(3) $a=2$の時、

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

$= 2(x-1)^2 - 8$

である。よって軸 $x=1$

また、定義域

$t \leqq x \leqq 2t+1$

において、中央は

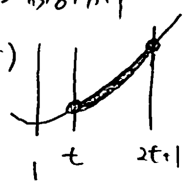
$\frac{t+(2t+1)}{2} = \frac{3t+1}{2}$

である。よって、

$\begin{cases} \text{最小は定義域に軸が入るかどうか} \\ \text{最大は中央と軸の位置関係} \end{cases}$

で場合分け

(I)



($x=t$で最小, $x=2t+1$で最大)

$1<t$ の時である。条件より $0<t<3$より、共通範囲から $1<t<3$の時を考える。

$f(t) = 2t^2 - 4t - 6$

$f(2t+1) = 2\{(2t+1)-1\}^2 - 8$

$= 2(2t)^2 - 8$

$= 8t^2 - 8$

よって、

$M = 8t^2 - 8$

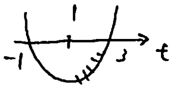
$m = 2t^2 - 4t - 6$.

である。ここで

$m = 2(t^2 - 2t - 3)$

$= 2(t-3)(t+1)$

より、$1<t<3$の範囲では $m<0$である。



よって $M = \frac{4}{5}|m|$ (mが負より(-1)倍される)

$M = -\frac{4}{5}m$

$8t^2 - 8 = -\frac{4}{5}(2t^2 - 4t - 6)$

整理して、

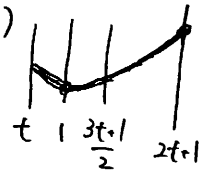
$3t^2 - t - 4 = 0$

$(3t-4)(t+1) = 0$

$t = \frac{4}{3}, -1$

$1<t<3$を満たすのは $t=\frac{4}{3}$

(II)



($x=1$で最小, $x=2t+1$で最大)

$t \leqq 1 < \frac{3t+1}{2}$ の時。

$t \leqq 1$ かつ $1 < \frac{3t+1}{2}$ で、$\frac{1}{3} < t \leqq 1$ の時

$M = f(2t+1) = 8t^2 - 8$

$m = f(1) = 2(1-1)^2 - 8 = -8$

よって $M = \frac{4}{5}|m|$

$8t^2 - 8 = \frac{4}{5}|-8|$

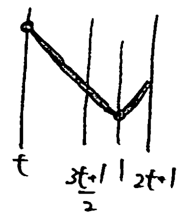
$8t^2 - 8 = \frac{4}{5}\cdot 8$

整理して $t^2 = \frac{9}{5}$

$\therefore t = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

いずれも $\frac{1}{3} < t \leqq 1$を満たさない。

(III)



($x=1$で最小, $x=t$で最大)

$\frac{3t+1}{2} \leqq 1 < 2t+1$

$\frac{3t+1}{2} \leqq 1$ かつ $1 < 2t+1$ で $0 < t \leqq \frac{1}{3}$ の時

$M = f(t) = 2t^2 - 4t - 6$

$m = f(1) = -8$

よって $M = \frac{4}{5}|m|$

$2t^2 - 4t - 6 = \frac{4}{5}|-8|$

$2t^2 - 4t - 6 = \frac{4}{5}\cdot 8$

整理して

$5t^2 - 10t - 31 = 0$.

$t = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 5(-31)}}{5}$

$= \frac{5 \pm \sqrt{180}}{5}$

$= \frac{5 \pm 6\sqrt{5}}{5}$

どちらも $0 < t \leqq \frac{1}{3}$を満たさず。

以上より、求めるtは $t = \frac{4}{3}$

38

(1) $x^2-x-2\leqq 0$

$(x-2)(x+1)\leqq 0$

$-1\leqq x\leqq 2$ //

(2) $-1\leqq x\leqq 2$ を満たすすべてのxについて $f(x)\leqq 0$が成り立つ。

これは、$-1\leqq x\leqq 2$における$f(x)$の最大値が0以下であればよい。

$f(x)=x^2+2ax+3a+4$

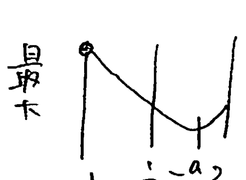
$=(x+a)^2-a^2+3a+4$

頂点$(-a,-a^2+3a+4)$

また、定義域$-1\leqq x\leqq 2$の中央は$x=\frac{1}{2}$である。

中央と軸の位置関係で場合分け。

・軸が中央より右



つまり$\frac{1}{2}<-a$の時

これを解いて、$a<-\frac{1}{2}$の時

$x=-1$で最大である。

そして

$f(-1)=(-1)^2+2a(-1)+3a+4$

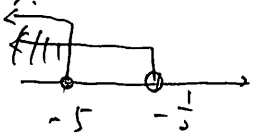
$=1-2a+3a+4$

$=a+5$

よって、最大値$a+5$

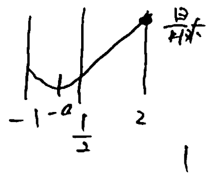
ゆえに$a+5\leqq 0$ ∴ $a\leqq -5$

今、$a<-\frac{1}{2}$より共通範囲より



$a\leqq -5$ ①

・軸が中央より左



つまり、$-a\leqq\frac{1}{2}$ ∴ $a\geqq -\frac{1}{2}$の時

$x=2$で最大である。

ここで

$f(2)=2^2+2a\cdot 2+3a+4$

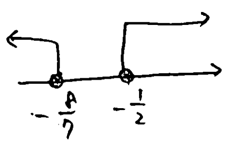
$=4+4a+3a+4$

$=7a+8$

よって、最大値$7a+8$

ゆえに$7a+8\leqq 0$ ∴ $a\leqq -\frac{8}{7}$

ここで、$a\geqq -\frac{1}{2}$より共通範囲は存在しない ②



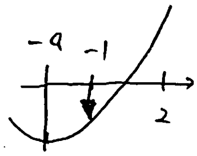
①②より、くっつけて

$a\leqq -5$ //

(3) 不等式①と$f(x)\leqq 0$をともに満たすxが存在する。

つまり、$-1\leqq x\leqq 2$において$y=f(x)$のグラフが、x軸よりも下に行くことが、1点でもあればよい。これは、$-1\leqq x\leqq 2$における$f(x)$の最小値を調べればよい。

(I) 軸<-1



つまり$-a<-1$

より$a>1$の時

$f(x)$は$x=-1$で最小

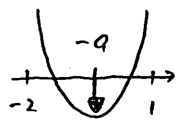
ここで$x=-1$の時

$f(-1)=a+5$より、$a+5\leqq 0$。

ならばよい。∴ $a\leqq -5$

しかし今、$a>1$より、共通範囲は存在しない。

(II) $-1\leqq$軸$\leqq 2$



つまり

$-1\leqq -a\leqq 2$

より$-2\leqq a\leqq 1$の時

$x=-a$で最小

ここで

$f(-a)=(-a+a)^2-a^2+3a+4$

$=-a^2+3a+4$

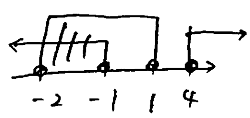
∴ $-a^2+3a+4\leqq 0$

$a^2-3a-4\leqq 0$

$(a-4)(a+1)\geqq 0$

∴ $a\leqq -1,\ a\geqq 4$

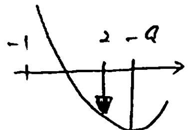
ここで、$-2\leqq a\leqq 1$との共通範囲



より

$-2\leqq a\leqq -1$ (II)

(III) $2<$軸



つまり$2<-a$

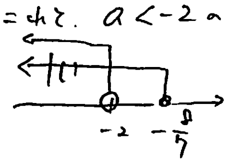
より$a<-2$の時。

$x=2$で最小。

$f(2)=7a+8$より$7a+8\leqq 0$

解いて、$a\leqq -\frac{8}{7}$

これと、$a<-2$の共通範囲より



$a<-2$ (III)

以上、(I)(II)(III)から、

$-2\leqq a\leqq -1$と$a<-2$をくっつけて

$a\leqq -1$ //

39

(1) $f(x) = x^2 - 2ax + b$ で. $f(1) = 1$ より

xに1を代入して

$f(1) = 1^2 - 2a \cdot 1 + b = 1$

$\therefore$ $1 - 2a + b = 1$

$\therefore$ $\underline{b = 2a}$ //

(2) (1)より $b = 2a$.

よって $f(x) = x^2 - 2ax + 2a$.

ここで $y = x^2 - 2ax + 2a$ の

グラフが x軸と共有点を

持つのは. $D \geqq 0$ であればよい

$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot 2a$

$= a^2 - 2a$

より. $a^2 - 2a \geqq 0$

$a(a-2) \geqq 0$

$\therefore$ $\underline{a \leqq 0 . \ a \geqq 2}$ //

(3) $x^2 - 2ax + b = 0$ が.

$-1 < x < 1$ の範囲に

解を持つときは.

$y = x^2 - 2ax + b$ のグラフが

$-1 < x < 1$ の範囲で

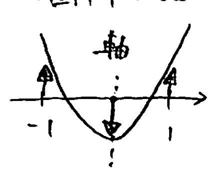
x軸と交点を持つ

ことに等しい。交点は最大で

2個なので. 2個持つ時と

1個持つ時で分ける

• 2個持つとき



① $-1 <$ 軸 < 1

② 頂点のy座標 < 0

③ $x = 1$ の時. $y > 0$

④ $x = -1$ の時 $y > 0$.

であればよい。

$y = x^2 - 2ax + 2a$

$= (x-a)^2 - a^2 + 2a$

頂点 $(a, -a^2 + 2a)$

① $-1 < a < 1$

② $-a^2 + 2a < 0$

$a^2 - 2a > 0$

$a(a-2) > 0$

$\therefore$ $a < 0 . \ a > 2$

③ $x = 1$ の時.

$y = 1^2 - 2a \cdot 1 + 2a = 1$

よって. aの値がいくつでも

y座標は正になる。

④ $x = -1$ の時

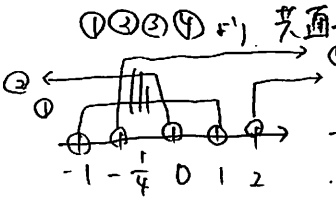
$y = (-1)^2 - 2a(-1) + 2a$

$= 1 + 4a$

よって $1 + 4a > 0$

$\therefore$ $a > -\frac{1}{4}$

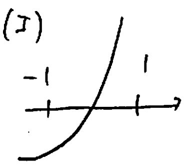
①②③④より. 共通範囲から



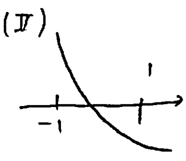
$-\frac{1}{4} < a < 0$

• 1個持つ時

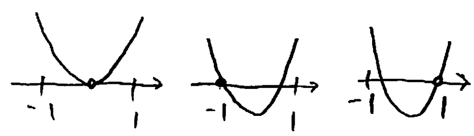
(I)



(II)



(III) (IV) (V)



5通りあるが. $x = 1$ の時 $y = 1$ となるので. (II)と(V)はありえない。

(I) $x = -1$ で $y < 0$. $x = 1$ で $y > 0$.

$x = 1$ では必ず $y > 0$ となるので

$x = -1$ の時. $y = 1 + 4a$ より

$1 + 4a < 0$ ならばよい

$\therefore$ $a < -\frac{1}{4}$

(III) 接するのは $D/4 = a^2 - 2a$

より $a^2 - 2a = 0$

$a(a-2) = 0$ $\therefore$ $a = 0, 2$

ここで

$a = 0$ の時. $y = x^2$ で接点 $(0, 0)$

$-1 < x < 1$ に適する

$a = 2$ の時. $y = x^2 - 4x + 4$

$= (x-2)^2$ で接点 $(2, 0)$

$-1 < x < 1$ を満たさない

(IV) $x = -1$ の時. $y = 0$ となる.

これは. $1 + 4a = 0$ $\therefore$ $a = -\frac{1}{4}$

この時

$y = x^2 - 2\left(-\frac{1}{4}\right)x + 2\left(-\frac{1}{4}\right)$

$= x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}(2x^2 + x - 1)$

$= \frac{1}{2}(2x-1)(x+1)$ より

x軸と $x = \frac{1}{2}, -1$ で交わる.

$x = \frac{1}{2}$ は $-1 < x < 1$ を満たす。

以上より

$-\frac{1}{4} < a < 0$. $a < -\frac{1}{4}$, $a = 0$. $a = -\frac{1}{4}$

ならばよく、これらをまとめて

$\underline{a \leqq 0}$ //

ならばよい。

40

(1) $f(x)=-x^2+6x-4$

$=-(x^2-6x)-4$

$=-\{(x-3)^2-3^2\}-4$

$=-\{(x-3)^2-9\}-4$

$=-(x-3)^2+9-4$

$=-(x-3)^2+5$

$y=f(x)$のグラフの

頂点$(3,5)$,上に凸

$x=3$で最大

$x=1$で最小

ここで

$f(3)=-(3-3)^2+5=5$

$f(1)=-1^2+6\cdot1-4$

$=-1+6-4=1$

最大値 5 $(x=3)$

最小値 1 $(x=1)$

(2)

方程式$f(x)=k$の解は

2つのグラフ

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$$

の交点のx座標に等しい

よって $1\leqq x\leqq 4$の範囲で

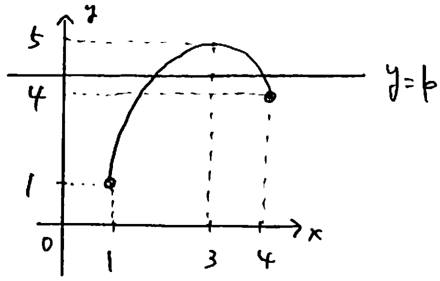
方程式$f(x)=k$が

異なる2つの解を持つので

$1\leqq x\leqq 4$の範囲で.

$y=f(x)$と$y=k$が

異なる2点で交わる。



グラフより

$4\leqq k<5$

ならばよい。

($y=4$と$y=5$の間)

(3) $1\leqq x\leqq 4$において.

$f(x)$と$g(x)$の値域が

一致するとは

「$f(x)$と$g(x)$の最大値も

最小値も、ともに等しい」

ことを意味する。

よって(1)から

$g(x)$の$1\leqq x\leqq 4$における

$$\begin{cases} \text{最大値が}5 \\ \text{最小値が}1 \end{cases} \quad \cdots(*)$$

になればよい。

$g(x)=ax^2-4ax+b$

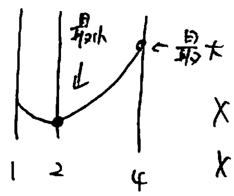
$=a(x^2-4x)+b$

$=a\{(x-2)^2-2^2\}+b$

$=a\{(x-2)^2-4\}+b$

$=a(x-2)^2-4a+b$

・$a>0$の時 グラフは下に凸



$x=2$で最小

$x=4$で最大

ここで

$g(2)=a(2-2)^2-4a+b$

$=-4a+b$

$g(4)=a\cdot4^2-4a\cdot4+b$

$=16a-16a+b=b$

ゆえに

最大値b. 最小値$-4a+b$

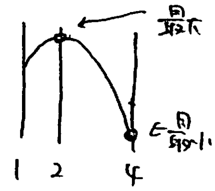
(*)より

$$\begin{cases} b=5 \\ -4a+b=1 \end{cases}$$

解いて $a=1$, $b=5$

これは$a>0$を満たす。

・$a<0$の時. グラフは上に凸



$x=2$で最大

$x=4$で最小

ここで. $g(2)=-4a+b$, $g(4)=b$

ゆえに

最大値$-4a+b$. 最小値b

(*)より

$$\begin{cases} -4a+b=5 \\ b=1 \end{cases}$$

解いて $a=-1$, $b=1$

これは$a<0$を満たす。

以上より

$(a,b)=(1,5),(-1,1)$

(4)

(1) $x^2-2x-2<0$

ここで $x^2-2x-2=0$

を解くと

$x=1\pm\sqrt{1^2-(-2)}$

$=1\pm\sqrt{3}$

よって不等式の解は

$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$

(2)

$g(x)=x^2-(2a+2)x+3a+7$

$=x^2-2(a+1)x+3a+7$

$=\{x-(a+1)\}^2-(a+1)^2+3a+7$

$=\{x-(a+1)\}^2-(a^2+2a+1)+3a+7$

$=\{x-(a+1)\}^2-a^2-2a-1+3a+7$

$=\{x-(a+1)\}^2-a^2+a+6$

$g(x)$は $x=a+1$ の時

最小値 $-a^2+a+6$ をとる。

条件よりこれが0以下なので

$-a^2+a+6\leqq 0$

$a^2-a-6\geqq 0$

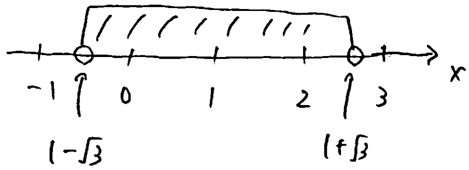
$(a-3)(a+2)\geqq 0$

$\therefore a\leqq -2,\ a\geqq 3$

(3) (1)より $f(x)<0$ となるxは

$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$ である。

ここで$\sqrt{3}$は1と2の間より



$1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3}$ を満たす

整数は 0と1と2の3個である。

よってこれら3個のうち、ただ1つだけが

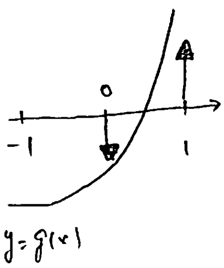
$g(x)\leqq 0$を満たすような、aの値の

範囲を求める。

・$x=0$のみ $g(x)\leqq 0$を満たす。

$y=g(x)$のグラフが図のように

なればよい。



よって
① $x=1$の時 $y>0$.
② $x=0$の時 $y\leqq 0$.

であればよい。

①から

$g(1)=1^2-(2a+2)\cdot 1+3a+7$

$=1-2a-2+3a+7$

$=a+6$

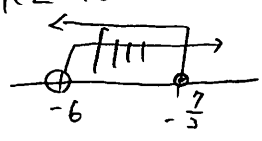
$\therefore a+6>0$ より $a>-6$

②から

$g(0)=3a+7$

$\therefore 3a+7\leqq 0$ より $a\leqq -\frac{7}{3}$

共通範囲より

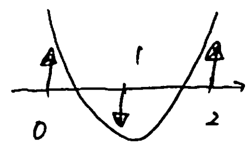


$-6<a\leqq -\frac{7}{3}$

これは$a<0$をみたす。

・$x=1$のみ $g(x)\leqq 0$を満たす

図のようになれば……



③ $x=0$で $y>0$
④ $x=1$で $y\leqq 0$
⑤ $x=2$で $y>0$

③ $3a+7>0$ $\therefore a>-\frac{7}{3}$

④ $a+6\leqq 0$ $\therefore a\leqq -6$

⑤ $x=2$の時

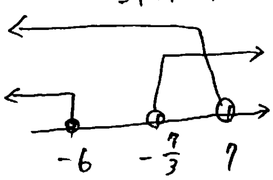
$g(2)=2^2-(2a+2)\cdot 2+3a+7$

$=4-4a-4+3a+7$

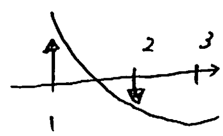
$=-a+7$

$\therefore -a+7>0$ $a<7$

しかしこれら③④⑤を同時に満たすaは存在しない



・$x=2$のみ $g(x)\leqq 0$を満たす

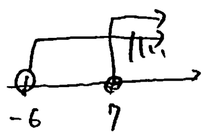


⑥ $x=1$で $y>0$
⑦ $x=2$で $y\leqq 0$

⑥ $a+6>0$ $\therefore a>-6$.

⑦ $-a+7\leqq 0$ $\therefore a\geqq 7$

⑥⑦の共通範囲より



$a\geqq 7$

しかしこれは $a<0$ を満たさず不適

以上より

$-6<a\leqq -\frac{7}{3}$

42

(1) $y=x^2-2ax+b$ が点 $(2a+1, 2)$ を通るので代入して

$2=(2a+1)^2-2a(2a+1)+b$

$2=(4a^2+4a+1)-(4a^2+2a)+b$

$2=4a^2+4a+1-4a^2-2a+b$

$2=2a+1+b$

$\therefore\ b=-2a+1$

(2) (1)より $b=-2a+1$ より

$y=x^2-2ax-2a+1$

$=(x-a)^2-a^2-2a+1$

頂点 $(a, -a^2-2a+1)$

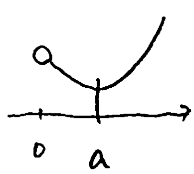
$y=f(x)$ のグラフが x軸の正の部分と共有点を持たないとは、グラフの形状が下に凸であることから考えて

「$x>0$ において $y>0$」

であればよい。それは、$x>0$ における $y=f(x)$ の最小値が0より大きければよい。軸の位置について場合分け

・$a>0$ の時

軸が $x>0$ の範囲にあるので、



$x=a$ の時 $y>0$ ならばよい

$x=a$ の時

$y=(a-a)^2-a^2-2a+1$

$=-a^2-2a+1$

よって $-a^2-2a+1>0$.

$a^2+2a-1<0$ ……①

ここで $a^2+2a-1=0$ は

$a=-1\pm\sqrt{1+1}$

$=-1\pm\sqrt{2}$.

よって不等式①の解は

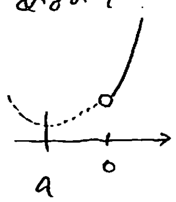
$-1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$

ここで今、$a>0$ より共通範囲をとって

$0<a<-1+\sqrt{2}$ ①

・$a\leqq 0$ の時

軸が $x\leqq 0$ の範囲にあるので



$x=0$ の時 $y\geqq 0$ ならばよい

$x=0$ の時.

$y=0^2-2a\cdot 0-2a+1$

$=-2a+1$

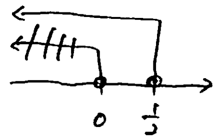
よって

$-2a+1\geqq 0$

$-2a\geqq -1$

$\therefore\ a\leqq \frac{1}{2}$

今、$a\leqq 0$ より共通部分をとって

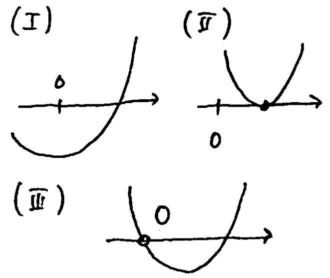


$a\leqq 0$ ②

以上①②より、2つの範囲をくっつけて

$a<-1+\sqrt{2}$

(3) 3つの場合を考える。



(I) 正と負で1つずつ交点を持つ。

これは $x=0$ の時 $y<0$ ならばよい

$x=0$ の時 $y=-2a+1$ より

$-2a+1<0$ $\therefore\ a>\frac{1}{2}$ (I)

(II) 正の部分で接する。

$y=x^2-2ax-2a+1$ で

$D/4=(-a)^2-(-2a+1)$

$=a^2+2a-1$

$D=0$ となるのは、$a^2+2a-1=0$

$\therefore\ a=-1\pm\sqrt{2}$.

ここで、x軸の正の部分で接するには、軸>0 でないといけない。

軸は $x=a$ より $a>0$ であり

$a=-1\pm\sqrt{2}$ のうち、$a>0$ を満たすのは

$a=-1+\sqrt{2}$ のみ. (II)

(III) $x=0$ と正の部分の計2点で交わる

$x=0$ の時、$y=-2a+1$ より

$-2a+1=0$ から $a=\frac{1}{2}$ (III)

ここで、$a=\frac{1}{2}$ を代入すると

$y=x^2-x=x(x-1)$

よって $x=0, 1$ で交わるので

これは条件を満たす

以上 (I)(II)(III) から

$a>\frac{1}{2}$, $a=-1+\sqrt{2}$, $a=\frac{1}{2}$

まとめて $a=-1+\sqrt{2}$, $a\geqq\frac{1}{2}$

43

(1) $y=x^2-2ax+a^2-a-5$

がx軸と異なる2点で交わるので $D>0$.

$D/4=(-a)^2-1\cdot(a^2-a-5)$

$=a^2-a^2+a+5$

$=a+5$

より

$a+5>0$ ∴ $a>-5$ //

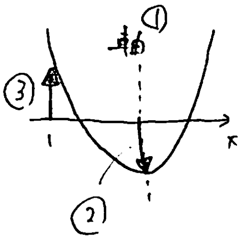
(2) $\alpha>1$, $\beta>1$ とは.

x軸の $x>1$ の部分で

$y=x^2-2ax+a^2-a-5$

のグラフがx軸と異なる

2点で交わっている。



① 軸が $x>1$

② 頂点のy座標<0

③ $x=1$の時, $y>0$

この3つを調べればよい。ここで

$y=x^2-2ax+a^2-a-5$

$=(x-a)^2-a-5$ より

頂点 $(a, -a-5)$

① 軸は $x=a$ より $a>1$ ①

② 頂点のy座標は $-a-5$ より

$-a-5<0$ ∴ $a>-5$ ②

③ $x=1$の時

$y=1^2-2a\cdot1+a^2-a-5$

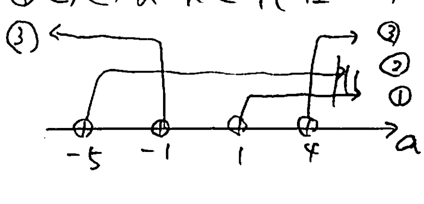
$=a^2-3a-4$

よって

$a^2-3a-4>0$ ∴ $a<-1, a>4$ ③

$(a-4)(a+1)>0$

①②③の共通範囲より



$a>4$ //

(3) $|\alpha|>1$ とは

「$\alpha>1$ または $\alpha<-1$」

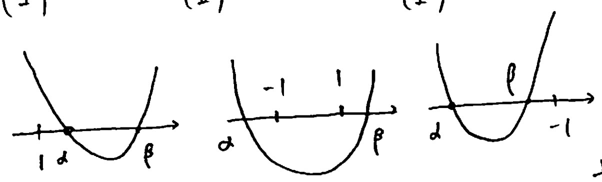
のことである。よって

$|\alpha|>1$ かつ $|\beta|>1$

とは、次の3通りである。

($\alpha<\beta$であることに注意)

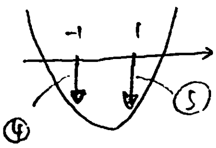
(I) (II) (III)



(I) $\alpha>1$ かつ $\beta>1$ の時

これは(2)の結果より $a>4$ (I)

(II) $\alpha<-1$ かつ $\beta>1$ の時



④ $x=-1$の時 $y<0$

⑤ $x=1$の時 $y<0$

この2つを調べればよい。

$x=-1$の時

$y=(-1)^2-2a(-1)+a^2-a-5$

$=1+2a+a^2-a-5$

$=a^2+a-4$

よって

$a^2+a-4<0$ …④

ここで $a^2+a-4=0$は

$a=\frac{-1\pm\sqrt{1+16}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

ゆえに不等式④の解は

$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ ④

また、$x=1$の時

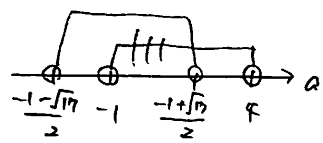
$y=a^2-3a-4$

よって $a^2-3a-4<0$

$(a-4)(a+1)<0$

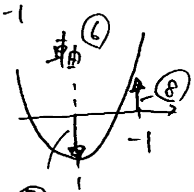
∴ $-1<a<4$ ⑤

④⑤の共通範囲より



$-1<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (II)

(III) $\alpha<-1$, $\beta<-1$ の時



⑥ 軸が $x<-1$

⑦ 頂点のy座標<0

⑧ $x=-1$の時 $y>0$

この3つを調べる。

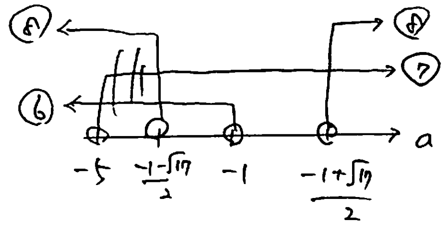
⑥ $a<-1$

⑦ $a>-5$

⑧ $a^2+a-4>0$

∴ $a<\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$, $a>\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$

⑥⑦⑧の共通範囲より



$-5<a<\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ (III)

以上 (I)(II)(III)より.

$a>4$,

$-1<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$,

$-5<a<\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ //

144

(1) $y = 2x^2 - 4x + a^2 + 2a - 1$

$= 2(x^2 - 2x) + a^2 + 2a - 1$

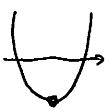
$= 2\{(x-1)^2 - 1^2\} + a^2 + 2a - 1$

$= 2(x-1)^2 - 2 + a^2 + 2a - 1$

$= 2(x-1)^2 + a^2 + 2a - 3$ …(※)

頂点 $(1,\ a^2+2a-3)$

$y=f(x)$ のグラフが x軸と異なる2点で交わるので



頂点のy座標が負ならばよい

∴ $a^2+2a-3<0$

$(a+3)(a-1)<0$

∴ $-3<a<1$

別) 判別式 $D>0$ ならばよい。

$D/4 = (-2)^2 - 2\cdot(a^2+2a-1)$

$= 4 - 2a^2 - 4a + 2$

$= -2a^2 - 4a + 6$

よって

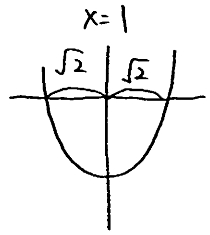
$-2a^2-4a+6>0$

$a^2+2a-3<0$

$(a+3)(a-1)<0$

∴ $-3<a<1$

(2) 放物線は軸に関して対称である。



軸が $x=1$ であり、また放物線がx軸から切り取る線分の長さが $2\sqrt{2}$ なので、図より

「グラフとx軸との交点は、$x=1$ より $\sqrt{2}$ 大きい所と $\sqrt{2}$ 小さい所」の2ヶ所である。ゆえに放物線とx軸との交点は

$(1+\sqrt{2},\ 0),\ (1-\sqrt{2},\ 0)$

また、放物線は上記2点でx軸と交わり、また x^2 の係数は2であるから、放物線は

$y = 2\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}$

とも書けるはずである。

$y = 2(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

$= 2\{(x-1)-\sqrt{2}\}\{(x-1)+\sqrt{2}\}$

$= 2\{(x-1)^2-(\sqrt{2})^2\}$

$= 2\{(x-1)^2-2\}$

$= 2(x-1)^2-4$

となり、これが(1)の(※)に等しいので頂点のy座標を比べると

$a^2+2a-3=-4$

が成り立つ。

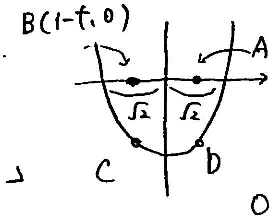
$a^2+2a+1=0$

$(a+1)^2=0$

∴ $a=-1$ (これは(1)を満たす)

(3) $a=-1$ の時 $y=2(x-1)^2-4$ である。

点Aと点Bは軸に関して対称より



$B(1-t,0)$, $A(1+t,0)$ とおく。すると t は $0<t<\sqrt{2}$ を満たす。

すると C, D の座標は

$x=1+t$ の時

$y=2\{(1+t)-1\}^2-4=2t^2-4$

$x=1-t$ の時

$y=2\{(1-t)-1\}^2-4=2t^2-4$

より

$C(1-t,\ 2t^2-4)$, $D(1+t,\ 2t^2-4)$

となる。ゆえに長方形ABCDの周の長さLは

$AB=(1+t)-(1-t)=2t$

$BC=-(2t^2-4)=-2t^2+4$ (y座標は負)

より $L=2\cdot 2t+2(-2t^2+4)$

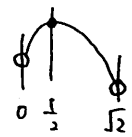
$=-4t^2+4t+8$

$=-4(t^2-t)+8$

$=-4\{(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}\}+8$

$=-4(t-\frac{1}{2})^2+9$

$0<t<\sqrt{2}$ より L は $t=\frac{1}{2}$ で最大値9をとる



この時 $A(1+t,0)$ より $A(\frac{3}{2},0)$

以上より

$A(\frac{3}{2},0)$ の時 L は最大値9をとる

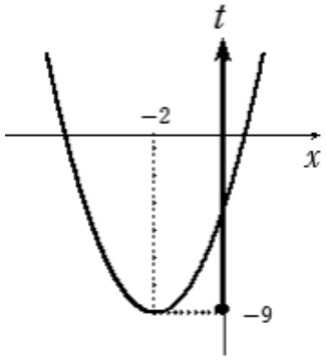
45 (1) 解答

$t \geqq -9$

解説

$$
\begin{aligned}
t &= x^2+4x-5\\
&= (x+2)^2-2^2-5\\
&= (x+2)^2-9
\end{aligned}
$$

である。よって，横軸を x，縦軸を t にとって，この関係をグラフで表すと，頂点が $(-2,\ -9)$ の下に凸の放物線である。



t のとりうる値の範囲とは，このグラフの縦軸（t 軸）の目盛の範囲のことである。グラフより，$x=-2$ のとき，縦軸の目盛は最も小さい -9 となる。グラフはどんどん上に伸びていくので，縦軸の目盛も -9 からどんどん大きくなっていく。つまり，縦軸 t は -9 以上の数になることができるので，t のとりうる値の範囲は $t \geqq -9$ である。

(2) 解答

$x=-2$ のとき最小値 -99

解説

$t=x^2+4x-5$ とおくと，$f(x)=(x^2+4x-5)^2+a(x^2+4x-5)$ は

$$f(x)=t^2+at$$

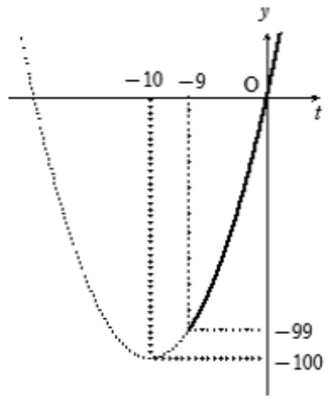
である。この式の右辺の t^2+at を，以下 $g(t)$ と表すことにする。
条件から $a=20$ より

$$
\begin{aligned}
g(t) &= t^2+20t\\
&= (t+10)^2-10^2\\
&= (t+10)^2-100
\end{aligned}
$$

となる。よって $y=g(t)$ のグラフは頂点が $(-10,\ -100)$ で下に凸の放物線である。今，(1) より t は $t \geqq -9$ である範囲しか存在しないので，$y=g(t)$ のグラフを $t \geqq -9$ という定義域で考えると，

$$
\begin{aligned}
g(-9) &= (-9)^2+20\cdot(-9)\\
&= 81-180\\
&= -99
\end{aligned}
$$

より



グラフから $g(t)$ は $t=-9$ のとき最小値 -99 をとる。ここで，$t=-9$ となる x の値を求めると，$t=x^2+4x-5$ より代入して

$$
\begin{aligned}
-9 &= x^2+4x-5\\
0 &= x^2+4x+4\\
(x+2)^2 &= 0\\
x &= -2
\end{aligned}
$$

となる。以上より，$f(x)$ は $x=-2$ のとき最小値 -99 をとる。

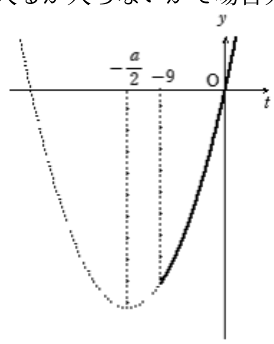
(3) 解答

$a=19,\ -6\sqrt{10}$

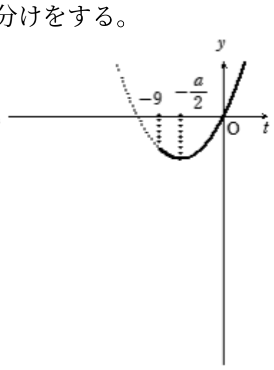
解説

$$
\begin{aligned}
g(t) &= t^2+at\\
&= \left(t+\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\\
&= \left(t+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}
\end{aligned}
$$

より，$y=g(t)$ のグラフは軸が $x=-\dfrac{a}{2}$ で，下に凸の放物線である。よって，軸が定義域 $t \geqq -9$ に入るか入らないかで場合分けをする。



軸 < -9



$-9 \leqq$ 軸

- 軸 < -9 のとき
  軸は $t = -\frac{a}{2}$ より，$-\frac{a}{2} < -9$ のときである。この a の不等式を解いて $a > 18$ のとき，軸が定義域の境界 $t = -9$ よりも右にあるので，定義域内では単調に増加する形状のグラフになる。よって，定義域における最小値は，$t = -9$ のときである。ここで $t = -9$ のとき

$$\begin{aligned} g(-9) &= (-9)^2 + a(-9) \\ &= 81 - 9a \end{aligned}$$

  より，最小値は $81 - 9a$ である。条件より，この値が -90 であるので

$$\begin{aligned} 81 - 9a &= -90 \\ -9a &= -171 \\ a &= 19 \end{aligned}$$

  が成り立つ。ここで $a = 19$ は $a > 18$ を満たす。
- $-9 \leqq$ 軸のとき
  軸は $t = -\frac{a}{2}$ より，$-9 \leqq -\frac{a}{2}$ のときである。この a の不等式を解いて $a \leqq 18$ のとき，軸が定義域の境界 $t = -9$ よりも左にあるので，定義域内に軸が存在し，下に凸のグラフになる。よって, 定義域における最小値は, 軸の $t = -\frac{a}{2}$ のときである。ここで $t = -\frac{a}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} g\left(-\frac{a}{2}\right) &= \left(-\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \\ &= 0 - \frac{a^2}{4} = -\frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

  より，最小値は $-\frac{a^2}{4}$ である。条件より，この値が -90 であるので

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{4} &= -90 \\ a^2 &= 360 \\ a &= \pm 6\sqrt{10} \end{aligned}$$

  が成り立つ。ここで $a \leqq 18$ であるので，$(6\sqrt{10})^2 = 360$，$18^2 = 324$ であるから，$a \leqq 18$ を満たすのは $a = -6\sqrt{10}$ のみである。

以上より，求める a の値は $a = 19$，$-6\sqrt{10}$ である。

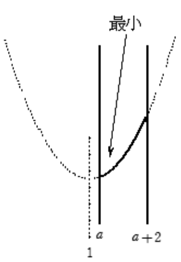
46 (1) 解答

$$m(a) = \begin{cases} a^2 + 2a + 3 & (a < -1) \\ 2 & (-1 \leqq a \leqq 1) \\ a^2 - 2a + 3 & (1 < a) \end{cases}$$

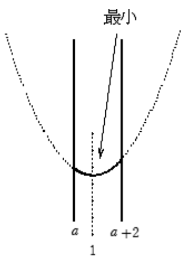
解説

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2x + 3 \\ &= (x-1)^2 - 1^2 + 3 \\ &= (x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

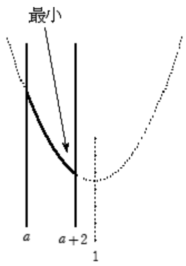
より，$y = x^2 - 2x + 3$ のグラフは下に凸で，頂点が $(1,\ 2)$ の放物線である。また，軸が $x = 1$ であるから，最小値は軸が定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ に入るかどうかで場合分けをする。



軸 $< a$



$a \leqq$ 軸 $\leqq a+2$



$a+2 <$ 軸

- 軸が定義域の左側
  このとき，軸 $x = 1$ と定義域の左端 $x = a$ の関係から，$1 < a$ のときである。このときグラフから，定義域内では単調に増加しているので，$x = a$ で最小となる。ここで，$x = a$ のとき
  $$y = a^2 - 2a + 3$$
  より，最小値は $a^2 - 2a + 3$ である。
- 軸が定義域の内部
  このとき，軸 $x = 1$ と定義域の左端 $x = a$，右端 $x = a+2$ の関係から，$a \leqq 1 \leqq a+2$ のときである。つまり，この a の不等式を解いて $-1 \leqq a \leqq 1$ のときである。このときグラフから，定義域内では下に凸の形状をしているので，$x = 1$ で最小となる。ここで，$x = 1$ のとき
  $$\begin{aligned} y &= (1-1)^2 + 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$
  より，最小値は 2 である。
- 軸が定義域の右側
  このとき，軸 $x = 1$ と定義域の右端 $x = a+2$ の関係から，$a + 2 < 1$ のときである。つまり，この a の不等式を解いて $a < -1$ のときである。このときグラフから，定義域内では単調に減少しているので，$x = a+2$ で最小となる。ここで，$x = a+2$ のとき
  $$\begin{aligned} y &= (a+2)^2 - 2(a+2) + 3 \\ &= a^2 + 4a + 4 - 2a - 4 + 3 \\ &= a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$
  より，最小値は $a^2 + 2a + 3$ である。

以上より，最小値 $m(a)$ は

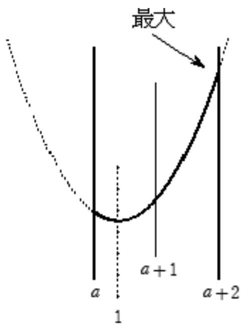
$$m(a) = \begin{cases} a^2 + 2a + 3 & (a < -1) \\ 2 & (-1 \leqq a \leqq 1) \\ a^2 - 2a + 3 & (1 < a) \end{cases}$$

(2) 解答

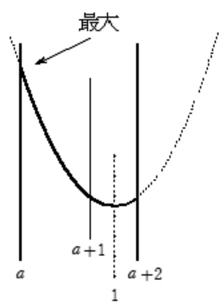
$$M(a) = \begin{cases} a^2 - 2a + 3 & (a \leqq 0) \\ a^2 + 2a + 3 & (0 < a) \end{cases}$$

解説

(1) より，軸が $x = 1$ である。また，定義域 $a \leqq x \leqq a+2$ の幅が 2 であることから，定義域の中央は $x = a+1$ である。最大値は軸と中央の位置関係で場合分けをする。



軸 $<$ 中央



中央 $\leqq$ 軸

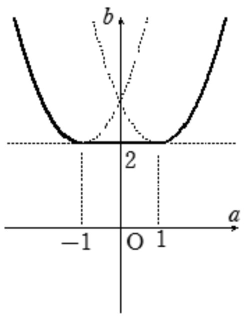
- 軸が定義域の中央よりも左側
  このとき，軸 $x = 1$ と定義域の中央 $x = a+1$ の関係から，$1 < a+1$ のときである。つまり，この a の不等式を解いて $a > 0$ のときである。このときグラフから，軸から左端 $x = a$ までの距離より，軸から右端 $x = a+2$ までの距離の方が遠くなる。よって $x = a+2$ で最大となる。ここで，$x = a+2$ のとき (1) から $y = a^2 + 2a + 3$ より，最大値は $a^2 + 2a + 3$ である。
- 軸が定義域の中央よりも右側
  このとき，軸 $x = 1$ と定義域の中央 $x = a+1$ の関係から，$a + 1 \leqq 1$ のときである。つまり，この a の不等式を解いて $a \leqq 0$ のときである。このときグラフから，軸から右端 $x = a+2$ までの距離より，軸から左端 $x = a$ までの距離

の方が遠くなる。よって $x=a$ で最大となる。
ここで，$x=a$ のとき (1) から $y=a^2-2a+3$ より，最大値は a^2-2a+3 である。

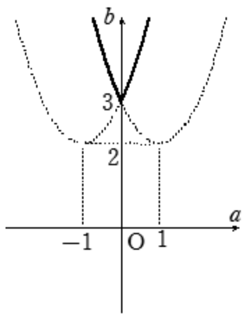
以上より，最大値 $M(a)$ は

$$M(a)=\begin{cases} a^2-2a+3 & (a \leqq 0) \\ a^2+2a+3 & (0<a) \end{cases}$$

(3) 解答



$b=m(a)$ のグラフ

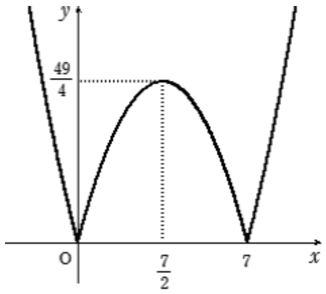


$b=M(a)$ のグラフ

解説

$b=m(a)$ とは $y=f(x)$ の x が a に，y が b に変わったようなものです。つまり，横軸を a，縦軸を b と名前を付け替えて，グラフを書けばいいです。ちなみに横軸を a，縦軸を b としたグラフ用紙を ab 平面と呼びます。また，グラフの書き方も，例えば $b=a^2-2a+3$ ならば，普段 $y=x^2-2x+3$ のグラフを書いていたときと同様に，平方完成して書けばいいです。ただし，今回のグラフは a の値の範囲ごとに $m(a)$ や $M(a)$ の式が違うので，絶対値記号のついたグラフを書くときみたいに，パーツごと書いたものを，最後に 1 枚の絵にまとめる必要があります。

47 (1) 解答



解説

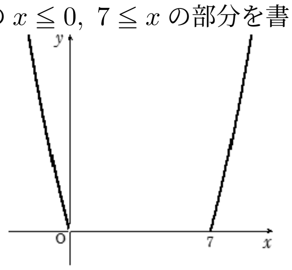
- $x^2-7x \geqq 0$ のとき
不等式を解いて $x(x-7) \geqq 0$ より $x \leqq 0,\ 7 \leqq x$ のとき,

$$|x^2-7x| = x^2-7x$$

であるから,

$$\begin{aligned} y &= x^2-7x \\ &= \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2 \\ &= \left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4} \end{aligned}$$

のグラフの $x \leqq 0,\ 7 \leqq x$ の部分を書けばよい。



(グラフその１)

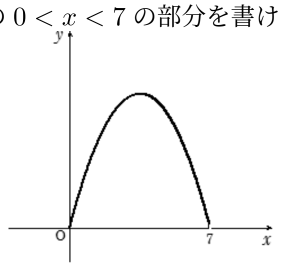
- $x^2-7x < 0$ のとき
不等式を解いて $x(x-7) < 0$ より $0 < x < 7$ のとき,

$$|x^2-7x| = -(x^2-7x)$$

であるから,

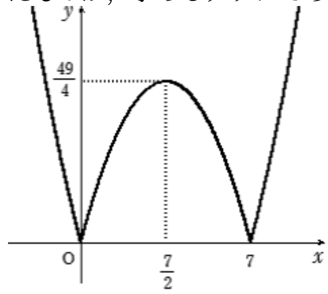
$$\begin{aligned} y &= -(x^2-7x) \\ &= -\left\{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2\right\} \\ &= -\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{4} \end{aligned}$$

のグラフの $0 < x < 7$ の部分を書けばよい。



(グラフその 2)

以上より,(グラフその 1)と(グラフその２)を１枚にまとめたものが,求めるグラフである。



(2) 解答

$$x = 4+\sqrt{13},\ 3+2\sqrt{3}$$

解説

- $x \leqq 0,\ 7 \leqq x$ のとき
$|x^2-7x| = x^2-7x$ より,与えられた方程式は

$$x^2-7x = x-3$$

となる。ゆえに,$x^2-8x+3=0$ より,解の公式から

$$x = 4 \pm \sqrt{13}$$

となる。ここで $\sqrt{13}$ は 3 と 4 の間の数より,$4-\sqrt{13}$ は 0 と 1 の間の数,$4+\sqrt{13}$ は 7 と 8 の間の数となる。ゆえに,$x \leqq 0,\ 7 \leqq x$ という条件を満たすのは $x = 4+\sqrt{13}$ のみである。
- $0 < x < 7$ のとき
$|x^2-7x| = -(x^2-7x) = -x^2+7x$ より,与えられた方程式は

$$-x^2+7x = x-3$$

となる。ゆえに,$x^2-6x-3=0$ より,解の公式から

$$x = 3 \pm \sqrt{12} = 3 \pm 2\sqrt{3}$$

となる。ここで $\sqrt{12}$ は 3 と 4 の間の数より,$3-\sqrt{12}$ は -1 と 0 の間の数,$3+\sqrt{12}$ は 6 と 7 の間の数となる。ゆえに,$0 < x < 7$ という条件を満たすのは $x = 3+\sqrt{12}$,つまり $x = 3+2\sqrt{3}$ のみである。

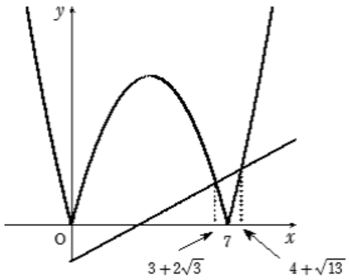
以上より,求める解は $x = 4+\sqrt{13},\ 3+2\sqrt{3}$ である。

(3) 解答

$$3+2\sqrt{3} < x < 4+\sqrt{13}$$

解説

関数 $y=|x^2-7x|$ のグラフに直線 $y=x-3$ を書き込むと，ことなる2点で交わる。その交点の x 座標は，2式を連立させてできる方程式 $|x^2-7x|=x-3$ の解であるから，(2) の結果から $x=4+\sqrt{13}$，$3+2\sqrt{3}$ である。



このとき，不等式 $|x^2-7x|<x-3\cdots$①を**関数 $y=|x^2-7x|$ のグラフよりも直線 $y=x-3$ のグラフの方が上方にある**部分の範囲と考えることで，グラフから

$$3+2\sqrt{3}<x<4+\sqrt{13}$$

と不等式①の解を求めることができる。

48 (1) 解答

$$y = 2x^2 - 4,\ y = 2x^2 - 12x + 20$$

解説

平行移動をしても x^2 の係数は変わらない。ゆえに求める放物線の x^2 の係数は 2 である。また，頂点の x 座標を t とすると，頂点は $y = 2x - 4$ 上より，頂点の座標は $(t,\ 2t - 4)$ とおける。ゆえに，求める放物線の方程式は

$$y = 2(x - t)^2 + 2t - 4 \cdots (☆)$$

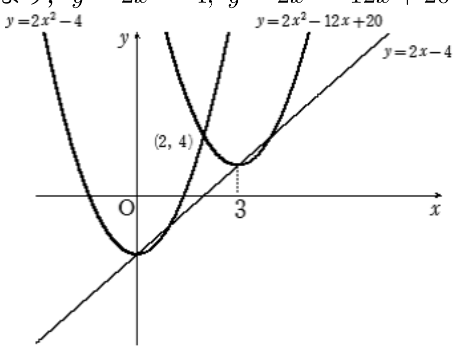
とおけ，条件からこの放物線が点 $(2,\ 4)$ を通るので，(☆) に代入して

$$4 = 2(2 - t)^2 + 2t - 4$$

が成り立つ。展開して整理すると $t^2 - 3t = 0$ より $t(t - 3) = 0$ から $t = 0,\ 3$ となる。これらを (☆) 式に代入すると

$$\begin{array}{llcl} t=0 & \text{のとき}\ y & = & 2(x-0)^2 + 2\cdot 0 - 4 \\ & & = & 2x^2 - 4 \\ t=3 & \text{のとき}\ y & = & 2(x-3)^2 + 2\cdot 3 - 4 \\ & & = & 2x^2 - 12x + 20 \end{array}$$

以上より，$y = 2x^2 - 4,\ y = 2x^2 - 12x + 20$



(2) 解答

$$y = -3x^2,\ y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{25}{3}$$

解説

x 軸に接するので，頂点の座標を $(t,\ 0)$ とおける。よって，求める 2 次関数は

$$y = a(x - t)^2 \cdots (\#)$$

とおける。この放物線 (#) が 2 点 $(1,\ -3)$, $(-5,\ -75)$ を通るので

$$\begin{array}{rcll} -3 & = & a(1-t)^2 & \cdots ① \\ -75 & = & a(-5-t)^2 & \cdots ② \end{array}$$

が成り立つ。ここで，$\frac{②}{①}$ という分数を考えると

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{②\text{の左辺}}{①\text{の左辺}} & = & \dfrac{②\text{の右辺}}{①\text{の右辺}} & \\ \dfrac{-75}{-3} & = & \dfrac{a(1-t)^2}{a(-5-t)^2} & (\text{約分して}) \\ 25 & = & \dfrac{(1-t)^2}{(-5-t)^2} & (\text{分母払って}) \\ 25(-5-t)^2 & = & (1-t)^2 & (\text{展開して整理する}) \\ 24t^2 - 60t & = & 0 & \\ t & = & 0,\ \dfrac{5}{2} & \end{array}$$

- $t = 0$ のとき
  ①に代入して

  $$-3 = a(1 - 0)^2$$

  より，解いて $a = -3$ である。よって，$a = -3,\ t = 0$ を（#）に代入すると

  $$\begin{array}{rcl} y & = & -3(x-0)^2 \\ & = & -3x^2 \end{array}$$

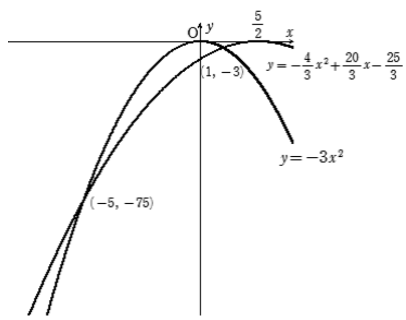
- $t = \frac{5}{2}$ のとき
  ①に代入して

  $$-3 = a\left(1 - \frac{5}{2}\right)^2$$

  より，解いて $a = -\frac{4}{3}$ である。よって，$a = -\frac{4}{3},\ t = \frac{5}{2}$ を（#）に代入すると

  $$\begin{array}{rcl} y & = & -\dfrac{4}{3}\left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 \\ & = & -\dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{20}{3}x - \dfrac{25}{3} \end{array}$$

以上より，$y = -3x^2,\ y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{20}{3}x - \frac{25}{3}$ である。



(3) 解答

$$y = x^2 - 3x + 6$$

解説

求める放物線を

1. x 軸に関して対称移動
2. x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動
3. y 軸に関して対称移動

と移動させた結果，放物線 $y=-x^2-x-2$ になったので，この逆の操作を放物線 $y=-x^2-x-2$ に施してあげればよい。つまり，

i. y 軸に関して対称移動

ii. x 軸方向に $+1$，y 軸方向に -2 だけ平行移動

iii. x 軸に関して対称移動

の順で行えばよい。ゆえに

i. $y=-x^2-x-2$ の x に $-x$ を代入して
$y=-(-x)^2-(-x)-2$ より，$y=-x^2+x-2$

ii. $y=-x^2+x-2$ の x に $x-1$，y に $y+2$ を代入して
$y+2=-(x-1)^2+(x-1)-2$

iii. 上記の結果の y に $-y$ を代入して
$-y+2=-(x-1)^2+(x-1)-2$

となる。展開して整理すると

$$y=x^2-3x+6$$

(4) 解答

$$y=x^2-6x+7,\ y=x^2+2x-1$$

解説

平行移動をしても x^2 の係数は変わらない。ゆえに求める放物線の x^2 の係数は1である。よって，求める2次関数の方程式を

$$y=x^2+bx+c \tag{4}$$

とおく。すると，この放物線は点 (1, 2) を通るので，第 (4) 式に $x=1$，$y=2$ を代入して

$$\begin{aligned} 2 &= 1^2+b\cdot 1+c \\ 2 &= 1+b+c \\ -c &= 1+b-2 \\ c &= -b+1 \end{aligned}$$

となる。よって，この結果を第 (4) 式に代入すると

$$y=x^2+bx-b+1 \tag{5}$$

となる。条件より，この放物線の x 軸から切り取る線分の長さが $2\sqrt{2}$ である。この線分の長さは，**放物線と x 軸との交点の座標から計算することができる**。よって，実際に第 (5) 式から計算をする。第 (5) 式に $y=0$ を代入すると

$$x^2+bx-b+1=0$$

となり，解の公式を用いると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot 1\cdot(-b+1)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4b-4}}{2} \end{aligned}$$

となる。ゆえに，第 (5) 式の放物線と x 軸との交点の座標は

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2+4b-4}}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{-b+\sqrt{b^2+4b-4}}{2},\ 0\right)$$

となるから，切り取る線分の長さは (x 座標の大きい方)$-$(x 座標の小さい方) より

$$\frac{-b+\sqrt{b^2+4b-4}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2+4b-4}}{2}$$

となる。この値が条件より $2\sqrt{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{-b+\sqrt{b^2+4b-4}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2+4b-4}}{2} &= 2\sqrt{2} \\ \frac{-b+\sqrt{b^2+4b-4}+b+\sqrt{b^2+4b-4}}{2} &= 2\sqrt{2} \\ \frac{2\sqrt{b^2+4b-4}}{2} &= 2\sqrt{2} \\ \sqrt{b^2+4b-4} &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

そして，両辺を2乗すると

$$\begin{aligned} (\sqrt{b^2+4b-4})^2 &= (2\sqrt{2})^2 \\ b^2+4b-4 &= 8 \\ b^2+4b-12 &= 0 \\ (b+6)(b-2) &= 0 \end{aligned}$$

より，$b=-6,\ 2$ と求められる。これを第 (5) 式に代入すると

$$\begin{aligned} b=-6 \quad \text{のとき} \quad y &= x^2-6x-(-6)+1 \\ &= x^2-6x+7 \\ b=2 \quad \text{のとき} \quad y &= x^2+2x-2+1 \\ &= x^2+2x-1 \end{aligned}$$

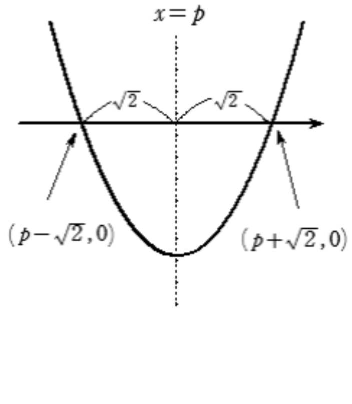
以上より

$$y=x^2-6x+7,\ y=x^2+2x-1$$

である。

別解

平行移動をしても x^2 の係数は変わらない。ゆえに求める放物線の x^2 の係数は1である。また，求める放物線の軸を $x=p$ とすると，放物線は軸に関して対称であり，また放物線が x 軸から切り取る線分の長さが $2\sqrt{2}$ であるから，放物線と x 軸との交点の座標はグラフより $(p-\sqrt{2},\ 0)$, $(p+\sqrt{2},\ 0)$ となる。



ゆえに，求める放物線の方程式は

$$y = \{x - (p - \sqrt{2})\}\{x - (p + \sqrt{2})\}$$

と書ける。この式を展開すると

$$\begin{aligned} y &= \{x - (p - \sqrt{2})\}\{x - (p + \sqrt{2})\} \\ &= \{(x - p) + \sqrt{2}\}\{(x - p) - \sqrt{2}\} \\ &= (x - p)^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= x^2 - 2px + p^2 - 2 \cdots (※) \end{aligned}$$

となる。条件より，この放物線が点 $(1,\ 2)$ を通るので，(※) に代入して

$$2 = 1^2 - 2p \cdot 1 + p^2 - 2$$

よって $p^2 - 2p - 3 = 0$ から $(p - 3)(p + 1) = 0$ より，$p = 3,\ -1$ となる。これを (※) 式に代入して

$$\begin{aligned} p = 3 &\quad \text{のとき} \quad y = x^2 - 6x + 7 \\ p = -1 &\quad \text{のとき} \quad y = x^2 + 2x - 1 \end{aligned}$$

となる。

49 (1) 解答

$$\begin{cases} a>0 & \text{のとき} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ a=0 & \text{のとき} \quad \text{すべての実数} \\ a<0 & \text{のとき} \quad x \leqq 0,\ 1 \leqq x \end{cases}$$

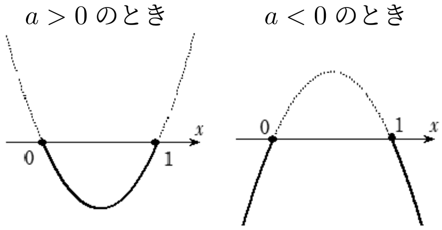
解説

- $a \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} ax^2 &\leqq ax \quad \cdots (※) \\ ax^2 - ax &\leqq 0 \\ ax(x-1) &\leqq 0 \end{aligned}$$

より，$y = ax(x-1)$ のグラフで $y \leqq 0$，つまり x 軸よりも下となる場所を求める。ここで，$y = ax(x-1)$ のグラフは x 軸と $x = 0,\ 1$ で交わる。x^2 の係数が a であるから，a の正負によってグラフの形状が変わる。

$a > 0$ のとき　　$a < 0$ のとき



$0 \leqq x \leqq 1$　　$x \leqq 0,\ 1 \leqq x$

- $a = 0$ のとき
上記の (※) に $a = 0$ を代入すると，x がどんな数であったとしても

$$\begin{aligned} 0 \cdot x^2 &\leqq 0 \cdot x \\ 0 &\leqq 0 \end{aligned}$$

となる。この式は当たり前である。つまり，どんな x に対しても，成り立つ式が出来上がるので，$a = 0$ のとき，この不等式の解はすべての実数である。

以上より

$$\begin{cases} a>0 & \text{のとき} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ a=0 & \text{のとき} \quad \text{すべての実数} \\ a<0 & \text{のとき} \quad x \leqq 0,\ 1 \leqq x \end{cases}$$

となる。

(2) 解答

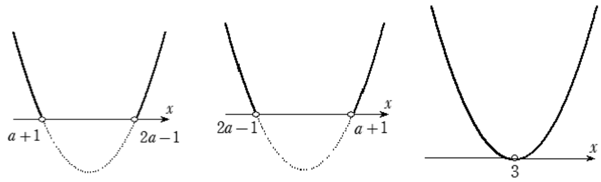
$$\begin{cases} a>2 & \text{のとき} \quad x < a+1,\ 2a-1 < x \\ a=2 & \text{のとき} \quad x = 3 \text{ を除くすべての実数} \\ a<2 & \text{のとき} \quad x < 2a-1,\ a+1 < x \end{cases}$$

解説

$$\begin{aligned} & x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 \\ = & x^2 - 3ax + (2a-1)(a+1) \\ = & \{x - (2a-1)\}\{x - (a+1)\} \end{aligned}$$

である。よって，$y = x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1$ のグラフにおいて，$y > 0$ つまり x 軸よりも上の部分を考える。ここで $y = x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1$ のグラフは x 軸と $x = 2a-1,\ a+1$ で交わる。これらの位置関係によって，場合分けをする。

$a+1 < 2a-1$　　$2a-1 < a+1$　　$2a-1 = a+1$



- $a+1 < 2a-1$ のとき
この不等式を解くと，$a > 2$ である。また，このとき $a+1$ よりも $2a-1$ の方が右にあるので，$y > 0$ となるのは $x < a+1,\ 2a-1 < x$ である。
- $2a-1 < a+1$ のとき
この不等式を解くと，$a < 2$ である。また，このとき $2a-1$ よりも $a+1$ の方が右にあるので，$y > 0$ となるのは $x < 2a-1,\ a+1 < x$ である。
- $a+1 = 2a-1$ のとき
この方程式を解くと，$a = 2$ である。また，このとき $x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ となる。よって $y = (x-3)^2$ のグラフにおいて $y > 0$ となるのは，x が 3 以外のすべての実数のときである。

以上より

$$\begin{cases} a>2 & \text{のとき} \quad x < a+1,\ 2a-1 < x \\ a=2 & \text{のとき} \quad x = 3 \text{ を除くすべての実数} \\ a<2 & \text{のとき} \quad x < 2a-1,\ a+1 < x \end{cases}$$

となる。

(3) 解答

$$\begin{cases} a<0 & \text{のとき} \quad x < \dfrac{1}{a},\ 1 < x \\ a=0 & \text{のとき} \quad x > 1 \\ 0<a<1 & \text{のとき} \quad 1 < x < \dfrac{1}{a} \\ a=1 & \text{のとき} \quad \text{解はない} \\ a>1 & \text{のとき} \quad \dfrac{1}{a} < x < 1 \end{cases}$$

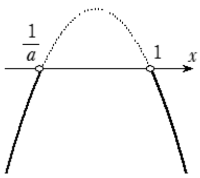
解説

$$\begin{aligned} ax^2 - (a+1)x + 1 &< 0 \quad \cdots (※) \\ (ax-1)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$

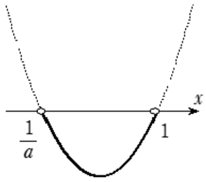
- $a = 0$ のとき
(※) 式に $a = 0$ を代入すると $0 \cdot x^2 - (0+1)x + 1 < 0$ より $-x + 1 < 0$ となる。これを解いて $x > 1$ となる。

- $a \neq 0$ のとき

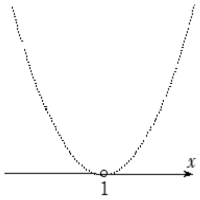
  $y = (ax-1)(x-1) \cdots ①$のグラフにおいて，$y < 0$ となる部分を考える。ここで，x^2 の係数は a である。また，x 軸と $x = \dfrac{1}{a}$, 1 と交わる。



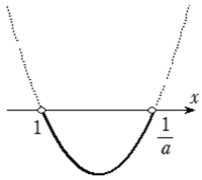
$\dfrac{1}{a} < 0$



$0 < \dfrac{1}{a} < 1$



$\dfrac{1}{a} = 1$



$1 < \dfrac{1}{a}$

☆ $\dfrac{1}{a} < 0$ のとき

つまり a が負の数のときである。x^2 の係数は a であったから，グラフ①は上に凸である。また，$\dfrac{1}{a}$ は負の数より，明らかに 1 よりも小さいから，グラフより $y < 0$ となる部分は $x < \dfrac{1}{a}$, $1 < x$ である。

☆ $0 < \dfrac{1}{a} < 1$ のとき

つまり $a > 1$ ときである。x^2 の係数は a であったから，グラフ①は下に凸である。また，$\dfrac{1}{a}$ は 1 よりも小さいから，グラフより $y < 0$ となる部分は $\dfrac{1}{a} < x < 1$ である。

☆ $\dfrac{1}{a} = 1$ のとき

つまり $a = 1$ ときである。このとき，グラフ①に $a = 1$ を代入すると $y = (x-1)^2$ となる。よって $y < 0$ となる部分は存在しないので，解はない。

☆ $1 < \dfrac{1}{a}$ のとき

つまり $0 < a < 1$ ときである。x^2 の係数は a であったから，グラフ①は下に凸である。また，$\dfrac{1}{a}$ は 1 よりも大きいから，グラフより $y < 0$ となる部分は $1 < x < \dfrac{1}{a}$ である。

以上より

$$\begin{cases} a < 0 & \text{のとき} & x < \dfrac{1}{a},\ 1 < x \\ a = 0 & \text{のとき} & x > 1 \\ 0 < a < 1 & \text{のとき} & 1 < x < \dfrac{1}{a} \\ a = 1 & \text{のとき} & \text{解はない} \\ a > 1 & \text{のとき} & \dfrac{1}{a} < x < 1 \end{cases}$$

である。

50 (1) 解答

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2-2(a+1)x+1\\
&= a\left\{x^2-\frac{2(a+1)}{a}x\right\}+1\\
&= a\left\{\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2-\left(\frac{a+1}{a}\right)^2\right\}+1\\
&= a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2-a\left(\frac{a+1}{a}\right)^2+1\\
&= a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{(a+1)^2}{a}+a\\
&= a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{(a+1)^2-a}{a}\\
&= a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{(a^2+2a+1)-a}{a}\\
&= a\left(x-\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{a^2+a+1}{a}
\end{aligned}
$$

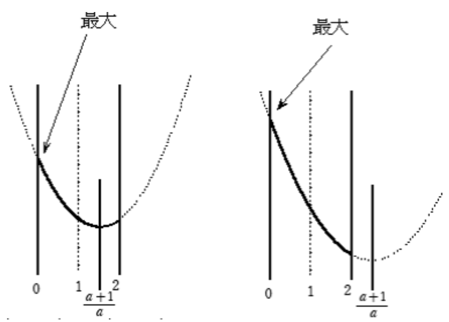
よって，頂点 $\left(\dfrac{a+1}{a},\ -\dfrac{a^2+a+1}{a}\right)$ である。

(2) 解答

$a>0$ より，x^2 の係数は正である。よって $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。今，軸が $x=\dfrac{a+1}{a}$ より

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{a+1}{a}\\
&= \frac{a}{a}+\frac{1}{a}=1+\frac{1}{a}
\end{aligned}
$$

である。今，a は正なので $\dfrac{1}{a}$ も正の数である。ゆえに，$1+\dfrac{1}{a}$ は 1 よりも大きくなるので，軸 $x=1+\dfrac{1}{a}$ は必ず定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中央である $x=1$ よりも右側に存在する。



$0<$ 軸 <2 のとき　　$2\leqq$ 軸のとき

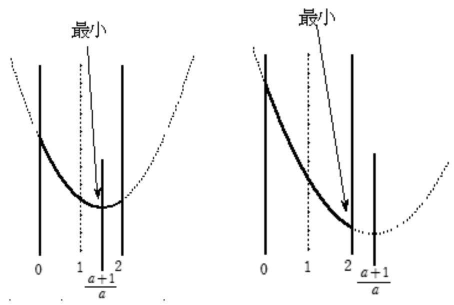
よって，グラフからもわかる通り，軸から定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の左端 $x=0$ までの距離の方が右端 $x=2$ までの距離より必ず遠くなる。放物線は軸に関して対称なので，軸から離れれば離れるほど高く上がっていく。ゆえに，$f(x)$ は $x=0$ で最大となる。すると

$$
\begin{aligned}
f(0) &= a\cdot 0^2-2(a+1)\cdot 0+1\\
&= 1
\end{aligned}
$$

となる。以上より，$f(x)$ は $x=0$ のとき最大値 1 をとる。

(3) 解答

$a>0$ より, x^2 の係数は正である。よって $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。また，$a+1$ も a も正より $\dfrac{a+1}{a}$ も正である。今，軸が $x=\dfrac{a+1}{a}$ より，軸は必ず y 軸よりも右側に存在する。よって，軸が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中に入る・入らないで場合分けをする。

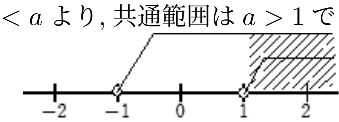


$0<$ 軸 <2 のとき　　$2\leqq$ 軸のとき

- $0<$ 軸 <2 のとき
  今，軸は $x=\dfrac{a+1}{a}$ であるから

$$
\begin{aligned}
0 &< \frac{a+1}{a} < 2 \quad (\text{すべてに } a \text{ をかける})\\
0 &< a+1 < 2a
\end{aligned}
$$

より，2 つの不等式 $0<a+1$ と $a+1<2a$ を同時に見たす a の範囲を考える。すると $-1<a$ かつ $1<a$ より, 共通範囲は $a>1$ である。



そして，a がこの範囲にあるときは，軸 $x=\dfrac{a+1}{a}$ が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の中にあるので，$f(x)$ は軸の場所で最小となる。ここで

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{a+1}{a}\right) &= a\left(\frac{a+1}{a}-\frac{a+1}{a}\right)^2-\frac{a^2+a+1}{a}\\
&= a\cdot 0^2-\frac{a^2+a+1}{a}\\
&= a\cdot 0^2-\frac{a^2+a+1}{a}\\
&= -\frac{a^2+a+1}{a}
\end{aligned}
$$

であるから，$a>1$ のとき $f(x)$ は $x=\dfrac{a+1}{a}$ で最小値 $-\dfrac{a^2+a+1}{a}$ をとる。

- $2\leqq$ 軸 のとき

$$
\begin{aligned}
2 &\leqq \frac{a+1}{a} \quad (\text{すべてに } a \text{ をかける})\\
2a &\leqq a+1\\
a &\leqq 1
\end{aligned}
$$

となるが，今 $a>0$ であることに注意して，$0<a\leqq 1$ である。a がこの範囲にあるときは，軸 $x=\dfrac{a+1}{a}$ が定義域 $0\leqq x\leqq 2$ の右側にあるので，定義域内では単調に減少する形状となるから，$f(x)$ は $x=2$ で最小となる。ここで

$$\begin{aligned} f(2) &= a\cdot 2^2-2(a+1)\cdot 2+1 \\ &= 4a-4(a+1)+1=-3 \end{aligned}$$

であるから，$0<a\leqq 1$ のとき $f(x)$ は $x=2$ で最小値 -3 をとる。

以上より最小値は

$$\begin{cases} 0<a\leqq 1 \quad \text{のとき} \quad -3 \quad (x=2) \\ a>1 \quad \text{のとき} \quad -\dfrac{a^2+a+1}{a} \quad \left(x=\dfrac{a+1}{a}\right) \end{cases}$$

となる。

51

(1) $y=x^2+ax+b$ とは
x^2の係数が1の放物線である。
ここで軸が $x=\frac{3}{2}$ より
x^2の係数が1で軸が$x=\frac{3}{2}$である
放物線は

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+c$$

と書ける。ゆえに、この式を展開したら $y=x^2+ax+b$ になるので、

$$y=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+c$$
$$=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2+c$$
$$=x^2-3x+\frac{9}{4}+c$$

∴ $y=x^2+ax+b$ と比較して

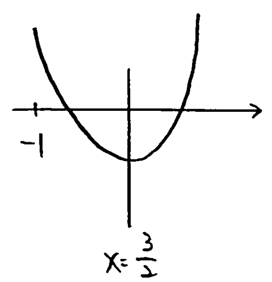
$$\underline{a=-3}$$

(2) (1)より $a=-3$ より

$$y=x^2-3x+b$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+b$$
$$=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+b$$

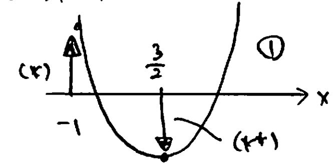
頂点 $\left(\frac{3}{2},\ b-\frac{9}{4}\right)$

放物線①がx軸の$x>-1$の部分と異なる2点で交わるのは、
軸 $x=\frac{3}{2}$ が $x>-1$ の部分にあることから考えると



$x=-1$の時 $y>0$ …(*)

また、頂点のy座標<0…(**)
の2つが成り立てばよい。



(*)より
$x=-1$の時

$$y=(-1)^2-3(-1)+b$$
$$=1+3+b$$
$$=4+b$$

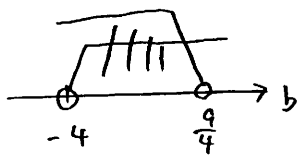
∴ $4+b>0$ より
$b>-4$ …(*)

(**)より
頂点のy座標は
$b-\frac{9}{4}$ より

$$b-\frac{9}{4}<0$$

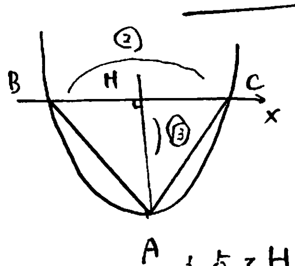
∴ $b<\frac{9}{4}$ …(**)

よって (*)と(**)の共通範囲より



∴ $\underline{-4<b<\frac{9}{4}}$

(3)



軸とx軸との交点をHとする。
すると $AH:BC=\sqrt{3}:2$ …(☆)
が成り立つ。
頂点のy座標は $b-\frac{9}{4}$
であるが、頂点がx軸より下にあるので、この $b-\frac{9}{4}$ は負の数である。ゆえに

$$AH=-\left(b-\frac{9}{4}\right)=\frac{9}{4}-b$$

また、$y=x^2-3x+b$ とx軸との交点は

$$x^2-3x+b=0$$

$$\therefore\ x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot b}}{2}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{9-4b}}{2}$$

$$\therefore\ BC=\frac{3+\sqrt{9-4b}}{2}-\frac{3-\sqrt{9-4b}}{2}$$
$$=\frac{3+\sqrt{9-4b}-3+\sqrt{9-4b}}{2}$$
$$=\sqrt{9-4b}$$

以上より(☆)に代入して

$$\left(\frac{9}{4}-b\right):\sqrt{9-4b}=\sqrt{3}:2$$

ここで

$$\frac{9-4b}{4}:\sqrt{9-4b}=\sqrt{3}:2$$
$$\frac{(\sqrt{9-4b})^2}{4}:\sqrt{9-4b}=\sqrt{3}:2$$

$\sqrt{9-4b}$で割って

$$\frac{\sqrt{9-4b}}{4}:1=\sqrt{3}:2$$
$$\frac{\sqrt{9-4b}}{4}\cdot 2=1\cdot\sqrt{3}$$
$$\sqrt{9-4b}=2\sqrt{3}$$
$$\therefore\ \sqrt{9-4b}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$$

よって $9-4b=12$

$$-4b=3$$
$$\underline{b=-\frac{3}{4}}$$

(これは(2)を満たす)

$\boxed{52}$

(1)

$f(x) = -4x^2 + 8ax + 2$

$= -4(x^2 - 2ax) + 2$

$= -4\{(x-a)^2 - a^2\} + 2$

$= -4(x-a)^2 + 4a^2 + 2$

頂点 $(a,\ 4a^2+2)$

(2)

$y=f(x)$ のグラフは上に凸

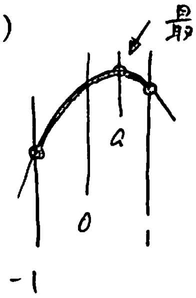
また軸は $x=a$

条件より $a>0$ であり

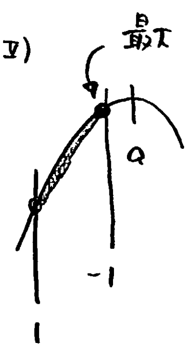
また定義域 $-1 \leqq x \leqq 1$ の

中央は $x=0$ である。

(I)



(II)



(I)

$0<a<1$ の時

グラフより軸 $x=a$ が

定義域内なので

$x=a$ で最大より

最大値は $f(a)$

よって

$M(a) = f(a)$

$= -4(a-a)^2 + 4a^2 + 2$

$= 4a^2 + 2$

(II)

$1 \leqq a$ の時

グラフより軸 $x=a$ が定義域の

右外側より $x=1$ で最大

最大値は $f(1)$ より

$M(a) = f(1)$

$= -4\times 1^2 + 8a\times 1 + 2$

$= -4 + 8a + 2$

$= 8a - 2$

以上(I)(II)より

$$M(a) = \begin{cases} 4a^2+2 & (0<a<1) \\ 8a-2 & (1 \leqq a) \end{cases}$$

(3)

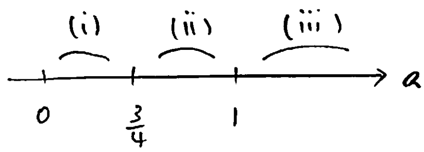
$$|4a-3| = \begin{cases} 4a-3 & (4a-3 \geqq 0) \\ -(4a-3) & (4a-3<0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4a-3 & (a \geqq \frac{3}{4}) \\ -4a+3 & (a < \frac{3}{4}) \end{cases}$$

よって $|4a-3|$ は $a=\frac{3}{4}$ を境界にして

場合分けされる。一方(2)より、$M(a)$ は

$a=1$ を境界にして場合分けされる。



(i)

$0<a<\frac{3}{4}$ の時

$$\begin{cases} M(a) = 4a^2+2 \\ |4a-3| = -4a+3 \end{cases}$$

よって $M(a) = 3|4a-3|$

は

$4a^2+2 = 3(-4a+3)$

整理して

$4a^2+12a-7=0$

$(2a+7)(2a-1)=0$

$a = -\frac{7}{2},\ \frac{1}{2}$

$0<a<\frac{3}{4}$ を満たすのは $a=\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{3}{4} \leqq a < 1$ の時

$$\begin{cases} M(a) = 4a^2+2 \\ |4a-3| = 4a-3 \end{cases}$$

よって

$M(a) = 3|4a-3|$

は

$4a^2+2 = 3(4a-3)$

整理して

$4a^2-12a+11=0$

$a = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-44}}{4}$

よって解なし

(iii) $a \geqq 1$ の時

$$\begin{cases} M(a) = 8a-2 \\ |4a-3| = 4a-3 \end{cases}$$

よって $M(a) = 3|4a-3|$

は

$8a-2 = 3(4a-3)$

解いて

$a = \frac{7}{4}$

これは $a \geqq 1$ を満たす

以上より

$a = \frac{1}{2},\ \frac{7}{4}$