1 (1) 解答

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{4}{3+\sqrt{5}}+\frac{4}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{4(3-\sqrt{5})+4(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{12-3\sqrt{5}+12+3\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{24}{4} \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= \frac{4}{3+\sqrt{5}}\times\frac{4}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{4^2}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{16}{4} \\ &= 4 \end{aligned}$$

(2) 解答

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &= (\sqrt{x})^2+2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2 \\ &= x+2\sqrt{xy}+y \\ &= (x+y)+2\sqrt{xy} \end{aligned}$$

(1) から $x+y=6,\ xy=4$ より

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=6+2\sqrt{4}=10$$

(3) 解答

(2) より $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=10$ より

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\pm\sqrt{10}$$

ここで $\sqrt{x}+\sqrt{y}>0$ なので $\sqrt{x}+\sqrt{y}=-\sqrt{10}$ は不適より

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{10}\ \cdots\cdots ①$$

である。同様に $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ を考えると

$$\begin{aligned} (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 &= (\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2 \\ &= (x+y)-2\sqrt{xy} \\ &= 6-2\sqrt{4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\pm\sqrt{2}$$

ここで $x=\dfrac{4}{3+\sqrt{5}},\ y=\dfrac{4}{3-\sqrt{5}}$ であり，x の分母の方が y の分母よりも大きいので $x<y$ である。つまり $\sqrt{x}-\sqrt{y}<0$ より $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{2}$ は不適なので

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}\ \cdots\cdots ②$$

以上より，①②から

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

別解 1

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\ &= \frac{(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{y})^2} \\ &= \frac{(x+y)-2\sqrt{xy}}{x-y}\cdots(※) \end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} x-y &= \frac{4}{3+\sqrt{5}}-\frac{4}{3-\sqrt{5}} \\ &= \frac{4(3-\sqrt{5})-4(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} \\ &= \frac{-8\sqrt{5}}{4} \\ &= -2\sqrt{5} \end{aligned}$$

より，(※) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{(x+y)-2\sqrt{xy}}{x-y} \\ &= \frac{6-2\sqrt{4}}{-2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

別解 2

$x=\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ より，

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= \sqrt{\frac{4}{3+\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{8}{6+2\sqrt{5}}} \\ &= \sqrt{\frac{8}{(\sqrt{5}+\sqrt{1})^2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+1} \\ &= \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{2} \\ &= \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

となり，$\sqrt{y}$ も同様で $\sqrt{y}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ となる。

よって $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ に代入して

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} &= \frac{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

2 (1) 解答

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=x^2-2\times 2=x^2-4$$

(2) 解答

$$a^2+b^2+3a+3b=(a^2+b^2)+3(a+b)$$

より，(1) の結果を代入して

$$\begin{aligned}(x^2-4)+3x &= 0\\ x^2+3x-4 &= 0\\ (x+4)(x-1) &= 0\end{aligned}$$

より，$x=-4,\ 1$ である。ここで a^2+b^2 は必ず 0 以上の数になるので

$x=-4$ のとき　$a^2+b^2=(-4)^2-4=12$　(適する)
$x=1$ のとき　$a^2+b^2=1^2-4=-3$　(適さない)

である。以上より，$x=-4$
このとき，

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ &= (a^2+b^2)-2ab\\ &= \{(-4)^2-4\}-2\times 2\\ &= 8\end{aligned}$$

(3) 解答
(2) より $x=-4$ なので $a+b=-4$ である。また，$ab=2$ であり，a も b も 0 ではないので，$ab=2$ の両辺を a で割って $b=\dfrac{2}{a}$ と変形し，$a+b=-4$ に代入すると

$$a+\frac{2}{a}=-4 \quad \cdots\cdots(※)$$

が成り立つ。このとき

$$\begin{aligned}a^2+\frac{4}{a^2} &= \left(a+\frac{2}{a}\right)^2-2\times a\times\frac{2}{a}\\ &= \left(a+\frac{2}{a}\right)^2-4\\ &= (-4)^2-4 \qquad ((※)\text{ より})\\ &= 12\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}a^2+a+1+\frac{2}{a}+\frac{4}{a^2} &= \left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)+\left(a+\frac{2}{a}\right)+1\\ &= 12+(-4)+1\\ &= 9\end{aligned}$$

3 (1) 解答

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ &= (a^2+b^2)+2ab\\ &= 7+2\times 1\\ &= 9\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ &= 7-2\times 1\\ &= 5\end{aligned}$$

より

$$a-b=\pm\sqrt{5}$$

である。ここで条件より $a>b$ なので $a-b>0$ であるから $a-b=-\sqrt{5}$ は不適である。よって $a-b=\sqrt{5}$

(2) 解答

$$\begin{aligned}x+y &= (a^2-3b)+(b^2-3a)\\ &= (a^2+b^2)-3(a+b)\cdots\cdots(※)\end{aligned}$$

である。ここで，(1) から $(a+b)^2=9$ より $a+b=\pm 3$ である。また，条件から $a>0,\ b>0$ なので $a+b>0$ である。ゆえに $a+b=3$ であるから (※) に代入して

$$\begin{aligned}x+y &= 7-3\times 3\\ &= -2\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}x-y &= (a^2-3b)-(b^2-3a)\\ &= (a^2-b^2)+3(a-b)\\ &= (a+b)(a-b)+3(a-b)\\ &= 3\times\sqrt{5}+3\times\sqrt{5}\\ &= 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

(3) 解答
$x^3y-xy^3+4x^2-4y^2$ について

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^3y-xy^3)+(4x^2-4y^2)\\ &= xy(x^2-y^2)+4(x^2-y^2)\\ &= (xy+4)(x^2-y^2)\\ &= (xy+4)(x+y)(x-y)\cdots(※※)\end{aligned}$$

ここで (2) より $x+y=-2,\ x-y=6\sqrt{5}$ より，以下 xy の値を求める。

$$\begin{aligned}xy &= (a^2-3b)(b^2-3a)\\ &= a^2b^2-3a^3-3b^3+9ab\\ &= (ab)^2+9ab-3(a^3+b^3)\\ &= (ab)^2+9ab-3\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}\\ &= 1^2+9\times 1-3(3^3-3\times 1\times 3)\\ &= 1+9-3(27-9)\\ &= -44\end{aligned}$$

以上より，(※※) に代入して

$$\begin{aligned}x^3y-xy^3+4x^2-4y^2 &= (xy+4)(x+y)(x-y)\\ &= \{(-44)+4\}\times(-2)\times 6\sqrt{5}\\ &= 480\sqrt{5}\end{aligned}$$

別解 ((※※) までは同じ)
ここで (2) より $x+y=-2,\ x-y=6\sqrt{5}$ より，以下 xy の値を求める。この 2 式を連立すると

$$\begin{cases}x+y=-2 & \cdots\cdots①\\ x-y=6\sqrt{5} & \cdots\cdots②\end{cases}$$

より，①+②から

$$\begin{aligned} 2x &= -2+6\sqrt{5} \\ x &= -1+3\sqrt{5} \end{aligned}$$

また，①−②から

$$\begin{aligned} 2y &= -2-6\sqrt{5} \\ y &= -1-3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned} xy &= (-1+3\sqrt{5})(-1-3\sqrt{5}) \\ &= (-1)^2-(3\sqrt{5})^2 \\ &= 1-45 \\ &= -44 \end{aligned}$$

(以下，同じ)

4 (1) 解答

$$\begin{aligned} x+y &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}}{2-1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{2}{2-1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

(2) 解答

$$\begin{aligned} \frac{y}{x}+\frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} \\ &= \frac{4^2-2\cdot 2}{2} \\ &= \frac{12}{2}=6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y} &= \frac{x^3+y^3}{xy} \\ &= \frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy} \\ &= \frac{4^3-3\cdot 2\cdot 4}{2} \\ &= \frac{64-24}{2}=\frac{40}{2}=20 \end{aligned}$$

(3) 解答

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{2-1} \\ &= 2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

ここで，$1<\sqrt{2}<2$ より，すべてに 2 を加えて $3<2+\sqrt{2}<4$ が成り立つ。ゆえに，$2+\sqrt{2}$ の整数部分は 3 より $a=3$ である。また，

$$\begin{aligned} (x\text{ の小数部分}) &= x-(x\text{ の整数部分}) \\ b &= (2+\sqrt{2})-3 \\ &= \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

となる。以下, 不等式 $|b^2-a-b|<p<k\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$ について考えていく。

$$\begin{aligned} b^2-a-b &= (\sqrt{2}-1)^2-3-(\sqrt{2}-1) \\ &= (2-2\sqrt{2}+1)-3-\sqrt{2}+1 \\ &= -3\sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

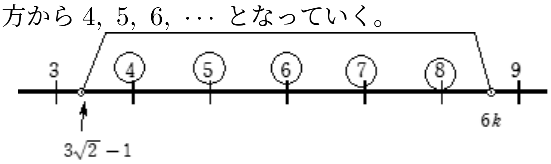
となり，また $-3\sqrt{2}+1$ は負の数より

$$\begin{aligned} |b^2-a-b| &= |-3\sqrt{2}+1| \\ &= -(-3\sqrt{2}+1) \\ &= 3\sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

となる。また，(2) より $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=6$ より，与えられた不等式は

$$3\sqrt{2}-1<p<6k\cdots(※)$$

となる。この不等式 (※) を満たす整数 p が 5 個であればいい。ここで，$3\sqrt{2}-1$ は，$\sqrt{2}=1.414\cdots$ であるから，$3\sqrt{2}=4.2\cdots$ より $3\sqrt{2}-1=3.2\cdots$ が成り立つ。つまり $3\sqrt{2}-1$ は 3 と 4 の間の数である。よって，不等式 (※) を満たす整数は小さい方から 4，5，6，$\cdots$ となっていく。



これらの総数が 5 個であるには，数直線からもわかる通り，$6k$ が 8 と 9 の間であればいい。よって

$$8<6k\leqq 9\cdots(♪)$$

が成り立たねばならず，すべてを 6 で割って

$$\frac{8}{6}<k\leqq\frac{9}{6}$$

すなわち

$$\frac{4}{3}<k\leqq\frac{3}{2}$$

補足

上記 (♪) で

$$8 < 6k \leqq 9$$

8 に等号がつかないで，9 に等号がつく理由を以下述べる。もし，$6k = 8$ であったとしたら，不等式 (※) は

$$3\sqrt{2} - 1 < p < 8$$

となる。よって p は 8 より小さい ので，この不等式を満たす p は 4，5，6，7 の **4 個**になってしまう。つまり 5 個ではないので問題文の条件を満たさないから $6k = 8$ とすることはできない。一方，$6k = 9$ であったとしたら，不等式 (※) は

$$3\sqrt{2} - 1 < p < 9$$

となる。よって p は 9 より小さい ので，この不等式を満たす p は 4，5，6，7，8 の **5 個**となるので，問題文の条件を満たすから $6k = 9$ でも構わない。
以上より，$6k$ は 8 にすることはできないが，9 であっても問題文の条件を満たすので

$$8 < 6k \leqq 9$$

となる。

5 (1) 解答

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}|(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 1| \\ &= \frac{1}{2}|(3 - 2\sqrt{6} + 2) - 1| \\ &= \frac{1}{2}|4 - 2\sqrt{6}| \end{aligned}$$

ここで，$4 - 2\sqrt{6}$ は $\sqrt{16} - \sqrt{24}$ と考えることにより，負の数であることがわかるので

$$\begin{aligned} p &= -\frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{6}) \\ &= -(2 - \sqrt{6}) \\ &= \sqrt{6} - 2 \end{aligned}$$

(2) 解答

(1) より $p = \sqrt{6} - 2$ なので

$$\begin{aligned} p + \frac{2}{p} &= (\sqrt{6} - 2) + \frac{2}{\sqrt{6} - 2} \\ &= (\sqrt{6} - 2) + \frac{2(\sqrt{6} + 2)}{(\sqrt{6} - 2)(\sqrt{6} + 2)} \\ &= (\sqrt{6} - 2) + \frac{2(\sqrt{6} + 2)}{6 - 4} \\ &= (\sqrt{6} - 2) + (\sqrt{6} + 2) \\ &= 2\sqrt{6} \end{aligned}$$

また，

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

の a に p を，b に $\dfrac{2}{p}$ を代入すると

$$\begin{aligned} p^3 + \left(\frac{2}{p}\right)^3 &= \left(p + \frac{2}{p}\right)^3 - 3 \cdot p \cdot \frac{2}{p}\left(p + \frac{2}{p}\right) \\ p^3 + \frac{8}{p^3} &= \left(p + \frac{2}{p}\right)^3 - 6\left(p + \frac{2}{p}\right) \\ &= (2\sqrt{6})^3 - 6(2\sqrt{6}) \\ &= 48\sqrt{6} - 12\sqrt{6} \\ &= 36\sqrt{6} \end{aligned}$$

(3) 解答

一般に

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) &= a^5 + a^2b^3 + a^3b^2 + b^5 \\ &= (a^5 + b^5) + a^2b^2(a + b) \\ &= (a^5 + b^5) + (ab)^2(a + b) \end{aligned}$$

より

$$a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - (ab)^2(a + b)$$

が成り立つ。この式の a に p を，b に $\dfrac{2}{p}$ を代入すると

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= p^5 + \left(\frac{2}{p}\right)^5 = p^5 + \frac{32}{p^5} \\ (\text{右辺}) &= \left(p^2 + \frac{4}{p^2}\right)\left(p^3 + \frac{8}{p^3}\right) - \left(p \cdot \frac{2}{p}\right)^2\left(p + \frac{2}{p}\right) \end{aligned}$$

より

$$p^5 + \frac{32}{p^5} = \left(p^2 + \frac{4}{p^2}\right)\left(p^3 + \frac{8}{p^3}\right) - 4\left(p + \frac{2}{p}\right)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} p^2 + \frac{4}{p^2} &= \left(p + \frac{2}{p}\right)^2 - 2 \cdot p \cdot \frac{2}{p} \\ &= \left(p + \frac{2}{p}\right)^2 - 4 \\ &= (2\sqrt{6})^2 - 4 \\ &= 24 - 4 \\ &= 20 \end{aligned}$$

であり，また (2) より $p^3 + \dfrac{8}{p^3} = 36\sqrt{6}$ より

$$\begin{aligned} p^5 + \frac{32}{p^5} &= \left(p^2 + \frac{4}{p^2}\right)\left(p^3 + \frac{8}{p^3}\right) - 4\left(p + \frac{2}{p}\right) \\ &= 20 \times 36\sqrt{6} - 4 \times 2\sqrt{6} \\ &= 720\sqrt{6} - 8\sqrt{6} \\ &= 712\sqrt{6} \end{aligned}$$

6 (1) 解答

$$\begin{aligned} p &= \frac{4}{\sqrt{5} + 1} \\ &= \frac{4(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} \\ &= \frac{4(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} \\ &= \sqrt{5} - 1 \end{aligned}$$

(2) 解答

(1) より，$p=\sqrt{5}-1$ である。ここで，$2<\sqrt{5}<3$ より，すべてから 1 をひいて $1<\sqrt{5}-1<2$ となる。つまり $1<p<2$ が成り立つので，p の整数部分は 1 より $a=1$ である。また，

$$\begin{aligned}(p\text{ の小数部分}) &= p-(p\text{ の整数部分})\\ b &= (\sqrt{5}-1)-1\\ &= \sqrt{5}-2\end{aligned}$$

である。

(3) 解答

(1),(2) より，$p=\sqrt{5}-1,\ a=1,\ b=\sqrt{5}-2$ である。また，不等式　の両辺に p をかけて分母を払う。ここで，p は正の数なので，不等号の向きは変わらない。よって

$$\begin{aligned}bpx &> x+ap\\ bpx-x &> ap\\ (bp-1)x &> ap\\ \{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-1)-1\}x &> 1\cdot(\sqrt{5}-1)\\ \{(5-\sqrt{5}-2\sqrt{5}+2)-1\}x &> \sqrt{5}-1\\ (6-3\sqrt{5})x &> \sqrt{5}-1\cdots\cdots(※)\end{aligned}$$

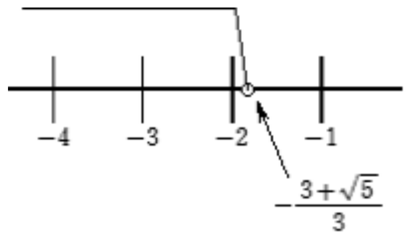
となる。ここで，$6-3\sqrt{5}=3(2-\sqrt{5})$ で，$\sqrt{5}<2$ なので，$6-3\sqrt{5}$ は負の数である。(※) の両辺を $6-3\sqrt{5}$ で割るが，負の数で割るので，不等号の向きが変わることに注意して

$$\begin{aligned}x &< \frac{\sqrt{5}-1}{6-3\sqrt{5}}\\ x &< \frac{\sqrt{5}-1}{3(2-\sqrt{5})}\\ x &< \frac{(\sqrt{5}-1)(2+\sqrt{5})}{3(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})}\\ x &< \frac{2\sqrt{5}+5-2-\sqrt{5}}{3(4-5)}\\ x &< \frac{3+\sqrt{5}}{-3}\\ x &< -\frac{3+\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $x<-\dfrac{3+\sqrt{5}}{3}$ を満たす最大の整数を求める。$2<\sqrt{5}<3$ より

$$\begin{array}{ccccccl} 5 & < & 3+\sqrt{5} & < & 6 & & (\text{すべてに 3 を加える})\\ \frac{5}{3} & < & \frac{3+\sqrt{5}}{3} & < & 2 & & (\text{すべてを 3 で割る})\\ -\frac{5}{3} & > & -\frac{3+\sqrt{5}}{3} & > & -2 & & (\text{すべてに }-1\text{ を掛ける})\\ -2 & < & -\frac{3+\sqrt{5}}{3} & < & -\frac{5}{3} & & \end{array}$$

であるから，数直線より $x<-\dfrac{3+\sqrt{5}}{3}$ を満たす最大の整数は -2 である。



7 (1) 解答

$$\begin{aligned}x^2-8x+16 &= (x-4)^2\\ &= \{(2a+1)-4\}^2\\ &= (2a-3)^2\end{aligned}$$

よって，$\boxed{\ (ア)\ }=2$，$\boxed{\ (イ)\ }=-3$ である。

(2) 解答

$$\begin{aligned}P &= \sqrt{x^2-8x+16}\\ &= \sqrt{(2a-3)^2}\\ &= |2a-3|\end{aligned}$$

である。よって，$a=2$ のとき，

$$\begin{aligned}P &= |2\cdot 2-3|\\ &= |4-3|=1\end{aligned}$$

また，$a=\sqrt{2}$ のとき

$$P=|2\sqrt{2}-3|$$

である。ここで，$2\sqrt{2}-3$ を $\sqrt{8}-\sqrt{9}$ と考えると，$2\sqrt{2}-3$ は負の数であるので

$$\begin{aligned}P &= |2\sqrt{3}-3|\\ &= -(2\sqrt{2}-3)\\ &= 3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) 解答

(2) より，$P=|2a-3|$ であり，また

$$\begin{aligned}Q &= \sqrt{x^2+2x+1}\\ &= \sqrt{(x+1)^2}\\ &= \sqrt{\{(2a+1)+1\}^2}\\ &= \sqrt{(2a+2)^2}\\ &= |2a+2|\end{aligned}$$

となる。ゆえに

$$P+Q=|2a-3|+|2a+2|$$

となる。ここで，

$$\begin{aligned}|2a-3| &= \begin{cases}2a-3 & (2a-3\geqq 0)\\ -(2a-3) & (2a-3<0)\end{cases}\\ &= \begin{cases}2a-3 & (a\geqq \frac{3}{2})\\ -2a+3 & (a<\frac{3}{2})\end{cases}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|2a+2| &= \begin{cases} 2a+2 & (2a+2 \geqq 0) \\ -(2a+2) & (2a+2<0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 2a+2 & (a \geqq -1) \\ -2a-2 & (a<-1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

であるから，$a<-1$, $-1 \leqq a < \frac{3}{2}$, $a \geqq \frac{3}{2}$ の 3 つに場合分けして考える。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$\|2a-3\|$	$-2a+3$		$-2a+3$		$2a-3$
$\|2a+2\|$	$-2a-2$		$2a+2$		$2a+2$

- $a<-1$ のとき

$$P=|2a-3|=-2a+3,\ Q=|2a+2|=-2a-2$$

より $P+Q=7$ なので

$$(-2a+3)+(-2a-2)=7$$

を考える。この方程式を解いて

$$a=-\frac{3}{2}$$

となり，これは $a<-1$ を満たしている。

- $-1 \leqq a < \frac{3}{2}$ のとき

$$P=|2a-3|=-2a+3,\ Q=|2a+2|=2a+2$$

より $P+Q=7$ なので

$$(-2a+3)+(2a+2)=7$$

を考える。この方程式を解くと

$$5=7$$

となってしまう。つまり，a がどんな数であったとしても $P+Q=5$ となってしまい $P+Q=7$ となる a は $-1 \leqq a < \frac{3}{2}$ において存在しない。

- $a \geqq \frac{3}{2}$ のとき

$$P=|2a-3|=2a-3,\ Q=|2a+2|=2a+2$$

より $P+Q=7$ なので

$$(2a-3)+(2a+2)=7$$

を考える。この方程式を解いて

$$a=2$$

となり，これは $a \geqq \frac{3}{2}$ を満たしている。

以上より，$a=-\frac{3}{2}$, 2 である。ここで，問題文の一番最初にある条件として $a>0$ があるので，$a=-\frac{3}{2}$ は不適。よって，$a=2$ である。

8 (1) 解答

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x^2-2xy+y^2)+2xy \\
&= (x-y)^2+2xy \\
&= 2^2+2\times\sqrt{2} \\
&= 4+2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(2) 解答

$$
\begin{aligned}
x^3-y^3 &= (x-y)(x^2+xy+y^2) \\
&= (x-y)\{(x^2+y^2)+xy\} \\
&= 2\{(4+2\sqrt{2})+\sqrt{3}\} \\
&= 2(4+3\sqrt{2}) \\
&= 8+6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

別解

$$
\begin{aligned}
x^3-y^3 &= (x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)-(-3x^2y+3xy^2) \\
&= (x-y)^3+3xy(x-y) \\
&= 2^3+3\cdot\sqrt{2}\cdot 2 \\
&= 8+6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

(3) 解答

$$
\begin{aligned}
(x^2+y^3)(x^3-y^2) &= x^5-x^2y^2+x^3y^3-y^5 \\
&= (x^5-y^5)-(xy)^2+(xy)^3 \\
&= (x^5-y^5)-(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3 \\
&= (x^5-y^5)-2+2\sqrt{2}\cdots(※)
\end{aligned}
$$

である。ここで一般に

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)(a^3+b^3) &= a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5 \\
&= (a^5+b^5)+a^2b^2(a+b) \\
&= (a^5+b^5)+(ab)^2(a+b)
\end{aligned}
$$

より

$$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$$

が成り立つ。この式の a に x を，b に $-y$ を代入すると

$$x^5+(-y)^5=\{x^2+(-y)^2\}\{x^3+(-y)^3\}-\{x(-y)\}^2\{x+(-y)\}$$

つまり

$$x^5-y^5=(x^2+y^2)(x^3-y^3)-(xy)^2(x-y)$$

が成り立つ。(1), (2) の結果を代入して

$$
\begin{aligned}
x^5-y^5 &= (4+2\sqrt{2})(8+6\sqrt{2})-(\sqrt{2})^2\cdot 2 \\
&= 32+24\sqrt{2}+16\sqrt{2}+24-4 \\
&= 52+40\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となるので，(※) に代入して

$$\begin{aligned}(x^2+y^3)(x^3-y^2) &= (x^5-y^5)-2+2\sqrt{2}\\ &= (52+40\sqrt{2})-2+2\sqrt{2}\\ &= 50+42\sqrt{2}\end{aligned}$$

9 (1) 解答

$$\begin{array}{cccc} 2 & -1 & \to & -1 \\ & \times & & \\ 1 & -8 & \to & -16 \\ \hline 2 & 8 & & -17 \end{array}$$

より

$$\begin{aligned}2a^2-17a+8 &= \{2\cdot a+(-1)\}\{1\cdot a+(-8)\}\\ &= (2a-1)(a-8)\end{aligned}$$

(2) 解答

$$\begin{array}{cccc} 2 & a-8 & \to & a-8 \\ & \times & & \\ 1 & -(2a-1) & \to & -4a+2 \\ \hline 2 & -(2a-1)(a-8) & & -3a-6 \end{array}$$

よって，$x^2-3(a+2)x-(2a^2-17a+8)$ について

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= x^2-3(a+2)x-(2a-1)(a-8)\\ &= \{2\cdot x+(a-8)\}\{1\cdot x-(2a-1)\}\\ &= (2x+a-8)(x-2a+1)\end{aligned}$$

(3) 解答

(2) より

$$(2x+a-8)(x-2a+1)=0$$

である。ゆえに

$$\begin{aligned}&2x+a-8=0 \quad \text{より} \quad x=\frac{8-a}{2}\\ &x-2a+1=0 \quad \text{より} \quad x=2a-1\end{aligned}$$

となる。つまり，方程式①は 2 つの解 $x=\dfrac{8-a}{2}$，$2a-1$ をもつ。これらが異なり，かつどちらも自然数であればよい。自然数とは正の数であるので

$$\begin{aligned}&\frac{8-a}{2}>0 \quad \text{より} \quad a<8\\ &2a-1>0 \quad \text{より} \quad a>\frac{1}{2}\end{aligned}$$

これらの共通範囲より $\dfrac{1}{2}<a<8$ であればよい。また，$\dfrac{8-a}{2}$，$2a-1$ の両方が自然数である条件を考える。特に $\dfrac{8-a}{2}$ に着目すると，$\dfrac{8-a}{2}$ が自然数であるには，分子の $8-a$ は偶数にならなくてはならず，ゆえに a も偶数である。したがって，$\dfrac{1}{2}<a<8$ における偶数は $a=2,\ 4,\ 6$ のみである。

$a=2$ のとき $\dfrac{8-a}{2}=\dfrac{8-2}{2}=3$
$2a-1=2\cdot2-1=3$
(異なる自然数でなく不適)

$a=4$ のとき $\dfrac{8-a}{2}=\dfrac{8-4}{2}=2$
$2a-1=2\cdot4-1=7$
(条件に適する)

$a=6$ のとき $\dfrac{8-a}{2}=\dfrac{8-6}{2}=1$
$2a-1=2\cdot6-1=11$
(条件に適する)

以上より，

$a=4$ のとき，2 つの解は 2，7
$a=6$ のとき，2 つの解は 1，11

10 (1) 解答

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= (x^2+2xy+y^2)-2xy\\ &= (x+y)^2-2xy\\ &= 3^2-2\cdot1\\ &= 9-2\\ &= 7\end{aligned}$$

(2) 解答

$x^3-2x^2y+2xy^2-y^3$ について，

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^3-y^3)+(-2x^2y+2xy^2)\\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2)-2xy(x-y)\\ &= (x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}-2xy(x-y)\cdots(※)\end{aligned}$$

と変形できる。ここで

$$\begin{aligned}(x-y)^2 &= x^2-2xy+y^2\\ &= (x^2+y^2)-2xy\\ &= 7-2\cdot1 \qquad ((1)\text{ より})\\ &= 5\end{aligned}$$

より，$(x-y)^2=5$ から $x-y=\pm\sqrt{5}$ である。ここで $x<y$ より $x-y<0$ であるから $x-y$ は負の数。つまり $x-y=-\sqrt{5}$ である。これを (※) 式に代入して

$$\begin{aligned}x^3-2x^2y+2xy^2-y^3 &= (-\sqrt{5})(7+1)-2\cdot1\cdot(-\sqrt{5})\\ &= -8\sqrt{5}+2\sqrt{5}\\ &= -6\sqrt{5}\end{aligned}$$

(3) 解答

$$\frac{y}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{y}}=\frac{y\sqrt{y}-x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\cdots(※※)$$

ここで,

$$\begin{aligned}(y\sqrt{y}-x\sqrt{x})^2 &= (y\sqrt{y})^2-2(y\sqrt{y})(x\sqrt{x})+(x\sqrt{x})^2\\ &= y^3-2xy\sqrt{xy}+x^3\\ &= (x^3+y^3)-2xy\sqrt{xy}\\ &= \{(x+y)^3-3xy(x+y)\}-2\cdot 1\cdot\sqrt{1}\\ &= (3^3-3\cdot 1\cdot 3)-2\\ &= 27-9-2=16\end{aligned}$$

より $(y\sqrt{y}-x\sqrt{x})^2=16$ から $y\sqrt{y}-x\sqrt{x}=\pm 4$ である。ここで，ここで $x<y$ より $\sqrt{x^3}<\sqrt{y^3}$ であるから $y\sqrt{y}-x\sqrt{x}$ は正の数。よって $y\sqrt{y}-x\sqrt{x}=4$ であるから，(※※) に代入して

$$\begin{aligned}\frac{y}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{y}} &= \frac{y\sqrt{y}-x\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{1}}=4\end{aligned}$$

11 (1) 解答

$x^2-2x-1=0$ より，解の公式から

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}\\ &= \frac{2\pm\sqrt{8}}{2}\\ &= \frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}\\ &= 1\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

(2) 解答

(1) より，$1\pm\sqrt{2}$ の小さい方が p で大きい方が q なので

$$p=1-\sqrt{2},\ q=1+\sqrt{2}$$

である。よって

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\\ &= \frac{(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\\ &= \frac{1-2\sqrt{2}+2}{1-2}\\ &= \frac{3-2\sqrt{2}}{-1}\\ &= -3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\frac{q}{p} &= \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\\ &= \frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}\\ &= \frac{1+2\sqrt{2}+2}{1-2}\\ &= \frac{3+2\sqrt{2}}{-1}\\ &= -3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

であり，$-3-2\sqrt{2}$ は負の数であるから

$$\begin{aligned}\left|\frac{q}{p}\right| &= |-3-2\sqrt{2}|\\ &= -(-3-2\sqrt{2})\\ &= 3+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

(3) 解答

(2) より $\frac{p}{q}=-3+2\sqrt{2}$ であり，また $-3+2\sqrt{2}$ を $-\sqrt{9}+\sqrt{8}$ と考えると，$-3+2\sqrt{2}$ は負の数である。ゆえに

$$\begin{aligned}\left|\frac{p}{q}\right| &= |-3+2\sqrt{2}|\\ &= -(-3+2\sqrt{2})\\ &= 3-2\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。よって以下

$$\left|\frac{p}{q}\right|=3-2\sqrt{2}=a$$
$$\left|\frac{q}{p}\right|=3+2\sqrt{2}=b$$

とおくと,

$$\begin{aligned}a+b &= (3-2\sqrt{2})+(3+2\sqrt{2})=6\\ ab &= (3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\ &= 3^2-(2\sqrt{2})^2=1\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}\left|\frac{p}{q}\right|^2+\left|\frac{q}{p}\right|^2 &= a^3+b^3\\ &= (a+b)^3-3ab(a+b)\\ &= 6^3-3\cdot 1\cdot 6\\ &= 216-18\\ &= 198\end{aligned}$$

12 (1) 解答

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} &= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1}\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2}\\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

(2) 解答

$$\begin{aligned}\alpha &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2-3\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)\\ &= (2+\sqrt{3})^2-3(2+\sqrt{3}) \qquad ((1)\text{ より})\\ &= (4+4\sqrt{3}+3)-(6+3\sqrt{3})\\ &= 1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。ここで，$1<\sqrt{3}<2$ であるので，すべてに 1 を加えて $2<1+\sqrt{3}<3$，つまり $2<\alpha<3$

が成り立つ。よって α の整数部分は 2 であるので

$$\begin{aligned}(\alpha\text{ の小数部分}) &= \alpha-(\alpha\text{ の整数部分})\\ p &= (1+\sqrt{3})-2\\ &= \sqrt{3}-1\end{aligned}$$

となる。よって，

$$\begin{aligned}p+\frac{2}{p} &= (\sqrt{3}-1)+\frac{2}{\sqrt{3}-1}\\ &= (\sqrt{3}-1)+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\ &= (\sqrt{3}-1)+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}\\ &= (\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}p^2+\frac{4}{p^2} &= \left(p+\frac{2}{p}\right)^2-2\cdot p\cdot\frac{2}{p}\\ &= \left(p+\frac{2}{p}\right)^2-4\\ &= (2\sqrt{3})^2-4\\ &= 12-4\\ &= 8\end{aligned}$$

(3) 解答

不等式 $\left(p-p^2+\dfrac{2}{p}-\dfrac{4}{p^2}\right)n>\dfrac{p^3}{2}+\dfrac{4}{p^3}-24$ について

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \left(p-p^2+\frac{2}{p}-\frac{4}{p^2}\right)n\\ &= \left\{\left(p+\frac{2}{p}\right)-\left(p^2+\frac{4}{p^2}\right)\right\}n\\ &= (2\sqrt{3}-8)n \qquad ((2)\text{ より})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺}) &= \frac{p^3}{2}+\frac{4}{p^3}-24\\ &= \frac{1}{2}\left(p^3+\frac{8}{p^3}\right)-24\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{2}{p}\right)^3-3\cdot p\cdot\frac{2}{p}\left(p+\frac{2}{p}\right)\right\}-24\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{2}{p}\right)^3-6\left(p+\frac{2}{p}\right)\right\}-24\\ &= \frac{1}{2}\left\{(2\sqrt{3})^3-6(2\sqrt{3})\right\}-24\\ &= \frac{1}{2}(24\sqrt{3}-12\sqrt{3})-24\\ &= 6\sqrt{3}-24\end{aligned}$$

ゆえに，不等式 $(2\sqrt{3}-8)n>6\sqrt{3}-24$ を考える。ここで，$2\sqrt{3}-8$ は負の数であるから，両辺を $2\sqrt{3}-8$ で割ると不等号の向きが変わることに注意して

$$\begin{aligned}n &< \frac{6\sqrt{3}-24}{2\sqrt{3}-8}\\ n &< \frac{6(\sqrt{3}-4)}{2(\sqrt{3}-4)}\\ n &< 3\end{aligned}$$

となる。ここで，n は自然数であるので，3 未満の自然数は

$$n=1,\ 2$$

の 2 個である。

13 (1) 解答

$$\begin{aligned}a &= \frac{2}{3-\sqrt{5}}\\ &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\\ &= \frac{2(3+\sqrt{5})}{9-5}\\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}b &= |a-3|\\ &= \left|\frac{3+\sqrt{5}}{2}-3\right|\\ &= \left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right|\\ &= -\frac{\sqrt{5}-3}{2} \qquad (\sqrt{5}-3\text{ は負の数より})\\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

(2) 解答

(1) より, $a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $b=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ である。よって

$$\begin{aligned}a+b &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\ &= 3 \qquad \cdots①\\ ab &= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\ &= \frac{9-5}{4}\\ &= 1 \qquad \cdots②\end{aligned}$$

が成り立つ。ゆえに

$$\begin{aligned}A+B &= (a^2-b)+(b^2-a)\\ &= a^2+b^2-a-b\\ &= (a^2+b^2)-(a+b)\\ &= \{(a+b)^2-2ab\}-(a+b)\\ &= (3^2-2\cdot1)-3 \qquad (①,\ ②\text{より})\\ &= 9-2-3=4\end{aligned}$$

(3) 解答

(2) と同様に

$$\begin{aligned}AB &= (a^2-b)(b^2-a)\\ &= a^2b^2-a^3-b^3+ab\\ &= (ab)^2-(a^3+b^3)+ab\\ &= (ab)^2-\{(a+b)^3-3ab(a+b)\}+ab\\ &= 1^2-(3^3-3\cdot1\cdot3)+1 \qquad (①,\ ②\text{より})\\ &= 1-(27-9)+1=-16\end{aligned}$$

よって，$A+B=4,\ AB=-16$ より

$$\begin{aligned} A^3+B^3 &= (A+B)^3-3AB(A+B) \\ &= 4^3-3\cdot(-16)\cdot 4 \\ &= 64+192 \\ &= 256 \end{aligned}$$

14 (1) 解答

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{4\pm\sqrt{16+12}}{2} \\ &= \frac{4\pm\sqrt{28}}{2} \\ &= \frac{4\pm 2\sqrt{7}}{2} \\ &= 2\pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

よってこれらのうち，大きい方が q で小さい方が p なので

$$p=2-\sqrt{7},\ q=2+\sqrt{7}$$

(2) 解答

(1) より，$p=2-\sqrt{7}$ より

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \frac{1}{2-\sqrt{7}} \\ &= \frac{2+\sqrt{7}}{(2-\sqrt{7})(2+\sqrt{7})} \\ &= \frac{2+\sqrt{7}}{4-7} \\ &= -\frac{2+\sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

また，$\dfrac{1}{p}=-\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}$ は明らかに負の数なので,

$$\left|\frac{1}{p}\right|=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$$

となる。ここで，$2<\sqrt{7}<3$ より

$$\begin{array}{ccccc l} 4 & < & 2+\sqrt{7} & < & 5 & (\text{すべてに }2\text{ を加える}) \\ \frac{4}{3} & < & \frac{2+\sqrt{7}}{3} & < & \frac{5}{3} & (\text{すべてを }3\text{ で割る}) \\ \frac{4}{3} & < & \left|\frac{1}{p}\right| & < & \frac{5}{3} & \end{array}$$

より，$\left|\dfrac{1}{p}\right|$ の整数部分は 1 なので,

$$\begin{aligned} \left(\left|\frac{1}{p}\right|\text{の小数部分}\right) &= \left|\frac{1}{p}\right|-\left(\left|\frac{1}{p}\right|\text{の整数部分}\right) \\ &= \frac{2+\sqrt{7}}{3}-1 \\ &= \frac{\sqrt{7}-1}{3} \end{aligned}$$

(3) 解答

(2) より，$a=\dfrac{\sqrt{7}-1}{3}$ よりである。また，b も同様に計算すると $q=2+\sqrt{7}$ より

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{q}\right| &= \left|\frac{1}{2+\sqrt{7}}\right| \\ &= \left|\frac{2-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7})}\right| \\ &= \left|\frac{2-\sqrt{7}}{4-7}\right| \\ &= \left|\frac{2-\sqrt{7}}{-3}\right| \\ &= \left|\frac{\sqrt{7}-2}{3}\right| \\ &= \frac{\sqrt{7}-2}{3} \quad (2<\sqrt{7}\text{ より }\sqrt{7}-2\text{ は正の数}) \end{aligned}$$

そして $2<\sqrt{7}<3$ より

$$\begin{array}{ccccc l} 0 & < & \sqrt{7}-2 & < & 1 & (\text{すべてから }2\text{ をひく}) \\ 0 & < & \frac{\sqrt{7}-2}{3} & < & \frac{1}{3} & (\text{すべてを }3\text{ で割る}) \\ 0 & < & \left|\frac{1}{q}\right| & < & \frac{1}{3} & \end{array}$$

が成り立つ。つまり，$\left|\dfrac{1}{q}\right|$ の整数部分は 0 なので,

$\left|\dfrac{1}{q}\right|$ の小数部分は $\left|\dfrac{1}{q}\right|$ そのものである。よって

$$b=\left|\frac{1}{q}\right|=\frac{\sqrt{7}-2}{3}$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt{7}-1}{3}\div\frac{\sqrt{7}-2}{3} \\ &= \frac{\sqrt{7}-1}{3}\times\frac{3}{\sqrt{7}-2} \\ &= \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-2} \\ \frac{b}{a} &= \frac{\sqrt{7}-2}{3}\div\frac{\sqrt{7}-1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{7}-2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{7}-1} \\ &= \frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-1} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-2} \\ B &= \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-1} \end{aligned}$$

とすると, 求める和 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+4\left(\dfrac{b}{a}\right)^2$ は A^2+4B^2

とかける。また,

$$\begin{aligned}
A+2B &= \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-2}+2\cdot\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-1}\\
&= \frac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+2)}{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)}+2\cdot\frac{(\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}\\
&= \frac{7-\sqrt{7}+2\sqrt{7}-2}{7-4}+2\cdot\frac{7-2\sqrt{7}+\sqrt{7}-2}{7-1}\\
&= \frac{5+\sqrt{7}}{3}+2\cdot\frac{5-\sqrt{7}}{6}\\
&= \frac{5+\sqrt{7}}{3}+\frac{5-\sqrt{7}}{3}\\
&= \frac{5+\sqrt{7}+5-\sqrt{7}}{3}=\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

であり，そして

$$AB=\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}-2}\cdot\frac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{7}-1}=1$$

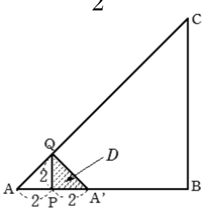
である。以上より

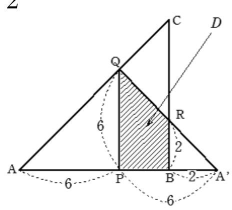
$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^2+4\left(\frac{b}{a}\right)^2 &= A^2+4B^2\\
&= A^2+(2B)^2\\
&= (A+2B)^2-2\cdot A\cdot(2B)\\
&= (A+2B)^2-4AB\\
&= \left(\frac{10}{3}\right)^2-4\cdot 1\\
&= \frac{100}{9}-4\\
&= \frac{100-36}{9}=\frac{64}{9}
\end{aligned}$$

15 (1) 解答

条件より，△ A'PQ も△ APQ も 1 辺の長さが x の直角二等辺三角形となる。

- $x=2$ のとき
  図より，D は△ A'PQ そのものである。よって (D の面積)$=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2$ である。
- $x=6$ のとき
  図より，点 A' は辺 AB 上になく，点 B を超えた延長線上にある。よって，線分 A'Q と辺 BC の交点を R とすると，D は台形 PQRB である。ここで，△ A'BR も直角二等辺三角形となる。また，AA'$=$ 12 であり，AB$=$ 10 より，A'B$=$ 2 である。よって (D の面積)=(△ A'PQ の面積)-(△ A'BR の面積)$=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=16$ である。





(2) 解答

△ ABC の面積は $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10=50$ である。

- $0<x<5$ のとき
  図より，D は△ A'PQ そのものである。よって (D の面積)$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x=\frac{1}{2}x^2$ である。よって

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{5}\cdot 50$$

より，$x=2\sqrt{5}$ となる。ここで，$2\sqrt{5}=\sqrt{20}<\sqrt{25}$ より，$x=2\sqrt{5}$ は $0<x<5$ を満たす。

- $5\leqq x<10$ のとき
  D は台形 PQRB である。ここで，AP=PA'=x であるから，AA'$=2x$ である。また AB$=10$ より，A'B$=2x-10$ である。よって

$$\begin{aligned}
(D\text{ の面積}) &= (\triangle\text{ A'PQ の面積})\text{-}(\triangle\text{ A'BR の面積})\\
&= \frac{1}{2}\cdot x\cdot x-\frac{1}{2}\cdot(2x-10)\cdot(2x-10)\\
&= \frac{1}{2}(-3x^2+40x-100)
\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(-3x^2+40x-100) &= \frac{1}{5}\cdot 50\\
3x^2-40x+120 &= 0
\end{aligned}$$

解の公式より

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-20)\pm\sqrt{(-20)^2-3\cdot 120}}{3}\\
&= \frac{20\pm 2\sqrt{10}}{3} \qquad \cdots\cdots(※)
\end{aligned}$$

となる。ここで $2\sqrt{10}=\sqrt{40}$ より，$\sqrt{36}<\sqrt{40}<\sqrt{49}$ から $6<2\sqrt{10}<7$ が成り立つ。よって

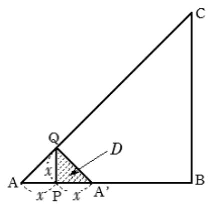
$$\frac{20+6}{3}<\frac{20+2\sqrt{10}}{3}<\frac{20+7}{3}$$

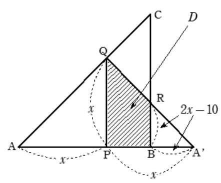
$$\frac{20-6}{3}>\frac{20-2\sqrt{10}}{3}>\frac{20-7}{3}$$

つまり

$$\frac{26}{3}<\frac{20+2\sqrt{10}}{3}<9,\ \frac{13}{3}<\frac{20-2\sqrt{10}}{3}<\frac{14}{3}$$

が成り立つので，(※) のうち $5\leqq x<10$ を満たすのは $x=\frac{20+2\sqrt{10}}{3}$ である。





以上より，$x=2\sqrt{5},\ \frac{20+2\sqrt{10}}{3}$ である。

(3) 解答

△ ABC の周の長さは $AB+BC+CA=10+10+10\sqrt{2}=10(2+\sqrt{2})$ である。

- $0 < x < 5$ のとき
  図より，(D の周の長さ)$= AP + PQ + QA = x + x + x\sqrt{2} = x(2+\sqrt{2})$ である。よって条件より

$$
\begin{array}{rcccl}
\frac{4}{9}\cdot 10(2+\sqrt{2}) & \leqq & x(2+\sqrt{2}) & \leqq & \frac{5}{9}\cdot 10(2+\sqrt{2}) \\
\frac{4}{9}\cdot 10 & \leqq & x & \leqq & \frac{5}{9}\cdot 10
\end{array}
$$

より $\dfrac{40}{9} \leqq x \leqq \dfrac{50}{9}$ が成り立つ。今，$0 < x < 5$ より，これらの共通部分をとって

$$\frac{40}{9} \leqq x < 5 \qquad \cdots\cdots ①$$

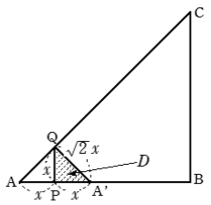
が成り立つ。

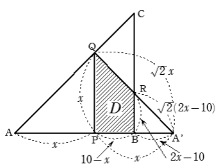
- $5 \leqq x < 10$ のとき
  (D の周の長さ) は

$$
\begin{aligned}
& PB + BR + RQ + QP \\
= \; & PB + BR + (QA' - RA') + QP \\
= \; & (10-x) + (2x-10) + \{\sqrt{2}x - \sqrt{2}(2x-10)\} + x \\
= \; & 2x + \sqrt{2}(10-x) = (2-\sqrt{2})x + 10\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

となる。よって

$$
\begin{array}{rcccl}
\frac{4}{9}\cdot 10(2+\sqrt{2}) & \leqq & (2-\sqrt{2})x + 10\sqrt{2} & \leqq & \frac{5}{9}\cdot 10(2+\sqrt{2}) \\
\frac{80}{9} + \frac{40}{9}\sqrt{2} & \leqq & (2-\sqrt{2})x + 10\sqrt{2} & \leqq & \frac{100}{9} + \frac{50}{9}\sqrt{2} \\
\frac{80}{9} - \frac{50}{9}\sqrt{2} & \leqq & (2-\sqrt{2})x & \leqq & \frac{100}{9} - \frac{40}{9}\sqrt{2} \\
\frac{10}{9}(8-5\sqrt{2}) & \leqq & (2-\sqrt{2})x & \leqq & \frac{10}{9}(10-4\sqrt{2}) \\
\frac{10}{9}\frac{8-5\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} & \leqq & x & \leqq & \frac{10}{9}\frac{10-4\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\
\frac{10}{9}(3-\sqrt{2}) & \leqq & x & \leqq & \frac{10}{9}(6+\sqrt{2})
\end{array}
$$





ここで，$\sqrt{2}$ を 1.4 として近似値を求めると

$$\frac{5}{9}(6-2\sqrt{2}) = 1,7\cdots,\quad \frac{10}{9}(6+\sqrt{2}) = 8.2\cdots$$

である。今，求めた x の範囲と $5 \leqq x < 10$ の共通部分をとると

$$5 \leqq x \leqq \frac{10}{9}(6+\sqrt{2}) \cdots\cdots ②$$

である。

以上より，①と②から，求める x の範囲は

$$\frac{40}{9} \leqq x \leqq \frac{10}{9}(6+\sqrt{2})$$

である。

16 (1) 解答

条件より，

$$x + y = 12,\ y + z = 7$$

である。よって，第 1 式より $y = 12 - x$ であり，またこれを第 2 式に代入すると $(12-x) + z = 7$ より，これを z について解くと $z = x - 5$ となる。

また，$x,\ y,\ z$ はすべて正の数なので，

$$x > 0,\ 12 - x > 0,\ x - 5 > 0$$

のすべてが成り立たねばならない。よって $x > 0,\ x < 12,\ x > 5$ より, 共通範囲をとって $5 < x < 12$

(2) 解答

直方体 A について，底面の面積は xy で与えられ，側面は xz と yz で与えれらる。それぞれ同じ面積の場所が 2 か所ずつあるので，直方体 A の表面積は $2xy + 2yz + 2zx$ で与えられる。よって (1) から

$$y = 12 - x,\ z = x - 5$$

より

$$
\begin{aligned}
2xy + 2yz + 2zx &= 150 \\
xy + yz + zx &= 75 \\
x(12-x) + (12-x)(x-5) + (x-5)x &= 75 \\
-x^2 + 24x - 60 &= 75 \\
x^2 - 24x - 135 &= 0 \\
(x-9)(x-15) &= 0
\end{aligned}
$$

より，$x = 9,\ 15$ である。ここで，(1) より $5 < x < 12$ を満たすのは $x = 9$ である。このとき

$$y = 12 - 9 = 3,\ z = 9 - 5 = 4$$

より，(縦，横，高さ)$= (9, 3, 4)$

(3) 解答

直方体 A_1 や A_2 の表面積を S_{A_1}，S_{A_2} で表す。(2) より，

$$
\begin{aligned}
S_{A_1} &= 2(xy_1 + y_1z + zx) \\
S_{A_2} &= 2(xy_2 + y_2z + zx)
\end{aligned}
$$

である。また，元々の直方体 A の y の部分を y_1 と y_2 に分割し，その結果 $y_1 : y_2 = 5 : 3$ となったので

$$y_1 = \frac{5}{8}y,\ y_2 = \frac{3}{8}y$$

である。これを先ほどの式に代入すると

$$
\begin{aligned}
S_{A_1} &= 2\left(x\cdot\frac{5}{8}y + \frac{5}{8}y\cdot z + zx\right) \\
S_{A_2} &= 2\left(x\cdot\frac{3}{8}y + \frac{3}{8}y\cdot z + zx\right)
\end{aligned}
\quad \cdots (※)
$$

となる。また条件より，直方体 A_1 の表面積は直方体 A_2 の表面積よりも 22cm^2 大きいので

$$S_{A_1} - S_{A_2} = 22$$

である。この式に (※) を代入すると

$$\begin{aligned}2\left(\frac{5}{8}xy+\frac{5}{8}yz+zx\right)-2\left(\frac{3}{8}xy+\frac{3}{8}yz+zx\right) &= 22\\ \left(\frac{5}{8}xy+\frac{5}{8}yz+zx\right)-\left(\frac{3}{8}xy+\frac{3}{8}yz+zx\right) &= 11\\ \frac{5}{8}xy+\frac{5}{8}yz-\frac{3}{8}xy-\frac{3}{8}yz &= 11\\ \frac{2}{8}xy+\frac{2}{8}yz &= 11\\ xy+yz &= 44\\ x(12-x)+(12-x)(x-5) &= 44\\ -2x^2+29x-60 &= 44\\ 2x^2-29x+104 &= 0\\ (2x-13)(x-8) &= 0\end{aligned}$$

よって，$x=8,\ \dfrac{13}{2}$ であり，これらはどちらも $5<x<12$ を満たす。

- $x=8$ のとき

  $$y=12-8=4,\ z=8-5=3$$

  より，(縦，横，高さ) $=(8,4,3)$
- $x=\dfrac{13}{2}$ のとき

  $$y=12-\frac{13}{2}=\frac{11}{2},\ z=\frac{13}{2}-5=\frac{3}{2}$$

  より，(縦，横，高さ)$=\left(\dfrac{13}{2},\ \dfrac{11}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$

17 (1) 解答

以下，正六角形の１辺の長さを $y$cm とする。すると，正六角形の周の長さは $6y$ となる。また，正三角形の１辺の長さは $x$cm であったので，周の長さは $3x$ となる。よって，これらの和が元々の針金の長さになるので

$$\begin{aligned}3x+6y &= 3a\\ 6y &= 3a-3x\\ y &= \frac{a-x}{2}\end{aligned}$$

また，y は正の数であるから，$\dfrac{a-x}{2}>0$ より $x<a$ である。そして，針金を長短で切って，長い方で正三角形，短い方で正六角形を作っているので

$$3x>6y$$

が成り立つ。ゆえに

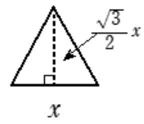
$$\begin{aligned}3x &> 6y\\ 3x &> 6\cdot\frac{a-x}{2}\\ 3x &> 3a-3x\\ x &> \frac{1}{2}a\end{aligned}$$

これと $x<a$ との共通部分をとって

$$\frac{1}{2}a<x<a$$

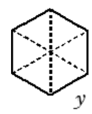
(2) 解答

１辺の長さが x の正三角形の面積は，図より



$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

である。また，正六角形は正三角形６個で作られているので，１辺の長さが y の正六角形の面積は，１辺の長さが y の正三角形６個分に等しく，



$$\frac{\sqrt{3}}{4}y^2\times 6=\frac{3\sqrt{3}}{2}y^2$$

である。条件より，これらの和が $\dfrac{25\sqrt{3}}{8}$ であるので，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}y^2=\frac{25\sqrt{3}}{8}$$

つまり

$$2x^2+12y^2=25$$

である。ここで，(1) から $y=\dfrac{a-x}{2}$ であり，また条件から $a=2\sqrt{5}$ より

$$\begin{aligned}2x^2+12\left(\frac{2\sqrt{5}-x}{2}\right)^2 &= 25\\ 2x^2+12\cdot\frac{20-4\sqrt{5}x+x^2}{4} &= 25\\ 5x^2-12\sqrt{5}x+35 &= 0\\ (\sqrt{5}x-5)(\sqrt{5}x-7) &= 0\end{aligned}$$

よって $x=\dfrac{5}{\sqrt{5}},\ \dfrac{7}{\sqrt{5}}$ つまり，$x=\sqrt{5},\ \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$ である。ここで，(1) より x は $\dfrac{1}{2}a<x<a$ を満たさなければならない。$a=2\sqrt{5}$ であったので，x は $\sqrt{5}<x<2\sqrt{5}$ をみたさねばならず，$x=\sqrt{5}$ は不適である。以上より，$x=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

(3) 解答

(2) と同様に考えると

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 &= \frac{3\sqrt{3}}{2}y^2\\ x^2 &= 6y^2 \quad \cdots(※)\\ x^2 &= 6\left(\frac{a-x}{2}\right)^2\\ x^2 &= 6\cdot\frac{a^2-2ax+x^2}{4}\\ 2x^2 &= 3a^2-6ax+3x^2\end{aligned}$$

より，$x^2-6ax+3a^2=0$ となる。解の公式より

$$\begin{aligned}x &= \frac{-(-3a)\pm\sqrt{(-3a)^2-1\cdot(3a^2)}}{1}\\ &= 3a\pm\sqrt{9a^2-3a^2}\\ &= 3a\pm\sqrt{6a^2}\\ &= 3a\pm\sqrt{6}a \qquad (a>0\text{ より})\\ &= (3\pm\sqrt{6})a\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで，(1) より x は $\frac{1}{2}a < x < a$ を満たさなければならないが，$3+\sqrt{6} > 3+2$ より $(3+\sqrt{6})a > 5a$ となってしまい $\frac{1}{2}a < x < a$ を満たさない。ゆえに $\frac{1}{2}a < x < a$ を満たすのは $x=(3-\sqrt{6})a$ である。ここで，長い方の針金の長さを X とすると，X は正三角形の周の長さに等しく $X=3x$ である。また，短い方の針金の長さを Y とすると，Y は正六角形の周の長さに等しく $Y=6y$ である。よって

$$\begin{aligned} X &= 3x = 3(3-\sqrt{6})a \\ Y &= 6y \\ &= 6\cdot\frac{a-x}{2} \\ &= 3a-3x \\ &= 3a-3(3-\sqrt{6})a \\ &= 3a-9a+3\sqrt{6}a \\ &= 3(\sqrt{6}-2)a \end{aligned}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} \frac{X}{Y} &= \frac{3(3-\sqrt{6})a}{3(\sqrt{6}-2)a} \\ &= \frac{3-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-2} \\ &= \frac{(3-\sqrt{6})(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} = \frac{3\sqrt{6}+6-6-2\sqrt{6}}{6-4} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

よって，長い方の針金の長さ X は短い方の針金の長さ Y の $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍である。

別解

(※) 式より，$x>0$, $y>0$ より $x=\sqrt{6}y$ である。また，$X=3x$, $Y=6y$ より，$x=\frac{1}{3}X$, $y=\frac{1}{6}Y$ を代入して $\frac{1}{3}X=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{6}Y$ つまり $X=\frac{\sqrt{6}}{2}Y$ が成り立つ。よって，長い方の針金の長さ X は短い方の針金の長さ Y の $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍である。

18 (1) 解答

売り値を定価２００円より $2x$ 円値下げすると，売上個数は１００個から $2x$ 個増加する。つまり，売り値が $200-2x$ 円のときは $100+2x$ 個売れるのでよって，売上金額は

$$(200-2x)(100+2x) = -4x^2+200x+20000$$

となる。また，売り値 $200-2x$ 円は定価の半額（１００円）以上で，定価（２００円）以下なので

$$\begin{array}{ccccccl} 100 & \leqq & 200-2x & \leqq & 200 & \\ 100-200 & \leqq & -2x & \leqq & 200-200 & (200\text{ を引く}) \\ -100 & \leqq & -2x & \leqq & 0 & \\ 50 & \geqq & x & \geqq & 0 & (-2\text{ で割る}) \\ 0 & \leqq & x & \leqq & 50 & \end{array}$$

となる。つまり，x のとりうる値の範囲は $0 \leqq x \leqq 50$ である。

(2) 解答

条件より仕入れ個数と売上個数は等しい。売上個数が $100+2x$ 個であるとき，仕入れ金額は１個あたり７５円なので，仕入れに総額 $75(100+2x)$ 円かかっている。(1) から売上金額は $-4x^2+200x+20000$ 円なので，条件より

$$(-4x^2+200x+20000)-75(100+2x) = 12600$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} (-4x^2+200x+20000)-(7500+150x) &= 12600 \\ -4x^2+50x-100 &= 0 \\ 2x^2-25x+50 &= 0 \\ (2x-5)(x-10) &= 0 \end{aligned}$$

より，$x=\frac{5}{2}$, 10 である。ここで，x は整数であるので $x=\frac{5}{2}$ は不適であり，また (1) から $0 \leqq x \leqq 50$ であるので，$x=10$ はこれを満たす。以上より，$x=10$ のときの売り値は

$$200-2x = 200-2\cdot 10 = 180\text{ 円}$$

である。

(3) 解答

- $0 \leqq x \leqq 10$ のとき
このとき，仕入れ個数 $100+2x$ は１２０未満なので，すべて仕入れ値は７５円である。よって，(2) と同様に

$$\begin{aligned} (-4x^2+200x+20000)-75(100+2x) &= 12700 \\ (-4x^2+200x+20000)-(7500+150x) &= 12700 \\ -4x^2+50x-200 &= 0 \\ 2x^2-25x+100 &= 0 \end{aligned}$$

となり，解の公式から

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-25)\pm\sqrt{(-25)^2-4\cdot 2\cdot 100}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{25\pm\sqrt{625-800}}{4} \\ &= \frac{25\pm\sqrt{-175}}{4} \end{aligned}$$

となる。よって，根号内が負になるので，$0 \leqq x \leqq 10$ のとき解はない。

- $10 < x \leqq 50$ のとき
このとき，仕入れ個数 $100+2x$ は１２０以上なので，１２０個の仕入れ値は７５円で，１２０個を超えた分の仕入れ値は４０円になる。今，

仕入れる個数の総数は $100+2x$ より，仕入れ値が４０円になる個数は

$$(100+2x)-120=2x-20 \text{ 個}$$

である。よって，仕入れ値の総額は

$$\begin{aligned} & 75\text{ 円}\times 120\text{ 個}+40\text{ 円}\times(2x-20)\text{ 個} \\ = \ & 9000+80x-800 \\ = \ & 80x+8200\text{ 円} \end{aligned}$$

である。ゆえに (2) と同様に

$$\begin{aligned} (-4x^2+200x+20000)-(80x+8200) &= 12700 \\ -4x^2+120x-900 &= 0 \\ x^2-30x+225 &= 0 \\ (x-15)^2 &= 0 \end{aligned}$$

より $x=15$ である。これは $10<x\leqq 50$ を満たす。

以上より，条件を満たすのは $x=15$ のときなので，このときの売り値は

$$200-2x=200-2\cdot 15=170\text{ 円}$$

である。

19 (1) 解答

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}x+1 &> \frac{3x+5}{6} && (\text{両辺に}6\text{をかける}) \\ 2x+6 &> 3x+5 \\ -x &> -1 && (\text{両辺を }-1\text{ で割る}) \\ x &< 1 \end{aligned}$$

(2) 解答

$$\begin{aligned} 2x-4 &> ax-a^2 \\ 2x-ax &> 4-a^2 && (\text{両辺を因数分解する}) \\ (2-a)x &> (2-a)(2+a) && \cdots(※) \end{aligned}$$

ここで，$a<2$ より $0<2-a$ つまり，$2-a>0$ であるから，(※) 式の両辺を $(2-a)$ で割る。($2-a$ は正の数なので，不等号の向きは変わらない)

$$x>2+a$$

(3) 解答

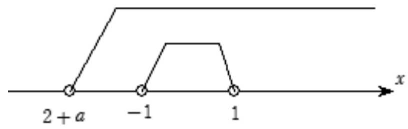
不等式③の解は

$$\begin{aligned} 2x-3 &> x-4 \\ x &> -1 \end{aligned}$$

となる。よって，①と③を同時に満たす x の範囲は $-1<x<1$ である。不等式②の解は (※) 式より，$2-a$ の正負によって変わってくるので，a が２より大きいか小さいかで場合分け。

- $a<2$ のとき

不等式②の解は (2) と同様 $x>2+a$ である。ゆえに数直線より，$2+a$ が -1 より左側，つまり



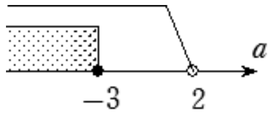
$$2+a\leqq -1$$

であればいい。($2+a$ は -1 であってもよいので等号が必要である。なぜなら，$2+a$ が -1 のとき，不等式②は $x>-1$ となり，この中に $-1<x<1$ なる x をすべて含めることができる。)

この不等式を解いて

$$a\leqq -3$$

が成り立つ。ここで，$a<2$ であるので，共通範囲をとって $a\leqq -3$

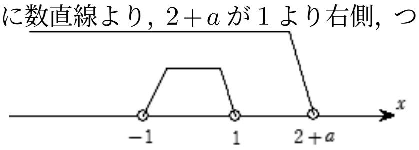


- $a>2$ のとき

不等式②の解を求める。(2) の (※) 式において $a>2$ より $0>2-a$ つまり，$2-a<0$ であるから，(※) 式の両辺を $(2-a)$ で割る。($2-a$ は負の数なので，不等号の向きは変わることに注意)

$$x<2+a$$

ゆえに数直線より，$2+a$ が 1 より右側，つまり

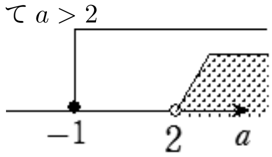


$$1\leqq 2+a$$

であればいい。解いて

$$a\geqq -1$$

が成り立つ。ここで，$a>2$ であるので，共通範囲をとって $a>2$



以上より，求める a の範囲は $a\leqq -3$，$a>2$

20 (1) 解答

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{3} &> \frac{x-2}{5} && \text{(両辺に１５をかける)} \\ 5(x-1) &> 3(x-2) \\ 5x-5 &> 3x-6 \\ 2x &> -1 && \text{(両辺を２で割る)} \\ x &> -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) 解答

不等式②に $a=\sqrt{2}$ を代入すると

$$2\sqrt{2}x \leqq 3\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2$$

すなわち

$$2\sqrt{2}x \leqq 3\sqrt{2}-2$$

となる。ここで，両辺を $2\sqrt{2}$ で割る。($2\sqrt{2}$ は正の数なので，不等号の向きは変わらないことに注意)

$$x \leqq \frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}$$

ここで，右辺を有理化すると

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} &= \frac{(3\sqrt{2}-2)\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{6-2\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{3-\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

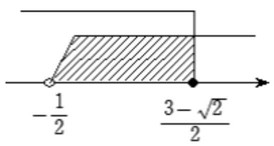
より，結局 $a=\sqrt{2}$ における不等式②の解は

$$x \leqq \frac{3-\sqrt{2}}{2} \cdots (※)$$

となる。ここで，$3-\sqrt{2}$ は明らかに正の数であるから，$-\frac{1}{2}$ より大きいので，(1) と (※) の共通範囲をとって

$$-\frac{1}{2} < x \leqq \frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

である。



(3) 解答

条件より，１桁の自然数とは

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,8,\ 9$$

の９個である。(０は自然数ではない。) また，不等式②の解を求める際に不等式②の両辺を $2a$ で割るが，a の正負によって不等号の向きが変わってくるので，$a>0$ と $a<0$ で場合分けをする。

- $a>0$ のとき

不等式②の両辺を $2a$ で割る。ここで，$2a$ は正の数なので不等号の向きは変わらない

$$x \leqq \frac{3a-a^2}{2a}$$

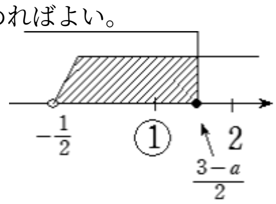
右辺を約分すると

$$\frac{3a-a^2}{2a} = \frac{a(3-2a)}{2a} = \frac{3-a}{2}$$

より，結局不等式②の解は

$$x \leqq \frac{3-a}{2}$$

となる。ここで不等式①，②をともに満たす x の範囲内に，１桁の自然数が１つだけなので，不等号の向きから考えて，$-\frac{1}{2} < x \leqq \frac{3-2a}{2}$ の中に $x=1$ のみが含まれるような a の値の範囲を求めればよい。



すると数直線より

$$1 \leqq \frac{3-a}{2} < 2$$

であればよく，

$$\begin{array}{ccccc l} 1 & \leqq & \frac{3-a}{2} & < & 2 & \text{(すべてに２をかける)} \\ 2 & \leqq & 3-a & < & 4 & \text{(すべてから３を引く)} \\ -1 & \leqq & -a & < & 1 & \text{(すべてを }-1\text{ で割る)} \\ 1 & \geqq & a & > & -1 & \end{array}$$

より，$-1<a\leqq 1$ となる。今，$a>0$ より，これらの共通範囲をとって $0<a\leqq 1$ となる。

- $a<0$ のとき

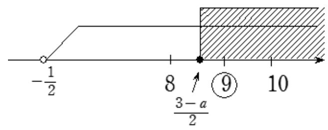
不等式②の両辺を $2a$ で割る。ここで，$2a$ は負の数なので不等号の向きは変わる

$$x \geqq \frac{3a-a^2}{2a}$$

右辺を約分すると，不等式②の解は

$$x \geqq \frac{3-a}{2}$$

となる。ここで不等式①，②をともに満たす x の範囲内に，１桁の自然数が１つだけなので，不等号の向きから考えて，$x \geqq \frac{3-2a}{2}$ の中に $x=9$ のみが含まれるような a の値の範囲を求めればよい。



すると数直線より

$$8 < \frac{3-a}{2} \leqq 9$$

であればよく，

$$\begin{array}{ccccccl} 8 & < & \dfrac{3-a}{2} & \leqq & 9 & & (\text{すべてに } 2 \text{ をかける}) \\ 16 & < & 3-a & \leqq & 18 & & (\text{すべてから } 3 \text{ を引く}) \\ 13 & < & -a & \leqq & 15 & & (\text{すべてを } -1 \text{ で割る}) \\ -13 & > & a & \geqq & -15 & & \end{array}$$

より，$-15 \leqq a < -13$ となる。今 $a < 0$ であるが，$-15 \leqq a < -13$ に含まれる a はすべて $a < 0$ を満たす。

以上より，求める a の範囲は

$$-15 \leqq a < -13,\ 0 < a \leqq 1$$

である。

21 (1) 解答

$$\begin{array}{rcll} x-5 & \geqq & \dfrac{x-13}{3} & (\text{両辺に } 3 \text{ をかける}) \\ 3(x-5) & \geqq & x-13 & \\ 3x-15 & \geqq & x-13 & \\ 2x & \geqq & 2 & (\text{両辺を } 2 \text{ で割る}) \\ x & \geqq & 1 & \end{array}$$

(2) 解答

$x = 2$ が不等式②を満たすので，②の x に 2 を代入してできる関係式が成り立つ。よって

$$2a - 4 \leqq 2 \cdot 2 \leqq 5a + 2$$

が成り立つ。この式は

$$\begin{cases} 2a - 4 \leqq 4 & \cdots(\quad) \\ 4 \leqq 5a + 2 & \cdots(\quad) \end{cases}$$

の連立不等式が成り立つことに等しい。(　) 式より $2a \leqq 8$ から $a \leqq 4$ である。また，(　) 式から $5a \geqq 2$ から $a \geqq \dfrac{2}{5}$ である。よって，これらの共通範囲より

$$\frac{2}{5} \leqq a \leqq 4 \cdots (※)$$

となる。ここで今 a は正の定数であるので $a > 0$ であるが，(※) に含まれる a はすべて $a > 0$ を満たす。以上より $\dfrac{2}{5} \leqq a \leqq 4$ である。

(3) 解答

x の 2 次方程式 $x^2 - (3a+1)x + 6a - 2 = 0$ について

$$x^2 - (3a+1)x + 6a - 2 = x^2 + (-3a-1)x + 2(3a-1)$$

と考えると

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & \rightarrow & -2 \\ & \times & & \\ 1 & -(3a-1) & \rightarrow & -3a+1 \\ \hline 1 & 2(3a-1) & & -3a-1 \end{array}\right)$$

$$x^2 - (3a+1)x + 6a - 2 = (x-2)\{x - (3a-1)\}$$

と因数分解できる。ゆえに 2 次方程式 $x^2 - (3a+1)x + 6a - 2 = 0$ の解は

$$(x-2)\{x-(3a-1)\} = 0$$

より，$x = 2,\ 3a-1$ である。条件から，$x = 2$ と $x = 3a - 1$ の両方が，不等式①も②も満たすような a の範囲を求める。

- $x = 2$ について
  不等式①を満たす x の範囲は (1) から $x \geqq 1$ である。よって $x = 2$ は $x \geqq 1$ の中に含まれるので，$x = 2$ は不等式①を満たすことが確かめられた。また，$x = 2$ が不等式②を満たすときの a の範囲は，(2) の結果より $\dfrac{2}{5} \leqq a \leqq 4$ である。従って，$x = 2$ が不等式①，②を同時に満たすときの a の範囲は

  $$\frac{2}{5} \leqq a \leqq 4 \cdots (\quad)$$

  である。
- $x = 3a - 1$ について
  不等式①を満たす x の範囲は (1) から $x \geqq 1$ である。よって $x = 3a - 1$ が $x \geqq 1$ の中に含まれればよいので

  $$3a - 1 \geqq 1 \cdots (\mathrm{a})$$

  が成り立てばよい。また，$x = 3a - 1$ が不等式②を満たすとき，(2) と同様に

  $$2a - 4 \leqq 2(3a-1) \leqq 5a + 2$$

  が成り立つ。この式は

  $$\begin{cases} 2a - 4 \leqq 2(3a-1) & \cdots(\mathrm{b}) \\ 2(3a-1) \leqq 5a + 2 & \cdots(\mathrm{c}) \end{cases}$$

  の連立不等式が成り立つことに等しい。従って，$x = 3a - 1$ が不等式①，②を同時に満たす

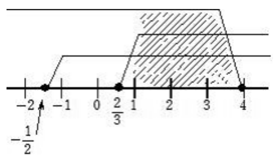
には，(a)，(b)，(c) の 3 つの不等式が同時に成り立てばいい。

(a) から　$3a \geqq 2$　よって　$a \geqq \dfrac{2}{3}$

(b) から　$2a-4 \geqq 6a-2$　よって　$a \geqq -\dfrac{1}{2}$

(c) から　$6a-2 \leqq 5a+2$　よって　$a \leqq 4$

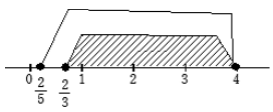
これらを同時に満たす a の範囲は数直線より



$$\frac{2}{3} \leqq a \leqq 4 \cdots (\quad)$$

となる。ここで条件より $a>0$ であるが，(　) に含まれる a はすべて $a>0$ を満たす。

以上より，(　) と (　) の共通範囲を考えると，求める a の範囲は



$$\frac{2}{3} \leqq a \leqq 4$$

である。

22 (1) 解答

$$\begin{aligned} x &= -1 \pm \sqrt{1^2 - 1\cdot(-4)} \\ &= -1 \pm \sqrt{5} \end{aligned}$$

(2) 解答

(1) より，$x=-1\pm\sqrt{5}$ である。正であるのは $-1+\sqrt{5}$ であるから $a=-1+\sqrt{5}$ である。よって

$$\begin{aligned} (a+1)x &> 2a+7 \\ \{(-1+\sqrt{5})+1\}x &> 2(-1+\sqrt{5})+7 \\ \sqrt{5}x &> -2+2\sqrt{5}+7 \\ \sqrt{5}x &> 5+2\sqrt{5} \end{aligned}$$

両辺を $\sqrt{5}$ で割る。$\sqrt{5}$ は正の数なので，不等号の向きは変わらない。

$$x > \frac{5+2\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

ここで，右辺を有理化すると

$$\frac{(5+2\sqrt{5})\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}+10}{5} = \sqrt{5}+2$$

よって

$$x > 2+\sqrt{5}$$

である。

(3) 解答

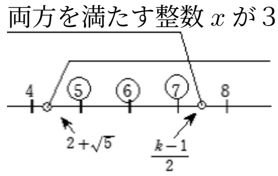
②の解は (2) より $x>2+\sqrt{5}$ である。また，$2x-k+1<0$ を解くと

$$\begin{aligned} 2x-k+1 &< 0 \\ 2x &< k-1 \\ x &< \frac{k-1}{2} \end{aligned}$$

となる。ここで，$2<\sqrt{5}<3$ であるから，すべてに 2 を加えると

$$4 < 2+\sqrt{5} < 5$$

が成り立つ。よって，$x>2+\sqrt{5}$ と $x<\dfrac{k-1}{2}$ の両方を満たす整数 x が 3 個であるには，数直線より



$$7 < \frac{k-1}{2} \leqq 8$$

であればよい。ゆえに

$$\begin{aligned} 7 &< \frac{k-1}{2} \leqq 8 &&\text{(すべてに 2 を掛ける)} \\ 14 &< k-1 \leqq 16 &&\text{(すべてに 1 を足す)} \\ 15 &< k \leqq 17 \end{aligned}$$

よって，$15<k\leqq 17$ が成り立つが，条件より k は整数であるので，この範囲内に存在する整数は $k=16,\ 17$ のみである。

23 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分をa，小数部分をbとする.

(1)

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$=\underline{\sqrt{2}+1}$$

(2) $\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}$ より

$1<\sqrt{2}<2$ である。

すべてに1を加えると

$2<1+\sqrt{2}<3$

であるから．$1+\sqrt{2}$は2と3の間の数である。

よって．$1+\sqrt{2}$は $2.\cdots\cdots$

という数になるから

整数部分 $\underline{a=2}$

また．

(整数部分)+(小数部分)=(元の数)

より

$$a+b=1+\sqrt{2}$$

$$2+b=1+\sqrt{2}$$

$$\therefore b=1+\sqrt{2}-2$$

$$=\underline{\sqrt{2}-1}$$

そして．$b-\dfrac{1}{b}=(\sqrt{2}-1)-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$=(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$=(\sqrt{2}-1)-\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$=\sqrt{2}-1-\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$=(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}+1)$$

$$=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1\quad\underline{=-2}$$

(3)

$$b^3-b^2+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b^3}$$

$$=\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)-\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

ここで．

$$b^3-\frac{1}{b^3}=\left(b-\frac{1}{b}\right)^3+3b\cdot\frac{1}{b}\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

$$=\left(b-\frac{1}{b}\right)^3+3\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

$$=(-2)^3+3(-2)=-8-6=-14.$$

また $b^2-\dfrac{1}{b^2}=\left(b-\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$ より．$b+\dfrac{1}{b}$ の値を求めると．

$$b+\frac{1}{b}=(\sqrt{2}-1)+\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=(\sqrt{2}-1)+\frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$$=2\sqrt{2}.$$

よって．$b^2-\dfrac{1}{b^2}=(-2)\cdot2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}.$

$\therefore$

$$b^3-b^2+\frac{1}{b^2}-\frac{1}{b^3}=\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)-\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)$$

$$=(-14)-(-4\sqrt{2})$$

$$=\underline{4\sqrt{2}-14}$$

$\boxed{24}$ $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

(1)

$$x-y=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2-(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$=\frac{(2+1+2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1-2+\sqrt{2})}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$
$$=\frac{(3+2\sqrt{2})-(2\sqrt{2}-3)}{2-1}$$
$$=\frac{3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3}{1}$$
$$=6$$

$$xy=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\cancel{\sqrt{2}+1}}{\cancel{\sqrt{2}-1}}\times\frac{-(\cancel{\sqrt{2}-1})}{\cancel{1+\sqrt{2}}}$$
$$=-1$$

(2)

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{y^2+x^2}{xy}$$
$$=\frac{x^2+y^2}{xy}\cdots(*)$$

ここで、

$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

より

$$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$$

(1)の結果を代入して

$$x^2+y^2=6^2+2(-1)$$
$$=36-2$$
$$=34$$

より、(*)に代入して、

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}$$
$$=\frac{34}{-1}$$
$$=-34$$

また、

$$\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}=\frac{y^3-x^3}{x^2y^2}$$
$$=-\frac{x^3-y^3}{(xy)^2}\cdots(**)$$

ここで、

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x-y)\{(x^2+y^2)+xy\}$$

であり、$x-y=6$, $x^2+y^2=34$, $xy=-1$ を代入して

$$x^3-y^3=6\{34+(-1)\}$$
$$=6\cdot 33$$
$$=198$$

(**)に代入して

$$\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}=-\frac{x^3-y^3}{(xy)^2}$$
$$=-\frac{198}{(-1)^2}$$
$$=-198$$

(3)

$$\frac{yx^2-(y^2-2y+1)x+y-2}{x^5y-xy^5}$$
$$=\frac{yx^2-y^2x+2yx-x+y-2}{xy(x^4-y^4)}$$
$$=\frac{yx(x-y)+2yx-(x-y)-2}{xy(x^2+y^2)(x^2-y^2)}$$
$$=\frac{xy(x-y)+2xy-(x-y)-2}{xy(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}\cdots(※)$$

ここで(1)(2)より

$$\begin{cases}x-y=6,\ xy=-1.\\ x^2+y^2=34\end{cases}$$

である。また $x+y$ は

$$x+y=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2+(1-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$
$$=\frac{(3+2\sqrt{2})+(2\sqrt{2}-3)}{2-1}$$
$$=4\sqrt{2}$$

よって(※)に代入して

$$(※)=\frac{(-1)\cdot 6+2(-1)-6-2}{(-1)\cdot 34\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6}$$
$$=\frac{-6-2-6-2}{-34\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6}$$
$$=\frac{16}{34\cdot 4\sqrt{2}\cdot 6}$$
$$=\frac{4}{34\cdot\sqrt{2}\cdot 6}$$
$$=\frac{1}{17\cdot\sqrt{2}\cdot 3}$$
$$=\frac{1}{51\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{102}$$

25

(1) $p=|a-3|$

$a=\sqrt{7}$ より $p=|\sqrt{7}-3|$

ここで、$3=\sqrt{9}$ より、$\sqrt{7}$ は 3 よりも小さい数である。ゆえに

$3-\sqrt{7}$ は負の数

であるから

$$p=|\sqrt{7}-3|$$
$$=-(\sqrt{7}-3)=3-\sqrt{7}$$

となる。また、

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$$
$$=\frac{3+\sqrt{7}}{(3-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$$
$$=\frac{3+\sqrt{7}}{3^2-(\sqrt{7})^2}$$
$$=\frac{3+\sqrt{7}}{9-7}$$
$$=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

(2)

(1)より $p=3-\sqrt{7},\ \frac{1}{p}=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$

よって

$$p+\frac{2}{p}=(3-\sqrt{7})+2\cdot\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$
$$=3-\sqrt{7}+3+\sqrt{7}$$
$$=6$$

が成り立つ。

よって

$$p^2+\frac{4}{p^2}=p^2+\left(\frac{2}{p}\right)^2$$
$$=\left(p+\frac{2}{p}\right)^2-2\cdot p\cdot\frac{2}{p}$$
$$=\left(p+\frac{2}{p}\right)^2-4$$
$$=6^2-4$$
$$=36-4$$
$$=32$$

また、

$$p^4+\frac{16}{p^4}=(p^2)^2+\left(\frac{4}{p^2}\right)^2$$
$$=\left(p^2+\frac{4}{p^2}\right)^2-2\cdot p^2\cdot\frac{4}{p^2}$$
$$=\left(p^2+\frac{4}{p^2}\right)^2-8$$
$$=32^2-8$$
$$=1024-8$$
$$=1016$$

(3) 四捨五入して3になる。

それは、p が、

2.5以上、3.5未満

である。ゆえに、

$$2.5\leqq p<3.5$$

が成り立てばいい。

$$\therefore\ \frac{5}{2}\leqq p<\frac{7}{2}$$

$p=|a-3|$ より

$$\frac{5}{2}\leqq|a-3|<\frac{7}{2}$$

を考える。よって

連立不等式

$$\begin{cases}\frac{5}{2}\leqq|a-3|\ \cdots① \\ |a-3|<\frac{7}{2}\ \cdots②\end{cases}$$

を解けばよい。

①より

$$|a-3|\geqq\frac{5}{2}$$

$\therefore$

$$a-3\leqq-\frac{5}{2},\ a-3\geqq\frac{5}{2}$$

よって

$$a\leqq\frac{1}{2},\ a\geqq\frac{11}{2}\ \cdots①'$$

②より

$$|a-3|<\frac{7}{2}$$

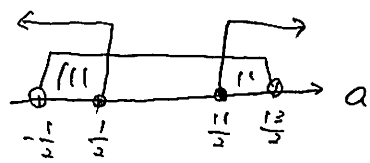
$\therefore$

$$-\frac{7}{2}<a-3<\frac{7}{2}$$

すべてに3を加えて

$$-\frac{1}{2}<a<\frac{13}{2}\ \cdots②'$$

よって①'②'より



$$-\frac{1}{2}<a\leqq\frac{1}{2},\ \frac{11}{2}\leqq a<\frac{13}{2}$$

26

(1) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ より

$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(\sqrt{3})^2+2\cdot 1$

$=3+2$

$=5$

また、

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$=(a^2+b^2)+2ab$

$=5+2\cdot 1$

$=7$

ここで $a>0,\ b>0$ より

$a+b$ も正の数

そして

$(a+b)^2=7$ より

$a+b=\pm\sqrt{7}$

よって、$a+b$ は正の数より

$a+b=\sqrt{7}$

(2)

$x=a^2-\sqrt{7}b,\ y=b^2-\sqrt{7}a$

$x+y=(a^2-\sqrt{7}b)+(b^2-\sqrt{7}a)$

$=(a^2+b^2)-\sqrt{7}(a+b)$

$=5-\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$

$=5-7$

$=-2$

$x-y=(a^2-\sqrt{7}b)-(b^2-\sqrt{7}a)$

$=a^2-\sqrt{7}b-b^2+\sqrt{7}a$

$=(a^2-b^2)+\sqrt{7}(a-b)$

$=(a-b)(a+b)+\sqrt{7}(a-b)$

$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}\cdot\sqrt{3}$

$=\sqrt{21}+\sqrt{21}$

$=2\sqrt{21}$

(3) 絶対値をはずすことを考える。

ここで (2) より

$$\begin{cases} x+y=-2 & \cdots ① \\ x-y=2\sqrt{21} & \cdots ② \end{cases}$$

より、①＋②から

$2x=-2+2\sqrt{21}$

$\therefore\ x=-1+\sqrt{21}$

また、①－②から

$2y=-2-2\sqrt{21}$

$\therefore\ y=-1-\sqrt{21}$

となる。よって

$$\begin{cases} x=-1+\sqrt{21} \\ y=-1-\sqrt{21} \end{cases}$$

となる。すると、

x は正の数

y は負の数

であることがわかるので

$|x|=x$ (そのまま)

$|y|=-y$ ((−1)をかける)

とはずれる。

$\therefore$

$\dfrac{x}{|y|}+\dfrac{y}{|x|}$

$=\dfrac{x}{-y}+\dfrac{y}{x}$

$=-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$

$=\dfrac{-x^2+y^2}{xy}$

$=-\dfrac{x^2-y^2}{xy}$

$=-\dfrac{(x+y)(x-y)}{xy}\ \cdots(*)$

ここで、$x+y=-2$

$x-y=2\sqrt{21}$

より、xy を求めると

$xy=(-1+\sqrt{21})(-1-\sqrt{21})$

$=(-1)^2-(\sqrt{21})^2$

$=1-21=-20$

$\therefore$

$(*)$ に代入して

$\dfrac{x}{|y|}+\dfrac{y}{|x|}=-\dfrac{(-2)\cdot 2\sqrt{21}}{-20}$

$=-\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

27

(1) $x=4+\sqrt{7}$, $y=4-\sqrt{7}$ より

$$xy=(4+\sqrt{7})(4-\sqrt{7})$$
$$=4^2-(\sqrt{7})^2$$
$$=16-7$$
$$=\underline{9}$$

また

$$x+y=(4+\sqrt{7})+(4-\sqrt{7})$$
$$=4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}$$
$$=8$$

より

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$
$$=8^2-2\cdot 9$$
$$=64-18$$
$$=\underline{46}$$

(2)

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=(\sqrt{x})^2-2\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2$$
$$=x-2\sqrt{xy}+y$$
$$=(x+y)-2\sqrt{xy}$$

である。ここで、(1)の結果から

$x+y=8$, $xy=9$

より、代入して

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=8-2\sqrt{9}$$
$$=8-2\cdot 3$$
$$=2$$

となる。ゆえに

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2=2$$

より

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=\pm\sqrt{2} \quad \cdots\cdots (*)$$

となる。ここで、xとyではxの方が大きい。よって$\sqrt{y}$よりも$\sqrt{x}$の方が大きくなるので

$\sqrt{x}-\sqrt{y}$は正の数

となる。ゆえに(*)から

$\sqrt{x}-\sqrt{y}=-\sqrt{2}$は不適

$$\therefore \quad \sqrt{x}-\sqrt{y}=\underline{\sqrt{2}}$$

(3)

$$(y\sqrt{y}-x\sqrt{x})^2$$
$$=(y\sqrt{y})^2-2y\sqrt{y}\cdot x\sqrt{x}+(x\sqrt{x})^2$$
$$=y^3-2xy\sqrt{xy}+x^3$$
$$=(x^3+y^3)-2xy\sqrt{xy} \quad \cdots (**)$$

ここで、

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$=(x+y)\{(x^2+y^2)-xy\}$$
$$=8(46-9)$$
$$=8\cdot 37$$
$$=296$$

であり、また $xy=9$ より

(**)に代入して

$$(y\sqrt{y}-x\sqrt{x})^2$$
$$=296-2\cdot 9\cdot\sqrt{9}$$
$$=296-2\cdot 9\cdot 3$$
$$=296-54$$
$$=242$$

$\therefore$

$$(y\sqrt{y}-x\sqrt{x})^2=242$$
$$y\sqrt{y}-x\sqrt{x}=\pm\sqrt{242}$$
$$=\pm\sqrt{121\cdot 2}$$
$$=\pm 11\sqrt{2} \quad \cdots (☆)$$

ここで(2)と同様に

yよりもxの方が大きい

$\therefore$ y^3よりもx^3の方が大きい

$\therefore$ $\sqrt{y^3}$よりも$\sqrt{x^3}$の方が大きい

つまり

$y\sqrt{y}$よりも$x\sqrt{x}$の方が大きいから

$y\sqrt{y}-x\sqrt{x}$は負の数となる。

よって(☆)において

$y\sqrt{y}-x\sqrt{x}=11\sqrt{2}$は不適より

$$y\sqrt{y}-x\sqrt{x}=\underline{-11\sqrt{2}}$$

$\boxed{24}$ $x=\dfrac{5}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$, $y=\dfrac{5}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(1)

$$x+y=\frac{5}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\frac{5}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5(3\sqrt{2}+\sqrt{3})+5(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{3})}$$
$$=\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{3}+15\sqrt{2}-5\sqrt{3}}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{30\sqrt{2}}{18-3}$$
$$=\frac{30\sqrt{2}}{15}=\underline{2\sqrt{2}}$$

$$xy=\frac{5}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\frac{5}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5\cdot5}{(3\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{25}{18-3}$$
$$=\frac{25}{15}=\underline{\frac{5}{3}}$$

(2)
$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{x-y}$$
$$=\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}$$

ここで.
$$x-y=\frac{5}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{5}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{5(3\sqrt{2}+\sqrt{3})-5(3\sqrt{2}-\sqrt{3})}{18-3}$$
$$=\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{3}-15\sqrt{2}+5\sqrt{3}}{15}$$
$$=\frac{10\sqrt{3}}{15}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

また(1)より
$$\begin{cases}x+y=2\sqrt{2}.\\ xy=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$
を代入して
$$\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{x-y}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{\frac{5}{3}}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$
$$=\left(2\sqrt{2}+2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right)\div\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$=\left(2\sqrt{2}+2\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}\right)\times\frac{3}{2\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}}+2\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{3\sqrt{6}}{3}+\sqrt{5}$$
$$=\underline{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$

(3)
$$\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3}{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{y})^3}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})\{(\sqrt{x})^2-\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2\}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}\sqrt{y}+(\sqrt{y})^2\}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(x-\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}$$
$$=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\frac{(x+y)-\sqrt{xy}}{(x+y)+\sqrt{xy}}\quad\cdots(*)$$

ここで(2)より
$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}$$

また(1)より $x+y=2\sqrt{2}$
$xy=\dfrac{5}{3}$

よって(*)より
$$(*)=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\times\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{\frac{5}{3}}}{2\sqrt{2}+\sqrt{\frac{5}{3}}}$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot\frac{2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}$$
(分子・分母)に $\sqrt{3}$ をかけた)
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}+\sqrt{5}}$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot\frac{(2\sqrt{6}-\sqrt{5})(2\sqrt{6}-\sqrt{5})}{(2\sqrt{6}+\sqrt{5})(2\sqrt{6}-\sqrt{5})}$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot\frac{(2\sqrt{6}-\sqrt{5})^2}{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot\frac{(2\sqrt{6})^2-2\cdot2\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{24-5}$$
$$=(\sqrt{6}+\sqrt{5})\cdot\frac{29-4\sqrt{30}}{19}$$
$$=\frac{29\sqrt{6}+29\sqrt{5}-4\sqrt{30}\cdot\sqrt{6}-4\sqrt{30}\cdot\sqrt{5}}{19}$$
$$=\frac{29\sqrt{6}+29\sqrt{5}-24\sqrt{5}-20\sqrt{6}}{19}$$
$$=\underline{\frac{9\sqrt{6}+5\sqrt{5}}{19}}$$

$\boxed{19}$ $x=\sqrt{3}+a$, $y=\sqrt{3}-a$

(1) $a=1$ より.

$x=\sqrt{3}+1$, $y=\sqrt{3}-1$

よって

$$x^2+y^2=(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2$$
$$=(3+1+2\sqrt{3})+(3+1-2\sqrt{3})$$
$$=4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}$$
$$=\underline{8}$$

また.

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=|x|+|y|$$

であり. $x=\sqrt{3}+1$ は正の数,
$y=\sqrt{3}-1$ も正の数

よって

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=|\sqrt{3}+1|+|\sqrt{3}-1|$$
$$=\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1=\underline{2\sqrt{3}}$$

(2) $a=2$ の時

$x=\sqrt{3}+2$, $y=\sqrt{3}-2$

ここで. xは 正の数 であるが. yは 負の数である。

$\therefore$

$$\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=|x|+|y|$$
$$=|\sqrt{3}+2|+|\sqrt{3}-2|$$
$$=(\sqrt{3}+2)-(\sqrt{3}-2)$$
$$=\sqrt{3}+2-\sqrt{3}+2$$
$$=\underline{4}$$

(3) $\sqrt{x^2}+\sqrt{y^2}=5$.

より

$|x|+|y|=5$

である。ここで $x=\sqrt{3}+a$, $y=\sqrt{3}-a$

より.

$|\sqrt{3}+a|+|\sqrt{3}-a|=5$

aは正の数なので. $\sqrt{3}+a$ も正の数となる.

よって. $\sqrt{3}-a$ の正負によって場合分け

・$\sqrt{3}-a\geqq 0$. の時

$\sqrt{3}-a\geqq 0$ より $a\leqq\sqrt{3}$ である.

ここで aは正より $a>0$ であるから

$0<a\leqq\sqrt{3}$

の時を考える。この時.

$|\sqrt{3}+a|=\sqrt{3}+a$, $|\sqrt{3}-a|=\sqrt{3}-a$

より

$|\sqrt{3}+a|+|\sqrt{3}-a|=5$

$\therefore$ $(\sqrt{3}+a)+(\sqrt{3}-a)=5$

$\therefore$ $2\sqrt{3}=5$

となる。これは成り立たないので.

$0<a\leqq\sqrt{3}$ において解はない。

・$\sqrt{3}-a<0$ の時

$\sqrt{3}-a<0$ より $a>\sqrt{3}$ である。

この時.

$|\sqrt{3}+a|=\sqrt{3}+a$,

$|\sqrt{3}-a|=-(\sqrt{3}-a)$
$=-\sqrt{3}+a$

より

$|\sqrt{3}+a|+|\sqrt{3}-a|=5$

$\therefore$ $(\sqrt{3}+a)+(-\sqrt{3}+a)=5$

$2a=5$

$\therefore$ $a=\dfrac{5}{2}$

これは $a>\sqrt{3}$ を満たす。

以上より $\underline{a=\dfrac{5}{2}}$

30

(1)

$f(3)=\sqrt{3+6+4\sqrt{3+2}}-\sqrt{3+6-4\sqrt{3+2}}$

$=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

$=\sqrt{9+2\sqrt{20}}-\sqrt{9-2\sqrt{20}}$

$=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{5})^2}$

$=|\sqrt{4}+\sqrt{5}|-|\sqrt{4}-\sqrt{5}|$

$=|2+\sqrt{5}|-|2-\sqrt{5}|$ …(*)

ここで $2+\sqrt{5}$ は正の数より

$|2+\sqrt{5}|=2+\sqrt{5}$

また、$2-\sqrt{5}$ は負の数より

$|2-\sqrt{5}|=-(2-\sqrt{5})$

$=-2+\sqrt{5}$

よって(*)より

$f(3)=(2+\sqrt{5})-(-2+\sqrt{5})$

$=2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}$

$=\underline{4}$ //

(2)

$f(\frac{1}{2})=\sqrt{\frac{1}{2}+6+4\sqrt{\frac{1}{2}+2}}-\sqrt{\frac{1}{2}+6-4\sqrt{\frac{1}{2}+2}}$

$=\sqrt{\frac{13}{2}+4\sqrt{\frac{5}{2}}}-\sqrt{\frac{13}{2}-4\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$=\sqrt{\frac{13}{2}+2\sqrt{4\cdot\frac{5}{2}}}-\sqrt{\frac{13}{2}-2\sqrt{4\cdot\frac{5}{2}}}$

$=\sqrt{\frac{13}{2}+2\sqrt{10}}-\sqrt{\frac{13}{2}-2\sqrt{10}}$

$=\sqrt{\frac{13+4\sqrt{10}}{2}}-\sqrt{\frac{13-4\sqrt{10}}{2}}$

$=\frac{\sqrt{13+2\sqrt{40}}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{13-2\sqrt{40}}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{(\sqrt{8}-\sqrt{5})^2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{|\sqrt{8}+\sqrt{5}|}{\sqrt{2}}-\frac{|\sqrt{8}-\sqrt{5}|}{\sqrt{2}}$ ($\sqrt{8}+\sqrt{5}$ …正の数, $\sqrt{8}-\sqrt{5}$ …正の数)

$=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{\sqrt{8}+\sqrt{5}-\sqrt{8}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{2}=\underline{\sqrt{10}}$ //

(3)

$f(x)=\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}$

$=\sqrt{x+6+2\sqrt{4(x+2)}}-\sqrt{x+6-2\sqrt{4(x+2)}}$

$=\sqrt{(\sqrt{x+2}+\sqrt{4})^2}-\sqrt{(\sqrt{x+2}-\sqrt{4})^2}$

$=|\sqrt{x+2}+\sqrt{4}|-|\sqrt{x+2}-\sqrt{4}|$

$=|\sqrt{x+2}+2|-|\sqrt{x+2}-2|$ …(**)

ここで、xがいくつであっても、$\sqrt{x+2}$ は正の数より

$\sqrt{x+2}+2$ も正の数となる。

よって $\sqrt{x+2}-2$ が、正の数になるか、負の数になるかで場合分けをする。

- $\sqrt{x+2}-2\geqq 0$ の時 ($\sqrt{x+2}-2$ が正の時)

$\sqrt{x+2}\geqq 2 \iff \sqrt{x+2}\geqq\sqrt{4}$ より $x+2\geqq 4$ ∴ $x\geqq 2$ の時

(**)より

$f(x)=(\sqrt{x+2}+2)-(\sqrt{x+2}-2)$

$=\sqrt{x+2}+2-\sqrt{x+2}+2=4$

となる。よって $x\geqq 2$ においては、xがいくつでも $f(x)$ は4になるので、$f(x)=2$ となるxは $x\geqq 2$ において存在しない。

- $\sqrt{x+2}-2<0$ の時 ($\sqrt{x+2}-2$ が負の時)

$\sqrt{x+2}<2 \iff \sqrt{x+2}<\sqrt{4}$ より $x+2<4$

よって $x<2$ であるが、条件より $x\geqq -2$ より

$-2\leqq x<2$ の時、

$\sqrt{x+2}-2$ は負の数より

$|\sqrt{x+2}-2|=-(\sqrt{x+2}-2)=-\sqrt{x+2}+2$

(**)より

$f(x)=(\sqrt{x+2}+2)-(-\sqrt{x+2}+2)$

$=\sqrt{x+2}+2+\sqrt{x+2}-2=2\sqrt{x+2}$

この値が2になるので

$2\sqrt{x+2}=2$ ∴ $\sqrt{x+2}=1$ より $\underline{x=-1}$ // (これは $-2\leqq x<2$ を満たす)

31

(1) $a+b+c=1$ であるので、両辺2乗して

$$(a+b+c)^2=1^2$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=1$$

よって

$$(a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)=1$$

である。ここで、$a^2+b^2+c^2=3$ より

代入して

$$3+2(ab+bc+ca)=1$$

$$2(ab+bc+ca)=-2$$

$$\therefore\ \underline{ab+bc+ca=-1}$$

また、$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$

より $\dfrac{bc}{abc}+\dfrac{ac}{abc}+\dfrac{ab}{abc}=1$

$$\therefore\ \frac{bc+ca+ab}{abc}=1$$

分母払って

$$bc+ca+ab=abc$$

が成り立つ。今、$ab+bc+ca=-1$

であったから、abc の値も -1 である

よって $\underline{abc=-1}$

(2)

公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

より

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b+c)\{(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)\}$$

に代入すると

$$a^3+b^3+c^3-3(-1)$$

$$=1\cdot\{3-(-1)\}$$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3+3=4$$

よって $\underline{a^3+b^3+c^3=1}$

参考

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)-3abc$$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$

$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\{(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab\}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

(3) $$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}\quad\cdots(*)$$

ここで $ab+bc+ca=-1$ の両辺を2乗して

$$(ab+bc+ca)^2=(-1)^2$$

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2+2(ab)(bc)+2(bc)(ca)+2(ca)(ab)=1$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2ab^2c+2abc^2+2a^2bc=1$$

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2abc(a+b+c)=1$$

$abc=-1$、$a+b+c=1$ を代入して

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+2(-1)\cdot 1=1$$

$$\therefore\ a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=3$$

(*)より

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{(abc)^2}$$

$$=\frac{3}{(-1)^2}=\underline{3}$$

32

$3x^2+6x-a=0 \cdots ①$

(1) 2次方程式①が異なる2つの実数解をもつ時、$D>0$ より

$D=6^2-4\cdot3\cdot(-a)$

$=36+12a$

において

$36+12a>0$

$12a>-36$

∴ $\underline{a>-3}$

であればよい。

(2) $x=-1$ が不等式②を満たすので、②に $x=-1$ を代入した

$\frac{a-(-1)}{2}<2(-1)+\frac{5}{2}$

が成り立つ。よって

$\frac{a+1}{2}<-2+\frac{5}{2}$

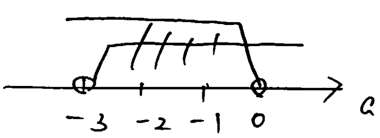
両辺2倍

$a+1<-4+5$

$a+1<1$

∴ $\underline{a<0}$

(3) (1)(2)をともに満たす整数 a とは、(1)と(2)の共通範囲が



$-3<a<0$ より この範囲に含まれる整数は

$a=-2,-1$

の2個だけである。

・$a=-2$ の時

2次方程式①は $3x^2+6x-(-2)=0$

1次不等式②は $\frac{-2-x}{2}<2x+\frac{5}{2}$

2次方程式①を解くと

$3x^2+6x+2=0$

解の公式より

$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}$

$=\frac{-6\pm\sqrt{36-24}}{6}$

$=\frac{-6\pm\sqrt{12}}{6}$

$=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{6}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$.

また、1次不等式②は

$\frac{-2-x}{2}<2x+\frac{5}{2}$

$-2-x<4x+5$

$-5x<7$

∴ $x>-\frac{7}{5}$

である。よって、

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3}}{3}$

のうち、$x>-\frac{7}{5}$ を満たすものを考える。

$x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$ は -1 よりも大きいので $x>-\frac{7}{5}$ を満たす。また $x=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}$ について $-\frac{7}{5}$ との大小関係を考える。差をとると

$\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right)-\left(-\frac{7}{5}\right)$

$=\frac{-3-\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{5}$

$=\frac{-15-5\sqrt{3}+21}{15}$

$=\frac{6-5\sqrt{3}}{15}$

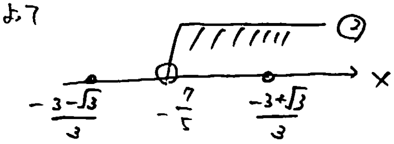
$=\frac{\sqrt{36}-\sqrt{75}}{15}<0$

($\sqrt{36}-\sqrt{75}$ は負の数)

∴ $\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{3}\right)-\left(-\frac{7}{5}\right)<0$

∴ $\frac{-3-\sqrt{3}}{3}<-\frac{7}{5}$

よって



ゆえに、①の解で②も満たすのは

$x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}$

・$a=-1$ の時

2次方程式①は $3x^2+6x+1=0$

解いて $x=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$

1次不等式②は $\frac{-1-x}{2}<2x+\frac{5}{2}$

解いて、$x>-\frac{6}{5}$

よって、$x=\frac{-3\pm\sqrt{6}}{3}$ のうち、$x>-\frac{6}{5}$ を満たすものを考える。

$x=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$ は -1 よりも大きいので、$x>-\frac{6}{5}$ を満たす。また、$\frac{-3-\sqrt{6}}{3}$ と $-\frac{6}{5}$ の差をとると

$\left(\frac{-3-\sqrt{6}}{3}\right)-\left(-\frac{6}{5}\right)$

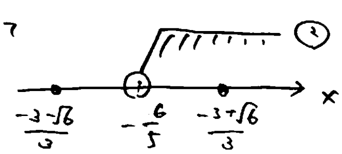
$=\frac{-3-\sqrt{6}}{3}+\frac{6}{5}$

$=\frac{-15-5\sqrt{6}+18}{15}$

$=\frac{3-5\sqrt{6}}{15}<0$

∴ $\frac{-3-\sqrt{6}}{3}<-\frac{6}{5}$

よって



ゆえに①の解で②を満たすのは

$x=\frac{-3+\sqrt{6}}{3}$

以上より $\underline{x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3},\ \frac{-3+\sqrt{6}}{3}}$

33

$3x^2-(5a-5b)x-5a+4b=0 \cdots ①$

(1)

2次方程式①が $x=-1$ を解に持つので、①に $x=-1$ を代入すると

$3(-1)^2-(5a-5b)(-1)-5a+4b=0$

が成り立つ。

∴ $3+(5a-5b)-5a+4b=0$

$3+5a-5b-5a+4b=0$

$3-b=0$

∴ $b=3$ //

(2) 2次方程式①に(1)の結果である $b=3$ を代入すると、

$3x^2-(5a-5\cdot 3)x-5a+4\cdot 3=0$

$3x^2-(5a-15)x-5a+12=0$

($x=-1$ を解に持つことを踏まえて
たすき掛け

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & -5a+12 & \rightarrow & -5a+12 \\ 1 & x & 1 & \rightarrow & 3 \\ \hline & & & & -5a+15 \end{array}$$
)

∴ $\{3x+(-5a+12)\}(x+1)=0$

$(3x-5a+12)(x+1)=0$

∴ $3x-5a+12=0$ より $3x=5a-12$ ∴ $x=\dfrac{5a-12}{3}$

$x+1=0$ より $x=-1$

よって2次方程式①の解は

$x=-1,\ \dfrac{5a-12}{3}$

〈(2)の別解〉

$3x^2-(5a-15)x-5a+12=0$

の左辺の因数分解について

(x について 2次式
a について 1次式)

より、a について降べきの順で並べると

$3x^2-(5a-15)x-5a+12$

$=3x^2-5ax+15x-5a+12$

$=(-5ax-5a)+(3x^2+15x+12)$

$=-5a(x+1)+3(x^2+5x+4)$

$=-5a(x+1)+3(x+1)(x+4)$

$=(x+1)\{-5a+3(x+4)\}$

$=(x+1)(-5a+3x+12)$

$=(x+1)(3x-5a+12)$

としてもよい。

(3) 2次方程式①の2つの解の和は

$\dfrac{5a-12}{3}+(-1)$

$=\dfrac{5a-12-3}{3}$

$=\dfrac{5a-15}{3} \cdots (*)$

である。(*)の整数部分が a である。ここで、整数部分が a である数は、

a 以上、$a+1$ 未満

である。

(例えば、整数部分が2である数は、2.○○○… という数より、2以上3未満の数である)

よって(*)も a 以上 $a+1$ 未満の数であるから

$a \leqq \dfrac{5a-15}{3} < a+1$

が成り立つ。これは連立不等式

$$\begin{cases} a \leqq \dfrac{5a-15}{3} \cdots (\mathrm{I}) \\ \dfrac{5a-15}{3} < a+1 \cdots (\mathrm{II}) \end{cases}$$

を解けばよく

(I)より

$a \leqq \dfrac{5a-15}{3}$

∴ $3a \leqq 5a-15$

$-2a \leqq -15$

∴ $a \geqq \dfrac{15}{2}$

(II)より

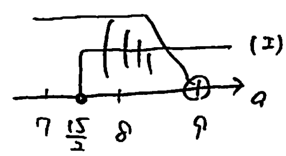
$\dfrac{5a-15}{3} < a+1$

∴ $5a-15 < 3a+3$

$2a < 18$

∴ $a < 9$

共通範囲より



∴ $\dfrac{15}{2} \leqq a < 9$

が成り立つ。しかし今、a は正の整数より、この範囲内の正の整数は

$a=8$ //

のみである。

34

(1) $x^2-6x+2=0 \cdots ①$

解の公式より

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{36-8}}{2}$$

$$=\frac{6\pm\sqrt{28}}{2}$$

$$=\frac{6\pm2\sqrt{7}}{2}$$

$$=3\pm\sqrt{7}$$

(2) 2次方程式①の2つの解のうち小さい方をαとするので、

$\alpha=3-\sqrt{7}$である。すると

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$$

$$=\frac{1}{3-\sqrt{7}}\times\frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}$$

$$=\frac{3+\sqrt{7}}{3^2-(\sqrt{7})^2}$$

$$=\frac{3+\sqrt{7}}{9-7}$$

$$=\frac{3+\sqrt{7}}{2}$$

となる。ここで、$\sqrt{7}$は

$$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$$

つまり

$$2<\sqrt{7}<3$$

より、すべてに3を加えて

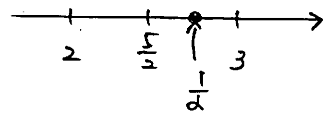
$$5<3+\sqrt{7}<6$$

そして、すべてを2で割って

$$\frac{5}{2}<\frac{3+\sqrt{7}}{2}<\frac{6}{2}$$

つまり $\frac{5}{2}<\frac{1}{\alpha}<3$

が成り立つ。よって$\frac{1}{\alpha}$は$\frac{5}{2}$と3の間の数より、数直線で表すと



となる。ここで、$n<\frac{1}{\alpha}<n+1$を満たす整数nとは、

「$\frac{1}{\alpha}$が連続する2つの整数の間に存在する時のその整数」

のことであり、数直線から、今$\frac{1}{\alpha}$は2と3の間に存在することがわかるので、

$$2<\frac{1}{\alpha}<2+1$$

が成り立つ。つまり求めるnは

$$n=2$$

である。

(3) 1次不等式

$$4x-3k+5>0$$

を満たす最小の整数が(2)のnである。ここで(2)から$n=2$である。

この1次不等式を変形すると

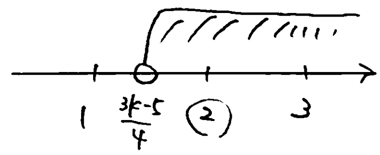
$$4x>3k-5$$

両辺4で割って

$$x>\frac{3k-5}{4}$$

である。この範囲に含まれる最小の整数が2であればよいので

数直線から

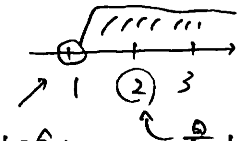


$\therefore$

$$1\leqq\frac{3k-5}{4}<2 \cdots (*)$$

が成り立てばよい。

($1=\frac{3k-5}{4}$の時



$x=1$は含まない　最小値)

よって(*)のすべてに4をかけて

$$4\leqq3k-5<8$$

すべてに5を加えて

$$9\leqq3k<13$$

すべてを3で割って
(不等号の向きは変わらない)

$$3\leqq k<\frac{13}{3}$$

であればよい。

35 (1)

$3(ax+1) < 2ax + a$ …①

$a=2$ のとき

$3(2x+1) < 2\cdot 2x+2$

$3(2x+1) < 4x+2$

$6x+3 < 4x+2$

$2x < -1$

$\therefore\ x < -\frac{1}{2}$

(2)

$x^2+4bx-4b+3=0$ …②

2次方程式②が重解を持つので判別式 $D=0$ である。

$D = (4b)^2-4\cdot 1\cdot(-4b+3)$

$= 16b^2-4(-4b+3)$

$= 4\{4b^2-(-4b+3)\}$

$= 4(4b^2+4b-3)$

より

$4b^2+4b-3=0$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 3 & \rightarrow & 6 \\ & \times & & & \\ 2 & & -1 & \rightarrow & -2 \\ \hline & & & & 4 \end{array}$$

$\therefore$

$(2b+3)(2b-1)=0$

$\therefore\ b=-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}$

ここで $b>0$ より $b=-\frac{3}{2}$ は不適

$\therefore\ b=\frac{1}{2}$

また、この時の重解は、$b=\frac{1}{2}$ を代入して

$x^2+4\cdot\frac{1}{2}x-4\cdot\frac{1}{2}+3=0$

$x^2+2x+1=0$

$(x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$

よって重解 α は

$\alpha=-1$

(3) (2)より $\alpha=-1$ である。

よって $x=-1$ が2つの不等式

$$\begin{cases} 3(ax+1) < 2ax+a & \cdots ① \\ |x+2a| < \sqrt{5} & \cdots ③ \end{cases}$$

を同時に満たす

a の値の範囲を求める。

$x=-1$ が不等式を満たすとは、代入した式が成り立つということなので①に代入して

$3\{a(-1)+1\} < 2a(-1)+a$

$3(-a+1) < -2a+a$

$-3a+3 < -a$

$-2a < -3$

$\therefore\ a > \frac{3}{2}$ …①'

また、③に代入して

$|-1+2a| < \sqrt{5}$

$|2a-1| < \sqrt{5}$

$\therefore$

$-\sqrt{5} < 2a-1 < \sqrt{5}$

すべてに1を加えて

$1-\sqrt{5} < 2a < 1+\sqrt{5}$

すべてを2で割って

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ …③'

よって①'と③'の共通範囲を求める。③'において、$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ は負の数であるから、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ と $\frac{3}{2}$ が、どちらが大きいか差をとって考える。

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{3}{2} = \frac{1+\sqrt{5}-3}{2}$

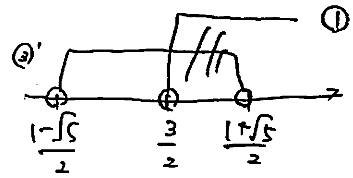
$= \frac{\sqrt{5}-2}{2} > 0$

($\sqrt{5}$ は2より大きいので)

つまり

$\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{3}{2} > 0$ より $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2}$

である。ゆえに、数直線において



共通部分を求めると

$\frac{3}{2} < a < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(これは $a \neq 0$ を満たす)

3-6

(1). $x^2-2x-2=0$ の2つの解が α, β $(\alpha<\beta)$ である。解の公式を用いると、

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2} \quad \frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$$

よって

$$\alpha=1-\sqrt{3},\ \beta=1+\sqrt{3}$$

また、

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1-2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}{1-3}$$

$$=\frac{4-2\sqrt{3}}{-2}$$

$$=-2+\sqrt{3}$$

(2)

$$\begin{cases}\beta x>\alpha \quad \cdots\text{①}\\ 2\alpha\beta<2x<\alpha+\beta \quad \cdots\text{②}\end{cases}$$

①より、両辺をβで割る。

ここで、βは(1)より正の数であるから

不等号の向きが変わることはない

∴

$$x>\frac{\alpha}{\beta}$$

(1)より $\frac{\alpha}{\beta}=-2+\sqrt{3}$ より $x>-2+\sqrt{3}$ …①

また(1)の結果より

$$\alpha+\beta=(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})$$
$$=2$$

$$\alpha\beta=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})$$
$$=1^2-(\sqrt{3})^2$$
$$=1-3$$
$$=-2$$

よって②は

$$2(-2)<2x<2$$

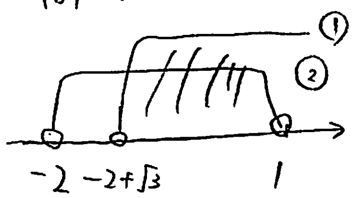
∴

$$-4<2x<2$$

すべて2で割って

$$-2<x<1 \cdots\text{②}$$

よって①と②の共通範囲を求める。$-2+\sqrt{3}$は、$\sqrt{3}$が1.7程度なので$-2+\sqrt{3}$は-1と0の間の数となる。



∴数直線より

$$-2+\sqrt{3}<x<1$$

(3)

(1)よりβは正の数である。

よって

$$|\beta|=\beta=1+\sqrt{3}$$

また、αは負の数である

よって

$$|\alpha|=-\alpha$$
$$=-(1-\sqrt{3})$$
$$=-1+\sqrt{3}$$

である。よって、

$$x=\frac{2m}{|\alpha|+|\beta|}$$

$$=\frac{2m}{(-1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2m}{2\sqrt{3}}=\frac{m}{\sqrt{3}}$$

である。これが(2)の①,②を同時に満たす。つまり(2)で求めた①と②の共通範囲に含まれるので

$$-2+\sqrt{3}<\frac{m}{\sqrt{3}}<1$$

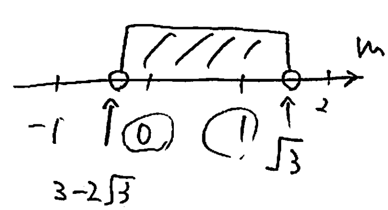
∴ 両辺に$\sqrt{3}$をかけて

$$(-2+\sqrt{3})\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

∴

$$3-2\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$$

ここで、$\sqrt{3}$は1.7程度なので、$3-2\sqrt{3}$は-1と0の間の数である。よって数直線から



以上より、求める整数mは

$$m=0,\ 1$$

37

(1) 2次方程式 $x^2+px+p-3=0$ が $x=1$ を解に持つので

$x=1$ を代入すると

$1^2+p\cdot 1+p-3=0$

$1+p+p-3=0$

$2p=2$

∴ $p=1$

この時、$p=1$ とすると

$x^2+1\cdot x+1-3=0$

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

∴ $x=1,\ -2$

よって、確かに $x=1$ を解に持ち、もう1つの解は $x=-2$

(2)

$$\begin{cases} 3x+4>x+a & \cdots(\mathrm{I}) \\ -x+a>x-3 & \cdots(\mathrm{II}) \end{cases}$$

(I)より

$3x+4>x+a$

$2x>a-4$

∴ $x>\dfrac{a-4}{2}$

(II)より

$-x+a>x-3$

$-2x>-a-3$

∴ $x<\dfrac{a+3}{2}$

ここで $\dfrac{a-4}{2}$ と $\dfrac{a+3}{2}$ の大小を考える。つまり差をとると

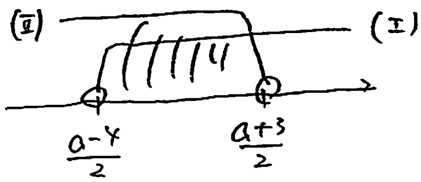
$\dfrac{a-4}{2}-\dfrac{a+3}{2}$

$=\dfrac{a-4-(a+3)}{2}$

$=\dfrac{a-4-a-3}{2}$

$=-\dfrac{7}{2}$

となる。$\dfrac{a-4}{2}$ から $\dfrac{a+3}{2}$ を引いた結果、$-\dfrac{7}{2}$ という負の数となったので、これは「小さい数から大きい数を引いたので差が負になった」と考えて、$\dfrac{a-4}{2}$ よりも $\dfrac{a+3}{2}$ の方が大きいことがわかる。



よって(I)(II)の共通範囲から連立不等式の解は

$\dfrac{a-4}{2}<x<\dfrac{a+3}{2}$

(1) 2次方程式①の2つの解 $x=1,\ -2$ がどちらも(2)の範囲に含まれるので代入する。

① $x=1$ が含まれる時

$\dfrac{a-4}{2}<1<\dfrac{a+3}{2}$

が成り立つ。つまり

$$\begin{cases} \dfrac{a-4}{2}<1 \\ 1<\dfrac{a+3}{2} \end{cases}$$

上式より $a-4<2$ ∴ $a<6$

下式より $2<a+3$ ∴ $-1<a$

共通範囲より

$-1<a<6$ …①

② $x=-2$ が含まれる時

$\dfrac{a-4}{2}<-2<\dfrac{a+3}{2}$

が成り立つ。つまり

$$\begin{cases} \dfrac{a-4}{2}<-2 \\ -2<\dfrac{a+3}{2} \end{cases}$$

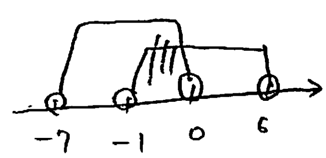
上式より $a-4<-4$ ∴ $a<0$

下式より $-4<a+3$ ∴ $-7<a$

共通範囲より

$-7<a<0$ …②

よって①②のどちらにも含まれる a の値の範囲は



∴ $-1<a<0$

38 $a=\dfrac{1}{2-\sqrt2}$, $b=\dfrac{1}{2+\sqrt2}$

(1)

$$a+b=\frac{1}{2-\sqrt2}+\frac{1}{2+\sqrt2}$$
$$=\frac{2+\sqrt2+2-\sqrt2}{(2-\sqrt2)(2+\sqrt2)}$$
$$=\frac{4}{2^2-(\sqrt2)^2}$$
$$=\frac{4}{4-2}=2$$

$$ab=\frac{1}{2-\sqrt2}\cdot\frac{1}{2+\sqrt2}$$
$$=\frac{1}{2^2-(\sqrt2)^2}=\frac{1}{4-2}=\frac{1}{2}$$

(2)

$$\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}=\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}\times\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}$$
$$=\frac{(\sqrt a+\sqrt b)^2}{(\sqrt a-\sqrt b)(\sqrt a+\sqrt b)}$$
$$=\frac{(\sqrt a)^2+2\sqrt a\sqrt b+(\sqrt b)^2}{(\sqrt a)^2-(\sqrt b)^2}$$
$$=\frac{a+2\sqrt{ab}+b}{a-b}$$
$$=\frac{(a+b)+2\sqrt{ab}}{a-b}\cdots(*)$$

ここで、

$$a-b=\frac{1}{2-\sqrt2}-\frac{1}{2+\sqrt2}$$
$$=\frac{(2+\sqrt2)-(2-\sqrt2)}{(2-\sqrt2)(2+\sqrt2)}$$
$$=\frac{2+\sqrt2-2+\sqrt2}{2^2-(\sqrt2)^2}$$
$$=\frac{2\sqrt2}{2}$$
$$=\sqrt2$$

よって(*)に、(1)の結果と$a-b=\sqrt2$を代入して

$$\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}=\frac{2+2\sqrt{\frac12}}{\sqrt2}$$
$$=\frac{2+\frac{2}{\sqrt2}}{\sqrt2}$$
$$=\frac{2+\frac{2}{\sqrt2}}{\sqrt2}\times\frac{\sqrt2}{\sqrt2}$$
$$=\frac{2\sqrt2+2}{2}$$
$$=\sqrt2+1$$

(3)

$$n\leqq\frac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}+\frac{\sqrt a-\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}k\cdots(**)$$

(2)より $\dfrac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}=\sqrt2+1\cdots(☆)$

また、$\dfrac{\sqrt a-\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}$は、$\dfrac{\sqrt a+\sqrt b}{\sqrt a-\sqrt b}$の分子と分母をひっくり返したものなので、(☆)の両辺の分子と分母をひっくり返すと

$$\frac{\sqrt a-\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}=\frac{1}{\sqrt2+1}$$

よって

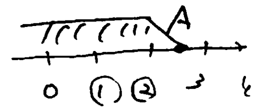
$$\frac{\sqrt a-\sqrt b}{\sqrt a+\sqrt b}=\frac{1}{\sqrt2+1}\times\frac{\sqrt2-1}{\sqrt2-1}$$
$$=\frac{\sqrt2-1}{(\sqrt2)^2-1^2}$$
$$=\sqrt2-1$$

となる。ゆえに(**)式は

$$n\leqq(\sqrt2+1)+(\sqrt2-1)k$$

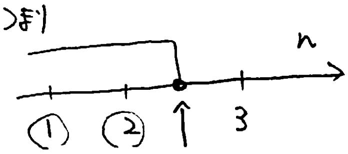
となる。この式を満たす自然数nが2個であればよい。つまり、$n=1$と2のみ該当すればよい。

(自然数は1, 2, 3, 4, ….
よって、$n\leqq A$となる自然数nが2個ならば、



となる。)

つまり



$(\sqrt2+1)+(\sqrt2-1)k$

$$2\leqq(\sqrt2+1)+(\sqrt2-1)k<3$$

であればよく、すべてから$\sqrt2+1$を引くと

$$1-\sqrt2\leqq(\sqrt2-1)k<2-\sqrt2$$

ここで、$\sqrt2-1$は正の数より両辺を$\sqrt2-1$で割っても、不等号の向きは変わらない。

$$\therefore\ \frac{1-\sqrt2}{\sqrt2-1}\leqq k<\frac{2-\sqrt2}{\sqrt2-1}\cdots(☆☆)$$

そこで

$$\frac{1-\sqrt2}{\sqrt2-1}=\frac{-(\cancel{\sqrt2-1})}{\cancel{\sqrt2-1}}=-1$$

$$\frac{2-\sqrt2}{\sqrt2-1}\times\frac{\sqrt2+1}{\sqrt2+1}=\frac{2\sqrt2+2-2-\sqrt2}{2-1}=\sqrt2$$

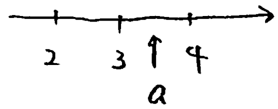
より、(☆☆)は

$$-1\leqq k<\sqrt2$$

となる。

39

(1) aの整数部分が3である。



よって $3 \leqq a < 4$

この時、$\frac{a+\sqrt{5}}{5}$ について

$3 \leqq a < 4$ のすべてに $\sqrt{5}$ を加えて

$$3+\sqrt{5} \leqq a+\sqrt{5} < 4+\sqrt{5}$$

すべてを5で割って

$$\frac{3+\sqrt{5}}{5} \leqq \frac{a+\sqrt{5}}{5} < \frac{4+\sqrt{5}}{5}$$

この関係を数直線で表すが、$\sqrt{5}$ は $2<\sqrt{5}<3$ であるので、

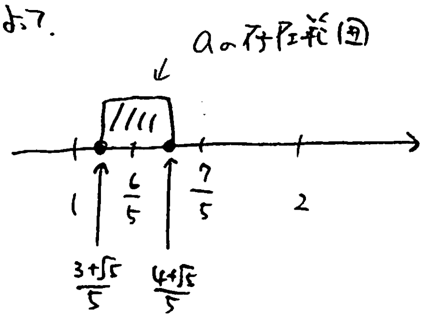
$\frac{3+\sqrt{5}}{5}$ については、$\frac{3+2}{5} < \frac{3+\sqrt{5}}{5} < \frac{3+3}{5}$

∴ $1 < \frac{3+\sqrt{5}}{5} < \frac{6}{5}$

$\frac{4+\sqrt{5}}{5}$ については、$\frac{4+2}{5} < \frac{4+\sqrt{5}}{5} < \frac{4+3}{5}$

∴ $\frac{6}{5} < \frac{4+\sqrt{5}}{5} < \frac{7}{5}$

よって、



となる。ゆえに $\frac{a+\sqrt{5}}{5}$ は1と2の間の数なので、整数部分は1

(2) xの小数第1位を四捨五入すると3

つまり、2.5以上3.5未満より

$$2.5 \leqq x < 3.5$$

つまり

$$\frac{5}{2} \leqq x < \frac{7}{2}$$

同様にyも小数第1位を四捨五入すると2より

1.5以上2.5未満である。

よって $1.5 \leqq y < 2.5$

∴ $\frac{3}{2} \leqq y < \frac{5}{2}$

両辺2倍して、

$$3 \leqq 2y < 5 \cdots (\mathrm{I})$$

そして $\frac{5}{2} \leqq x < \frac{7}{2} \cdots (\mathrm{II})$

より (I)と(II)の両辺を加えて

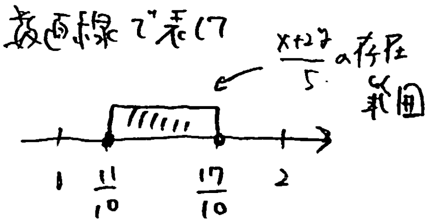
$$\frac{5}{2}+3 \leqq x+2y < \frac{7}{2}+5$$

∴ $\frac{11}{2} \leqq x+2y < \frac{17}{2}$

すべて5で割って

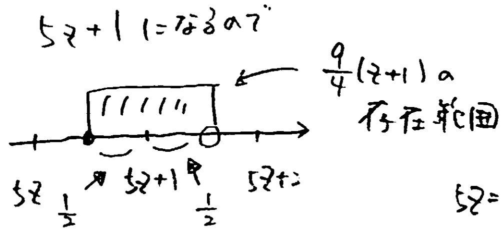
$$\frac{11}{10} \leqq \frac{x+2y}{5} < \frac{17}{10}$$

数直線で表して



となるので、$\frac{x+2y}{5}$ は1と2の間の数となるので、整数部分は 1

(3) $\frac{9}{4}(z+1)$ の小数第1位を四捨五入すると $5z+1$ になるので



$(5z+1)-0.5$ 以上
$(5z+1)+0.5$ 未満 の数である。

つまり

$$(5z+1)-\frac{1}{2} \leqq \frac{9}{4}(z+1) < (5z+1)+\frac{1}{2}$$

が成り立つ。つまり

$$5z+\frac{1}{2} \leqq \frac{9}{4}(z+1) < 5z+\frac{3}{2}$$

が成り立つので、連立不等式

$$\begin{cases} 5z+\frac{1}{2} \leqq \frac{9}{4}(z+1) \cdots ① \\ \frac{9}{4}(z+1) < 5z+\frac{3}{2} \cdots ② \end{cases}$$

を解く。

①より

$5z+\frac{1}{2} \leqq \frac{9}{4}(z+1)$) 4倍

$20z+2 \leqq 9(z+1)$

$20z+2 \leqq 9z+9$

$11z \leqq 7$ ∴ $z \leqq \frac{7}{11}$

②より

$\frac{9}{4}(z+1) < 5z+\frac{3}{2}$) 4倍

$9(z+1) < 20z+6$

$9z+9 < 20z+6$

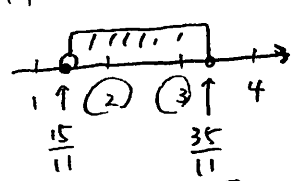
$-11z < -3$ ∴ $z > \frac{3}{11}$

よって①と②の共通範囲より

$$\frac{3}{11} < z \leqq \frac{7}{11}$$

である。ここで、5zは整数より 5倍すると

$$\frac{15}{11} < 5z \leqq \frac{35}{11}$$



この範囲内の整数は 2と3のみ

∴ $5z = 2, 3$ より $z = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$

40

(1) $\frac{8x-10}{3}-\frac{7x-15}{2}\leqq 5$

両辺を6倍する

$2(8x-10)-3(7x-15)\leqq 30$

$16x-20-21x+45\leqq 30$

$-5x\leqq 5$

∴両辺を(-5)で割って

$x\geqq -1$

(2) 不等式②は連立方程式

$$\begin{cases} -3a+3\leqq 3x-6 & \cdots ②' \\ 3x-6\leqq -2a+2 & \cdots ②'' \end{cases}$$

を解くことに等しい。

②'式は

$-3a+3\leqq 3x-6$

$-3x\leqq 3a-9$

両辺を-3で割って

(不等号の向きに注意して)

$x\geqq -a+3 \cdots ②'$

②"式は

$3x-6\leqq -2a+2$

$3x\leqq -2a+8$

両辺3で割って

$x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3} \cdots ②''$

ここで②'と②"について

$-a+3$ と $-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

の大小を比べるため、

2つの数の差をとる

∴

$(-a+3)-(-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3})$

$=-a+3+\frac{2}{3}a-\frac{8}{3}$

$=-\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}$

$=-\frac{1}{3}(a-1) \cdots (*)$

ここでaは$a>1$という

条件を満たすので

$a-1$は正の数になる。

よって$-\frac{1}{3}(a-1)$は負の数である。

つまり

$(-a+3)-(-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3})$

の結果が負の数であるから

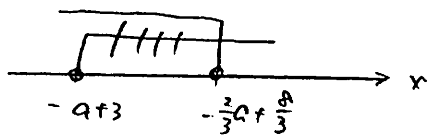
$(-a+3)-(-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3})<0$

∴

$-a+3<-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

よって $-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$の方が$-a+3$よりも大きい。

ゆえに②'と②"の共通範囲は



∴

$-a+3\leqq x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

〈(2)の別解〉

$-3a+3\leqq 3x-6\leqq -2a+2$

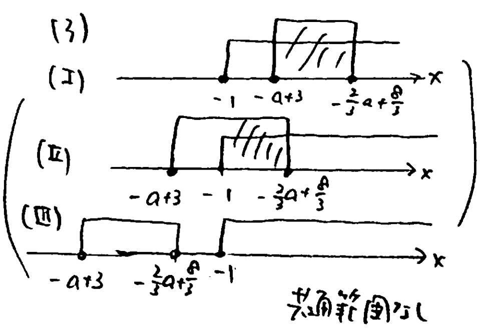
すべてに6を加えて

$-3a+9\leqq 3x\leqq -2a+8$

すべてを3で割る。不等号の向きは変わらない。

∴ $-a+3\leqq x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

(3)



①と②を同時に満たすxが存在するのは、数直線より

「$-\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$が$-1$よりも右にあればよい」

つまり

$-1\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

が成り立てばよい。このaの不等式を解くと

$-1\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

$\frac{2}{3}a\leqq \frac{8}{3}+1$

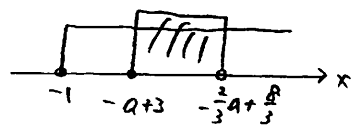
∴ $\frac{2}{3}a\leqq \frac{11}{3}$　∴ $a\leqq \frac{11}{2}$

ここで今 $a>1$ より　$1<a\leqq \frac{11}{2}$

また数直線(I)(II)より

-1と$-a+3$の大小により共通範囲が変わってくる。

(I)



$-1\leqq -a+3$ の時。

解くと、$a\leqq 4$ であり

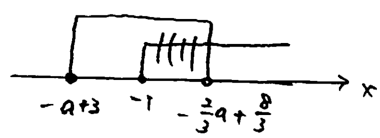
今、$1<a\leqq \frac{11}{2}$ であるから

$1<a\leqq 4$ の時。

上の数直線の図より、①と②の共通範囲は

$-a+3\leqq x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

(II)



$-a+3<-1$ の時

解くと、$-a<-4$　∴ $a>4$

今、$1<a\leqq \frac{11}{2}$ より　$4<a\leqq \frac{11}{2}$ の時

上の数直線の図より①と②の共通範囲は

$-1\leqq x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3}$

以上(I)(II)より①、②を同時に満たすxの範囲は

$$\begin{cases} 1<a\leqq 4 \text{ の時} & -a+3\leqq x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3} \\ 4<a\leqq \frac{11}{2} \text{ の時} & -1\leqq x\leqq -\frac{2}{3}a+\frac{8}{3} \end{cases}$$

41

(1) $3x^2+(2-3k)x-2k=0$ …①

2次方程式①の判別式をDとする

$D=(2-3k)^2-4\cdot3\cdot(-2k)$

$=(4-12k+9k^2)+24k$

$=9k^2+12k+4$

重解を持つので $D=0$ である。

よって

$9k^2+12k+4=0$

$(3k+2)^2=0$

∴ $3k+2=0$ より $k=-\frac{2}{3}$

また、2次方程式①に解の公式を用いると

$$x=\frac{-(2-3k)\pm\sqrt{D}}{2\cdot3}=\frac{3k-2\pm\sqrt{D}}{6}$$

今、$D=0$ より

$$x=\frac{3k-2}{6}$$

であり、これが重解である。$k=-\frac{2}{3}$ を代入して

$x=\frac{1}{6}\{3(-\frac{2}{3})-2\}$

$=\frac{1}{6}(-2-2)=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

(2) $3x^2+(2-3k)x-2k=0$

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 2 & \to 2 \\ 1 & -k & \to -3k \\ \hline 3 & -2k & 2-3k \end{array}\right)$$

∴ $(3x+2)(x-k)=0$

∴ $x=-\frac{2}{3},\ k$

ここで、αとβの差を考えるが、

今、$\alpha\leqq\beta$ より $\beta-\alpha$ を計算する。

しかし、2次方程式①の解は

$x=-\frac{2}{3}$ と $x=k$ より

kが $-\frac{2}{3}$ より大きいか小さいかで、$\beta-\alpha$ の結果が変わってくる。

(I) $k\geqq-\frac{2}{3}$ の時

kの方が $-\frac{2}{3}$ より大きいので

$\alpha=-\frac{2}{3},\ \beta=k$

であるから

$\beta-\alpha=k-(-\frac{2}{3})$

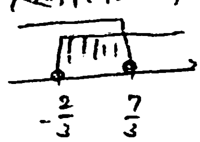
$=k+\frac{2}{3}$

である。これが今、3以下より

$k+\frac{2}{3}\leqq3$

∴ $k\leqq\frac{7}{3}$

共通範囲より



$-\frac{2}{3}\leqq k\leqq\frac{7}{3}$ (I)

(II) $k<-\frac{2}{3}$ の時

$-\frac{2}{3}$ の方がkより大きいので

$\alpha=k,\ \beta=-\frac{2}{3}$

であるから

$\beta-\alpha=-\frac{2}{3}-k$

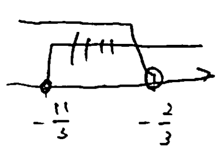
これが今3以下より

$-\frac{2}{3}-k\leqq3$

$-k\leqq\frac{11}{3}$

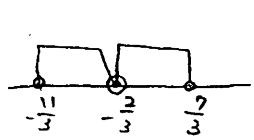
∴ $k\geqq-\frac{11}{3}$

共通範囲より



$-\frac{11}{3}\leqq k<-\frac{2}{3}$ (II)

以上、(I)と(II)より 2つの範囲をくっつけて



$-\frac{11}{3}\leqq k\leqq\frac{7}{3}$

<(2)の別解>

αとβの差が3以下であり

αとβは $-\frac{2}{3}$ かkのどちらかなので

場合分けを無視して、絶対値を考えればよい。

∴ $|k-(-\frac{2}{3})|\leqq3$

$|k+\frac{2}{3}|\leqq3$

∴ $-3\leqq k+\frac{2}{3}\leqq3$

すべてから $\frac{2}{3}$ を引いて

$-3-\frac{2}{3}\leqq k\leqq3-\frac{2}{3}$

∴ $-\frac{11}{3}\leqq k\leqq\frac{7}{3}$

(3) kは自然数より正の数である。

つまり(2)の(I)の場合である。

よって、$\alpha=-\frac{2}{3},\ \beta=k$ である。ここで

$9\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2$

$=(3\alpha-\beta)^2$

$=\{3(-\frac{2}{3})-k\}^2$

$=(-2-k)^2$

$=\{(-1)(k+2)\}^2=(k+2)^2$

より、$(k+2)^2$ は整数の2乗である
(平方数という)

$(k+2)^2$ の整数部分が2桁より

整数の2乗で2桁なものは、

16, 25, 36, 49, 64, 81 の5個

∴

$(k+2)^2=16,25,36,49,64,81$

∴

$k+2=\pm4,\pm5,\pm6,\pm7,\pm8,\pm9$

ゆえに

$k=-6,-7,-8,-9,-10,-11$
$2,3,4,5,6,7$

であるが、kは自然数であるので、

上記のうち、自然数は

$k=2,3,4,5,6,7$

6個

42

(1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > \frac{1}{3}x$

両辺に12をかけて

$6x - 3 > 4x$

$2x > 3$

$\therefore x > \frac{3}{2}$

(2)

$2(a-3)x < a^2 - 9$

$2(a-3)x < (a+3)(a-3) \cdots (*)$

両辺を $a-3$ で割るが、

a が3より大きいか、小さいかで、$a-3$ の正負が変わってくるので、場合分け

・$a>3$ の時

$a-3$ は正の数になるので、(*)の両辺を $a-3$ で割っても不等号の向きは変わらない。

$\therefore$

$2x < a+3$

$\therefore x < \frac{a+3}{2}$

・$a<3$ の時

$a-3$ は負の数になるので $a-3$ で(*)の両辺を割ると不等号の向きは変わる

$\therefore 2x > a+3$

$\therefore x > \frac{a+3}{2}$

以上より②の解は

$$\begin{cases} a>3\text{の時} & x < \frac{a+3}{2} \\ a<3\text{の時} & x > \frac{a+3}{2} \end{cases}$$

(3) $a>0$ であるので、

(2)の結果から

$0<a<3$ と $a>3$

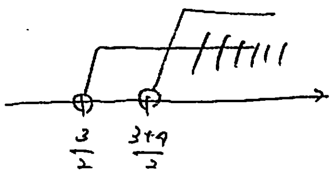
で不等式②の解が変わってくる。

・$0<a<3$ の時

①の解は $x > \frac{3}{2}$

②の解は $x > \frac{a+3}{2}$

しかし、2つの解の共通範囲には、無数の整数が含まれてしまうので、この場合は不適である。



・$a>3$ の時

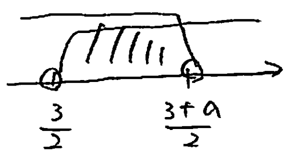
①の解は $x > \frac{3}{2}$

②の解は $x < \frac{3+a}{2}$

よって、連立不等式の解は

$\frac{3}{2} < x < \frac{3+a}{2}$

となる。

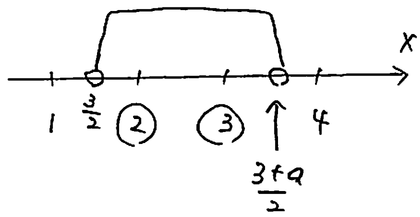


この範囲内に整数が2個だけ含まれればよい。

それは、x が $\frac{3}{2}$ よりも大きいので、

$x = 2, 3$

が該当すればよい。



よって

$3 < \frac{3+a}{2} \leqq 4$

が成り立てばよい。

すべてに2をかけて

$6 < 3 + a \leqq 8$

すべてから3を引いて

$3 < a \leqq 5$

となる。この中に含まれる数はすべて $a>3$ を満たす。

以上より

$3 < a \leqq 5$

$\boxed{43}$

(1) $\frac{3x-2}{2} \geqq -4$

両辺2倍して

$3x-2 \geqq -8$

$3x \geqq -6$

∴両辺3で割って

$x \geqq -2$ //

(2) 不等式②を解く。

・$x-1 \geqq 0$ ∴ $x \geqq 1$ の時

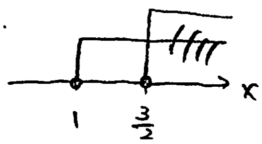
$x-1$は0以上より

$|x-1| = x-1$ (中身そのまま)

よって不等式②は

$x-1 \geqq \frac{1}{2}$ ∴ $x \geqq \frac{3}{2}$

今 $x \geqq 1$ で考えていたので、共通範囲から。



∴ $x \geqq \frac{3}{2}$ (I)

・$x-1<0$ ∴ $x<1$ の時

$x-1$は負より

$|x-1| = -(x-1)$

$= -x+1$ (中身を(-1)倍してはずす)

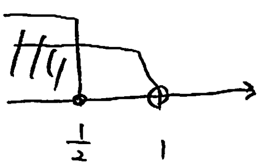
よって不等式②は

$-x+1 \geqq \frac{1}{2}$

$-x \geqq -\frac{1}{2}$ ∴ $x \leqq \frac{1}{2}$

今、$x<1$ で考えていたので、

共通範囲から。



∴ $x \leqq \frac{1}{2}$ (II)

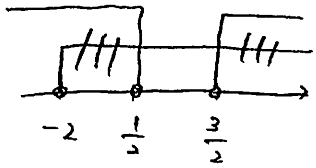
よって不等式②の解は

(I)(II)より

$x \leqq \frac{1}{2}, \ x \geqq \frac{3}{2}$

また、(1)より、①の解は

$x \geqq -2$ より、共通範囲から



∴ $-2 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \ x \geqq \frac{3}{2}$ //

(3) $x^2-(2a+2)x+a(a+2)=0$ …③

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & \times & -(a+2) & \to & -a-2 \\ 1 & & -a & \to & -a \\ \hline & & a(a+2) & & -2a-2 \end{array}\right)$$

よって③は

$(x-a)\{x-(a+2)\}=0$

∴ $x=a, \ a+2$ //

また、(2)の範囲は

$-2 \leqq x \leqq \frac{1}{2}, \ x \geqq \frac{3}{2}$

$x=a$ が含まれる時

$-2 \leqq a \leqq \frac{1}{2}, \ a \geqq \frac{3}{2}$ …(i)

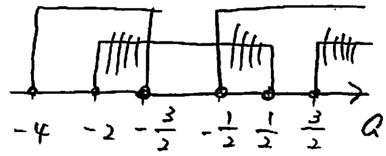
$x=a+2$ が含まれる時

$-2 \leqq a+2 \leqq \frac{1}{2}, \ a+2 \geqq \frac{3}{2}$

すべてから2を引いて

$-4 \leqq a \leqq -\frac{3}{2}, \ a \geqq -\frac{1}{2}$ …(ii)

(i)(ii)より、数直線から



ゆえに、共通範囲は

$-2 \leqq a \leqq -\frac{3}{2}$

$-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$

$a \geqq \frac{3}{2}$

//

44

(1) $\frac{9-x}{3} > x+1$

両辺を3倍して

$9-x > 3(x+1)$

$9-x > 3x+3$

$-4x > -6$

両辺を(−4)で割る

不等号の向きに注意して

$x < \frac{3}{2}$

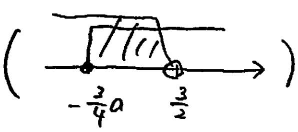
(2) $3(x+2a) \geqq -x+3a$

$3x+6a \geqq -x+3a$

$4x \geqq -3a$

$\therefore x \geqq -\frac{3}{4}a$

よって、不等号の向きから考えて、$x<\frac{3}{2}$ と $x \geqq -\frac{3}{4}a$ が共通範囲を持つには



$-\frac{3}{4}a$ が $\frac{3}{2}$ よりも小さければよい。

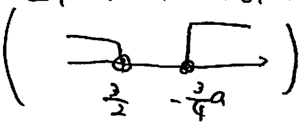
つまり、

$-\frac{3}{4}a < \frac{3}{2}$

であればよく、

$a > -2$

逆だと、共通範囲をもたない。



(3) (2)より、$a>-2$の時

不等式①と②を同時に満たすxが存在し

それは、$-\frac{3}{4}a \leqq x < \frac{3}{2}$

である。不等式③を解くと、

$x-a < \frac{x}{3} < x+2$

より、連立不等式

$$\begin{cases} x-a < \frac{x}{3} \\ \frac{x}{3} < x+2 \end{cases}$$

を考えると、上式より

$x-a < \frac{x}{3}$

$x-\frac{x}{3} < a$

$\frac{2}{3}x < a$

$\therefore x < \frac{3}{2}a$

下式より

$\frac{x}{3} < x+2$

$\frac{x}{3} - x < 2$

$-\frac{2}{3}x < 2$

$\therefore x > -3$

そして、$x<\frac{3}{2}a$ と $x>-3$ の共通範囲を考えるが、

今、$a>-2$ であるから、

両辺を$\frac{3}{2}$倍すると、

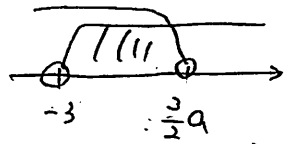
$\frac{3}{2}a > \frac{3}{2}\cdot(-2)$

$\therefore \frac{3}{2}a > -3$

となるので、

$\frac{3}{2}a$ の方が -3 よりも大きい。よって

$x<\frac{3}{2}a$ と $x>-3$ の共通範囲は



$\therefore -3 < x < \frac{3}{2}a$

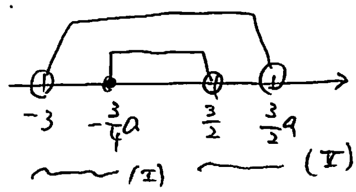
ゆえに、

$-\frac{3}{4}a \leqq x < \frac{3}{2}$ に含まれるxが

すべて $-3 < x < \frac{3}{2}a$ に含まれればよい。つまり、

$-\frac{3}{4}a \leqq x < \frac{3}{2}$ という範囲が

$-3 < x < \frac{3}{2}a$ に包まれていればよく、



(I) $-3 < -\frac{3}{4}a$ かつ (II) $\frac{3}{2} \leqq \frac{3}{2}a$

であればよい。

(I)より $4 > a$.

(II)より $1 \leqq a$

であるから、(I)(II)の共通範囲より

$1 \leqq a < 4$

注 (II)で等号が入るのは、

($\frac{3}{2}$も$\frac{3}{2}a$も両方白丸なので、$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}a$となっても構わないから。)

45

(1) $\frac{x+2}{2} > \frac{-2x-4}{3}$ (両辺に6をかける)

$3(x+2) > 2(-2x-4)$

$3x+6 > -4x-8$

$7x > -14$

$\therefore x > -2$

(2) $x^2+a > (x-2a)^2$

$x^2+a > x^2-4ax+4a^2$

$a > -4ax+4a^2$

$4ax > 4a^2-a$

ここで、両辺を$4a$で割るが、aは条件より $a<0$ であるから、$4a$も負の数である。ゆえに不等号の向きは変わってくる

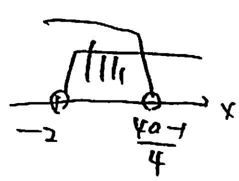
$\therefore x < \frac{4a^2-a}{4a}$

$x < \frac{a(4a-1)}{4a}$

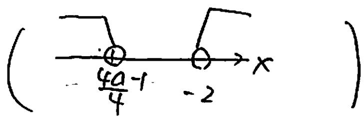
aで約分して

$x < \frac{4a-1}{4}$

また、$x>-2$ と $x<\frac{4a-1}{4}$ の共通部分が存在するには



となればよいので、-2より $\frac{4a-1}{4}$ の方が大きければよい。



逆だと共通範囲はない

ゆえに

$-2 < \frac{4a-1}{4}$

ならばよく、

$-8 < 4a-1$

$-4a < 8-1$

$-4a < 7$

$\therefore a > -\frac{7}{4}$

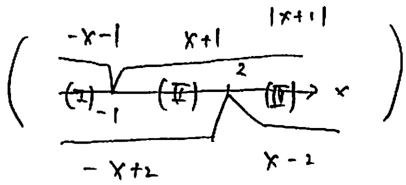
ここで $a<0$ より

$-\frac{7}{4} < a < 0$

ならばよい。

(3)

$|x+1|+|x-2| = 4 \cdots (*)$



(I) $x<-1$ の時

$|x+1| = -(x+1) = -x-1$

$|x-2| = -(x-2) = -x+2$

より (*)は

$(-x-1)+(-x+2) = 4$

$-2x+1 = 4$

$\therefore x = -\frac{3}{2}$

これは $x<-\frac{3}{2}$ を満たす。

(II) $-1 \leqq x < 2$ の時

$|x+1| = x+1$

$|x-2| = -(x-2) = -x+2$

(*)に代入して

$(x+1)+(-x+2) = 4$

$3 = 4$

これは成り立たない。

(III) $x \geqq 2$ の時

$|x+1| = x+1$, $|x-2| = x-2$

(*)に代入して

$(x+1)+(x-2) = 4$

$2x-1 = 4$ $\therefore x = \frac{5}{2}$

これは $x \geqq 2$ を満たす。

よって方程式(*)の解は $x = -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$

ここで(2)より、①②を同時に満たすxが存在するのは、$-\frac{7}{4}<a<0$ であり、このときのxの範囲は

$-2 < x < \frac{4a-1}{4} \cdots$(☆)

である。

(I) $x=-\frac{3}{2}$ が満たす時、(☆)に代入

$-2 < -\frac{3}{2} < \frac{4a-1}{4}$

より、$-\frac{3}{2} < \frac{4a-1}{4}$

であればよい。

$-6 < 4a-1$

$4a > -5$ $\therefore a > -\frac{5}{4}$

しかし今、$-\frac{7}{4}<a<0$ より

共通範囲から、$-\frac{5}{4}<a<0$

(II) $x=\frac{5}{2}$ が満たす時、(☆)に代入

$-2 < \frac{5}{2} < \frac{4a-1}{4}$

より $\frac{5}{2} < \frac{4a-1}{4}$

であればよい。$10 < 4a-1$ $\therefore a > \frac{11}{4}$

しかし、$-\frac{7}{4}<a<0$ と共通範囲はない。

以上より ③の解のうち、ただ1つ $x=-\frac{3}{2}$ が①②を満たすのは $-\frac{5}{4}<a<0$

46 $x^2-2(a-1)x+a^2-10=0 \cdots ①$

(1) 実数の解を持つので、判別式$D \geqq 0$である。

$D=\{-2(a-1)\}^2-4\cdot1\cdot(a^2-10)$

$=4(a-1)^2-4(a^2-10)$

$=4\{(a-1)^2-(a^2-10)\}$

$=4\{(a^2-2a+1)-(a^2-10)\}$

$=4(a^2-2a+1-a^2+10)$

$=4(-2a+11)$

$\therefore$

$4(-2a+11)\geqq 0$

$-2a+11\geqq 0$

$-2a \geqq -11$

$\therefore a \leqq \frac{11}{2}$

(2) $2(b-2)x > b^2-4$

$2(b-2)x > (b-2)(b+2) \cdots (*)$

ここで$(*)$式の両辺を$b-2$で割るが、bが2より大きいか小さいかで、$b-2$の正負が変わるので、場合分けをする。

・$b>2$の時。
この時、$b-2>0$であるから、$(*)$の両辺を$b-2$で割っても不等号の向きは変わらない。

よって、

$2x > b+2$

$\therefore x > \frac{b+2}{2}$

となる。

・$b<2$の時。
この時、$b-2<0$であるから、$(*)$の両辺を$b-2$で割ると、不等号の向きは反対向きになる。

よって

$2x < b+2$

$\therefore x < \frac{b+2}{2}$

以上より、不等式②の解は

$\begin{cases} x > \frac{b+2}{2} & (b>2\text{の時}) \\ x < \frac{b+2}{2} & (b<2\text{の時}) \end{cases}$

(3) 方程式①に解の公式を用いると、

$x=\frac{2(a-1)\pm\sqrt{D}}{2\cdot1}$

$=\frac{2(a-1)\pm\sqrt{4(-2a+11)}}{2}$

$=\frac{2(a-1)\pm2\sqrt{-2a+11}}{2}$

$=a-1\pm\sqrt{-2a+11}$

となる。ここでDは判別式である。方程式①が2つの整数の解を持つので、$a-1\pm\sqrt{-2a+11}$が整数になる時を考える。それは、「$-2a+11$が1や4や9など、自然数の2乗になればよい。」

今、aは2以上の整数であり、また(1)より$a\leqq\frac{11}{2}$なので、

該当するaは

$a=2, 3, 4, 5$のみ。

・$a=2$の時。
$-2a+11=-2\cdot2+11=7$
不適

・$a=3$の時。
$-2a+11=-2\cdot3+11=5$
不適

・$a=4$の時
$-2a+11=-2\cdot4+11=3$
不適

・$a=5$の時
$-2a+11=-2\cdot5+11=1$
より、適するので、$a=5$

この時、①の解は

$x=5-1\pm\sqrt{1}=5, 3$

であり、これらがともに不等式②を満たす。

(I) $x=5$が満たすので、代入して

$2(b-2)\cdot5 > b^2-4$

$10b-20 > b^2-4$

$b^2-10b+16<0$

$(b-2)(b-8)<0$

$\therefore 2<b<8 \cdots$(I)

(II) $x=3$が満たすので代入して

$2(b-2)\cdot3 > b^2-4$

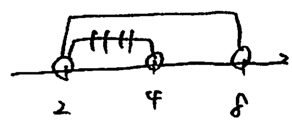
$6b-12 > b^2-4$

$b^2-6b+8<0$

$(b-2)(b-4)<0$

$\therefore 2<b<4 \cdots$(II)

(I)(II)より



$\therefore 2<b<4$

47

(1) $x-3<\frac{1-x}{2}$

両辺2倍して

$2x-6<1-x$

$3x<7$

$\therefore x<\frac{7}{3}$

(2)

$|2x-3|<x-\frac{1}{2}$ …②

・$2x-3\geqq 0$ の時

解いて $2x\geqq 3$ $\therefore x\geqq\frac{3}{2}$ の時

$|2x-3|=2x-3$ より

不等式②に代入して

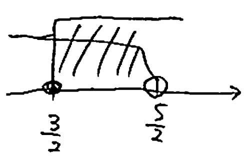
$2x-3<x-\frac{1}{2}$

$x<3-\frac{1}{2}$

$\therefore x<\frac{5}{2}$

しかし今 $x\geqq\frac{3}{2}$ で考えていたので

共通範囲をとって



$\frac{3}{2}\leqq x<\frac{5}{2}$ …(I)

・$2x-3<0$ の時

解いて $2x<3$ $\therefore x<\frac{3}{2}$ の時

$|2x-3|=-(2x-3)$

$=-2x+3$

より 不等式②に代入して

$-2x+3<x-\frac{1}{2}$

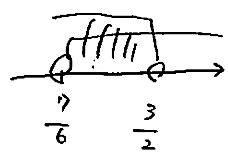
$-3x<-3-\frac{1}{2}$

$-3x<-\frac{7}{2}$

$\therefore x>\frac{7}{6}$

しかし今 $x<\frac{3}{2}$ で考えているので

共通範囲から



$\frac{7}{6}<x<\frac{3}{2}$ …(II)

以上 (I)(II)より

$\frac{3}{2}\leqq x<\frac{5}{2}$, $\frac{7}{6}<x<\frac{3}{2}$

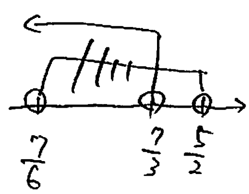
をくっつけて ($x=\frac{3}{2}$ でくっつく)

$\frac{7}{6}<x<\frac{5}{2}$

(3)

(1)(2)をともに満たす x は

$x<\frac{7}{3}$ と $\frac{7}{6}<x<\frac{5}{2}$ の共通範囲で



$\therefore \frac{7}{6}<x<\frac{7}{3}$

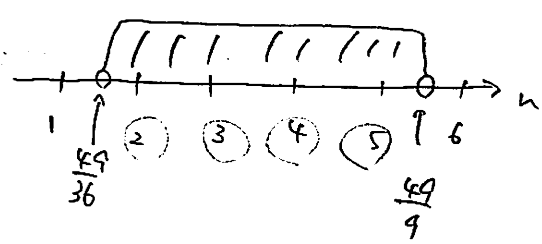
である。

よって $x=\sqrt{n}$ がこの範囲に含まれるので

$\frac{7}{6}<\sqrt{n}<\frac{7}{3}$

$\sqrt{\frac{49}{36}}<\sqrt{n}<\sqrt{\frac{49}{9}}$

よって $\frac{49}{36}<n<\frac{49}{9}$



ゆえに 自然数から $n=2, 3, 4, 5$

48

(1)

$$x^2-2x-3\leqq 0$$

$$(x-3)(x+1)\leqq 0$$

$$-1\leqq x\leqq 3$$

(2)

$a=1$ のとき、②は

$$\frac{x-1}{2}+1\geqq\frac{2x+1}{3}$$

となる。両辺6倍して

$$3(x-1)+6\geqq 2(2x+1)$$

$$3x-3+6\geqq 4x+2$$

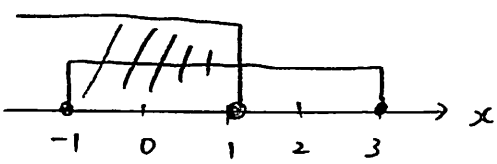
$$3x-4x\geqq 2-3$$

$$-x\geqq -1$$

$\times(-1)$

$$x\leqq 1$$

よって、(1)との共通範囲は



$$-1\leqq x\leqq 1$$

(3)

②を解くと、

$$\frac{x-1}{2}+a\geqq\frac{2x+a}{3}$$

6倍して

$$3(x-1)+6a\geqq 2(2x+a)$$

$$3x-3+6a\geqq 4x+2a$$

$$3x-4x\geqq 2a-6a+3$$

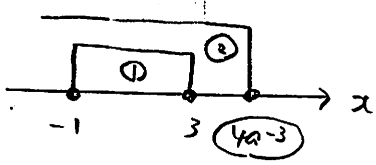
$$-x\geqq -4a+3$$

$\times(-1)$

$$x\leqq 4a-3$$

となる。

したがって ①を満たすすべての実数 x が②を満たすので①の範囲が②の範囲にすっぽり含まれればいい。



よって、図より、$4a-3$ が3よりも右側にあればいい。

①、②どちらの範囲も等号が入った範囲であることを考えると、

$$3\leqq 4a-3$$

であればいい。ゆえに

$$-4a\leqq -3-3$$

$$-4a\leqq -6$$

$$a\geqq\frac{3}{2}$$

(4)

③を解くと

$$x^2-2bx+b^2>0$$

$$(x-b)^2>0$$

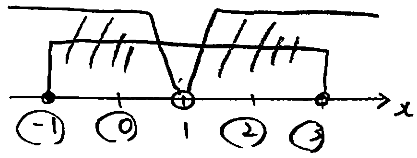
よってこの不等式の解は $x=b$ 以外のすべての実数である。

①を満たす整数 x は

$$x=-1,0,1,2,3$$

の5個であるから、

このうちの1つが③を満たさなければ①、③を同時に満たす整数はちょうど4個となる。



($b=1$ のとき)

したがって、求める b は

$$b=-1,0,1,2,3$$