数学演習(微分方程式)Ｒ１．９．１５　　　　(　)組(　)番　名前(　　　)

$\boxed{1}$ y は x の関数とする。次の微分方程式を解け。ただし，(1) は [ ] 内の初期条件のもとで解け。

(1) $2yy'=1$ [$x=1$ のとき $y=1$]　　(2) $y=xy'+1$

$\boxed{2}$ (1) A，B を任意の定数とする方程式 $y=A\sin x+B\cos x-1$ から A，B を消去して微分方程式を作れ。

(2) y は x の関数とする。次の微分方程式を解け。ただし，(イ) は [ ] 内の初期条件のもとで解け。

(ア) $y'=ay^2$ (a は定数)　　(イ) $xy'+y=y'+1$ [$x=2$ のとき $y=2$]

$\boxed{3}$ y は x の関数とする。

(1) a，b，c は定数とする。$\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ を $ax+by+c=z$ とおき換えることにより，z に関する微分方程式として表せ。

(2) (1) を利用して，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$ を解け。

$\boxed{4}$ y は x の関数とする。(　) 内のおき換えを利用して，次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x-y}{x+y}$ $(x+y=z)$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=(x-y)^2$ $(x-y=z)$

$\boxed{5}$ 第 1 象限にある曲線 C 上の任意の点における接線は常に x 軸，y 軸の正の部分と交わり，その交点をそれぞれ Q，R とすると，接点 P は線分 QR を 2 : 1 に内分するという。この曲線 C が点 (1，1) を通るとき，C の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ 点 (1，1) を通る曲線上の点 P における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ Q，R とし，O を原点とする。この曲線は第 1 象限にあるとして，常に $\triangle\mathrm{ORP}=2\triangle\mathrm{OPQ}$ であるとき，曲線の方程式を求めよ。

$\boxed{7}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x)=\int_0^x \sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$ を満たすとする。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を $f(x)$ で表せ。　(2) 関数 $\log\{f(x)+f'(x)\}$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{8}$ $f(x)$ は実数全体で定義された連続関数であり，すべての実数 x に対して次の関係式を満たすとする。このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_0^x e^t f(x-t)\,dt=f(x)-e^x$$

$\boxed{9}$ 実数全体で微分可能な関数 $f(x)$ が次の条件 (A)，(B) をともに満たす。

(A)：すべての実数 x，y について，$f(x+y)=f(x)f(y)$ が成り立つ。

(B)：すべての実数 x について，$f(x)\fallingdotseq 0$ である。

(1) すべての実数 x について $f(x)>0$ であることを，背理法によって証明せよ。

(2) すべての実数 x について，$f'(x)=f(x)f'(0)$ であることを示せ。

(3) $f'(0)=k$ とするとき，$f(x)$ を k を用いて表せ。

$\boxed{10}$ ラジウムなどの放射性物質は，各瞬間の質量に比例する速度で，質量が減少していく。その比例定数を k $(k>0)$，最初の質量を A として，質量 x を時間 t の関数で表せ。また，ラジウムでは，質量が半減するのに 1600 年かかるという。800 年では初めの量のおよそ何 % になるか。小数点以下を四捨五入せよ。

1 y は x の関数とする。次の微分方程式を解け。ただし，(1) は [ ] 内の初期条件のもとで解け。

(1) $2yy'=1$ [$x=1$ のとき $y=1$]　　　(2) $y=xy'+1$

解答 (1) $y=\sqrt{x}$　(2) $y=Ax+1$（A は任意定数）

解説

(1) $2y\dfrac{dy}{dx}=1$ の両辺を x で積分して　$\displaystyle\int 2y\frac{dy}{dx}dx=\int dx$

左辺に置換積分法の公式を用いて　$\displaystyle\int 2y\,dy=\int dx$

よって　$y^2=x+C$，C は任意定数

$x=1$ のとき $y=1$ であるから　$1=1+C$　ゆえに　$C=0$

したがって　$y^2=x$　よって　$y=\pm\sqrt{x}$

このうち，初期条件を満たすのは　$y=\sqrt{x}$

(2) 微分方程式を変形すると　$xy'=y-1$

[1] 定数関数 $y=1$ は明らかに解である。

[2] $y\neq 1$ のとき　$\dfrac{1}{y-1}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{y-1}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{1}{x}dx$　よって　$\displaystyle\int\frac{dy}{y-1}=\int\frac{dx}{x}$

ゆえに　$\log|y-1|=\log|x|+C$（C は任意定数）

よって　$|y-1|=e^C|x|$　すなわち　$y-1=\pm e^Cx$

$\pm e^C=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる。

したがって，解は　$y=Ax+1$，$A\neq 0$

[1] における解 $y=1$ は，[2] における解 $y=Ax+1$ において，$A=0$ とおくと得られるから，求める解は　$y=Ax+1$，A は任意定数

2 (1) A，B を任意の定数とする方程式 $y=A\sin x+B\cos x-1$ から A，B を消去して微分方程式を作れ。

(2) y は x の関数とする。次の微分方程式を解け。ただし，(イ) は [ ] 内の初期条件のもとで解け。

(ア) $y'=ay^2$（a は定数）　　(イ) $xy'+y=y'+1$ [$x=2$ のとき $y=2$]

解答 (1) $y''=-y-1$

(2) (ア) $(ax+C)y+1=0$（C は任意定数），$y=0$　(イ) $y=1+\dfrac{1}{x-1}$

解説

(1) $y=A\sin x+B\cos x-1$ …… ①

$y'=A\cos x-B\sin x$ …… ②

$y''=-A\sin x-B\cos x$ …… ③　とする。

②$\times\cos x-$③$\times\sin x$ から　$A=y'\cos x-y''\sin x$

②$\times\sin x+$③$\times\cos x$ から　$B=-(y'\sin x+y''\cos x)$

これらを ① に代入して

$$y=\sin x(y'\cos x-y''\sin x)-\cos x(y'\sin x+y''\cos x)-1=-y''-1$$

したがって　$y''=-y-1$

(2) (ア) [1] 定数関数 $y=0$ は明らかに解である。

[2] $y\neq 0$ のとき　$\dfrac{1}{y^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=a$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}dx=a\int dx$　よって　$\displaystyle\int\frac{1}{y^2}dy=a\int dx$

ゆえに　$-\dfrac{1}{y}=ax+C$（C は任意定数）

よって　$-1=(ax+C)y$　すなわち　$(ax+C)y+1=0$

以上から，解は　$(ax+C)y+1=0$（C は任意定数），$y=0$

(イ) $x\dfrac{dy}{dx}+y=\dfrac{dy}{dx}+1$ から　$(x-1)\dfrac{dy}{dx}=-(y-1)$ …… ①

定数関数 $y=1$ は与えられた初期条件を満たさない。

$y\neq 1$ のとき，① から　$\dfrac{1}{y-1}\cdot\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x-1}$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{y-1}\cdot\frac{dy}{dx}dx=-\int\frac{1}{x-1}dx$　よって　$\displaystyle\int\frac{dy}{y-1}=-\int\frac{dx}{x-1}$

ゆえに　$\log|y-1|=-\log|x-1|+C$（C は任意定数）

よって　$|y-1|=\dfrac{e^C}{|x-1|}$　すなわち　$y=1\pm\dfrac{e^C}{x-1}$

$\pm e^C=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとり　$y=1+\dfrac{A}{x-1}$

$x=2$ のとき $y=2$ であるから　$2=1+A$　ゆえに　$A=1$

したがって，解は　$y=1+\dfrac{1}{x-1}$

3 y は x の関数とする。

(1) a，b，c は定数とする。$\dfrac{dy}{dx}=f(ax+by+c)$ を $ax+by+c=z$ とおき換えることにより，z に関する微分方程式として表せ。

(2) (1) を利用して，微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x+y+1$ を解け。

解答 (1) $\dfrac{dz}{dx}=a+bf(z)$　(2) $x+y+2=Ae^x$（A は任意定数）

解説

(1) $ax+by+c=z$ の両辺を x で微分して　$a+b\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}=f(z)$ を代入して　$\dfrac{dz}{dx}=a+bf(z)$

(2) $x+y+1=z$ とおくと，(1) から　$\dfrac{dz}{dx}=1+z$ …… ①

[1] $1+z=0$ は明らかに ① の解である。

[2] $1+z\neq 0$ のとき　$\dfrac{1}{1+z}\cdot\dfrac{dz}{dx}=1$

よって　$\displaystyle\int\frac{1}{1+z}\cdot\frac{dz}{dx}dx=\int dx$　ゆえに　$\displaystyle\int\frac{dz}{1+z}=\int dx$

したがって　$\log|1+z|=x+C$（C は任意定数）

ゆえに　$|1+z|=e^C\cdot e^x$　すなわち　$1+z=\pm e^C\cdot e^x$

$\pm e^C=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる。

したがって，解は　$1+z=Ae^x$，$A\neq 0$

[1] における解 $1+z=0$ は，[2] における解 $1+z=Ae^x$ で $A=0$ とおくと得られる。

$x+y+1=z$ より $1+z=x+y+2$ であるから，求める解は

$x+y+2=Ae^x$，A は任意定数

4 y は x の関数とする。( ) 内のおき換えを利用して，次の微分方程式を解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-x-y}{x+y}$　$(x+y=z)$　　(2) $\dfrac{dy}{dx}=(x-y)^2$　$(x-y=z)$

解答 (1) $(x+y)^2=2x+A$（A は任意定数）

(2) $y=x-\dfrac{Ae^{2x}-1}{Ae^{2x}+1}$（$A$ は任意定数），$y=x-1$

解説

(1) $x+y=z$ とおくと，方程式は　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-z}{z}$ …… ①

また，$z=x+y$ の両辺を x で微分して　$\dfrac{dz}{dx}=1+\dfrac{dy}{dx}$

① を代入して　$\dfrac{dz}{dx}=1+\dfrac{1-z}{z}$　すなわち　$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{z}$

ゆえに　$z\dfrac{dz}{dx}=1$　よって　$\displaystyle\int z\frac{dz}{dx}dx=\int dx$

ゆえに　$\displaystyle\int z\,dz=\int dx$　よって　$\dfrac{z^2}{2}=x+C$（C は任意定数）

ゆえに　$(x+y)^2=2x+2C$

$2C=A$ とおくと，解は　$(x+y)^2=2x+A$（A は任意定数）

(2) $x-y=z$ とおくと，方程式は　$\dfrac{dy}{dx}=z^2$ …… ①

また，$z=x-y$ の両辺を x で微分して　$\dfrac{dz}{dx}=1-\dfrac{dy}{dx}$

① を代入して　$\dfrac{dz}{dx}=1-z^2$

[1] $z=\pm 1$ のとき　$x-y=\pm 1$　よって　$y=x\mp 1$（複号同順）

これは，与えられた方程式を満たすから，解である。

[2] $z\neq\pm 1$ のとき　$\dfrac{1}{1-z^2}\cdot\dfrac{dz}{dx}=1$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{1-z^2}\cdot\frac{dz}{dx}dx=\int dx$　よって　$\displaystyle\int\frac{dz}{1-z^2}=\int dx$

ここで　$\displaystyle\int\frac{dz}{1-z^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+z}+\frac{1}{1-z}\right)dz=\frac{1}{2}(\log|1+z|-\log|1-z|)+C_1$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C_1$（$C_1$ は積分定数）

したがって　$\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|=x+C$（$C$ は任意定数）

ゆえに　$\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|=e^{2(x+C)}$　すなわち　$\dfrac{1+z}{1-z}=\pm e^{2C}e^{2x}$

$\pm e^{2C}=A$ とおくと，A は 0 以外の任意の値をとる。

よって，解は，$\dfrac{1+z}{1-z}=Ae^{2x}$ から　$z=\dfrac{Ae^{2x}-1}{Ae^{2x}+1}$，$A\neq 0$

[1] における解 $z=-1$ は，[2] で $A=0$ とおくと得られるから，$\dfrac{dz}{dx}=1-z^2$ の解は

$z=\dfrac{Ae^{2x}-1}{Ae^{2x}+1}$，$z=1$

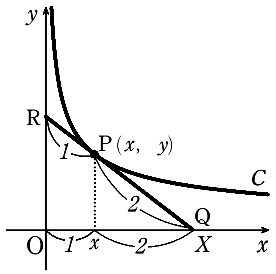
$x-y=z$ より $y=x-z$ であるから，求める解は

$y=x-\dfrac{Ae^{2x}-1}{Ae^{2x}+1}$（$A$ は任意定数），$y=x-1$

5 第 1 象限にある曲線 C 上の任意の点における接線は常に x 軸，y 軸の正の部分と交わり，その交点をそれぞれ Q，R とすると，接点 P は線分 QR を 2 : 1 に内分するという。この曲線 C が点 (1, 1) を通るとき，C の方程式を求めよ。

解答 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(解説)



接点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，接線上の任意の点を $(X,\ Y)$ とすると，接線の方程式は

$$Y-y=y'(X-x)$$

接線と x 軸の交点 Q の x 座標 X は，$Y=0$ として

$$-y=y'(X-x)$$

$y'\neq0$ であるから　$X=\dfrac{xy'-y}{y'}$

また，QP : PR $=2:1$ であるから

$$x=\frac{X}{3}\quad \text{すなわち}\quad x=\frac{xy'-y}{3y'}$$

したがって　$2xy'=-y$

曲線 C は第 1 象限にあるから　$x>0,\ y>0$　…… ①

ゆえに，$2x\dfrac{dy}{dx}=-y$ から　$\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{2x}$

両辺を積分して　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}$

よって，① から　$\log y=-\dfrac{1}{2}\log x+C_1$ (C_1 は任意定数)

したがって　$y=\dfrac{e^{C_1}}{\sqrt{x}}$

$e^{C_1}=A$ とおくと，A は正の値をとる。

ゆえに　$y=\dfrac{A}{\sqrt{x}},\ A>0$

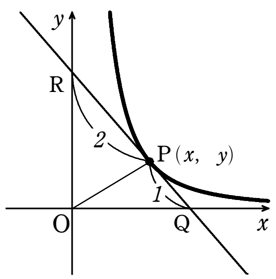
曲線 C は点 $(1,\ 1)$ を通るから，$x=y=1$ を代入して　$A=1$

よって，求める曲線 C の方程式は　$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6 点 $(1,\ 1)$ を通る曲線上の点 P における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ Q，R とし，O を原点とする。この曲線は第 1 象限にあるとして，常に △ORP $=2$△OPQ であるとき，曲線の方程式を求めよ。

(解答)　$y=x^2\ (x>0)$ または $y=\dfrac{1}{x^2}\ (x>0)$

(解説)



点 P の座標を $(x,\ y)$，接線上の任意の点を $(X,\ Y)$ とすると，接線の方程式は　$Y-y=y'(X-x)$

すなわち　$Y=y'X+y-xy'$ …… ①

① に $Y=0$ を代入して X について解くと

$$X=x-\frac{y}{y'}$$

また，① に $X=0$ を代入すると　$Y=y-xy'$

よって　Q$\left(x-\dfrac{y}{y'},\ 0\right)$，R$(0,\ y-xy')$

条件より，△ORP : △OPQ $=$ RP : PQ $=2:1$ であるから

$$\text{RP}=2\text{PQ}\quad \text{すなわち}\quad \text{RP}^2=4\text{PQ}^2$$

ゆえに　$x^2+(xy')^2=4\left\{\left(\dfrac{y}{y'}\right)^2+y^2\right\}$

よって　$x^2(y')^2+x^2(y')^4=4y^2\{1+(y')^2\}$

ゆえに　$\{1+(y')^2\}x^2(y')^2=4y^2\{1+(y')^2\}$

両辺を $1+(y')^2$ で割って　$x^2(y')^2=4y^2$　…… ②

曲線は第 1 象限にあるから　$x>0,\ y>0$

よって，② から　$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\pm\dfrac{2}{x}$　　ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\pm2\int\frac{dx}{x}$

よって　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\pm2\int\frac{dx}{x}$　　したがって　$\log y=\pm2\log x+C$ (C は任意定数)

曲線は点 $(1,\ 1)$ を通るから，$x=y=1$ を代入して　$C=0$

ゆえに　$\log y=\pm2\log x$

$\log y=2\log x$ から　$y=x^2$，　$\log y=-2\log x$ から　$y=\dfrac{1}{x^2}$

したがって，求める曲線の方程式は　$y=x^2\ (x>0)$ または $y=\dfrac{1}{x^2}\ (x>0)$

7 微分可能な関数 $f(x)$ が $f(x)=\displaystyle\int_0^x\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt$ を満たすとする。

(1) $f'(x)$ と $f''(x)$ を $f(x)$ で表せ。　(2) 関数 $\log\{f(x)+f'(x)\}$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

(解答)　(1) $f'(x)=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$，$f''(x)=f(x)$　(2) $\log\{f(x)+f'(x)\}=x$

(3) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$

(解説)

(1) $f'(x)=\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\sqrt{\{f(t)\}^2+1}\,dt=\sqrt{\{f(x)\}^2+1}$

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2f(x)\cdot f'(x)}{\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}$$

$$=\frac{f(x)\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}{\sqrt{\{f(x)\}^2+1}}=f(x)$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\log\{f(x)+f'(x)\}=\dfrac{f'(x)+f''(x)}{f(x)+f'(x)}=\dfrac{f'(x)+f(x)}{f(x)+f'(x)}=1$

よって　$\log\{f(x)+f'(x)\}=x+C$　(C は任意定数)　…… ①

ここで　$f(0)=0,\ f'(0)=\sqrt{\{f(0)\}^2+1}=1$

① に $x=0$ を代入すると　$\log\{f(0)+f'(0)\}=C$

したがって　$C=\log1=0$

ゆえに，① から　$\log\{f(x)+f'(x)\}=x$

(3) $\log\{f(x)+f'(x)\}=x$ から　$f(x)+f'(x)=e^x$

よって　$f(x)+\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=e^x$

すなわち　$\sqrt{\{f(x)\}^2+1}=e^x-f(x)$　…… ②

両辺を平方して整理すると　$2e^xf(x)=e^{2x}-1$

$2e^x\neq0$ であるから　$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$

このとき，$e^x-f(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}>0$ であるから，② は成り立つ。

したがって　$f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{2e^x}$

8 $f(x)$ は実数全体で定義された連続関数であり，すべての実数 x に対して次の関係式を満たすとする。このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

$$\int_0^x e^tf(x-t)dt=f(x)-e^x$$

(解答)　$f(x)=e^{2x}$

(解説)

$x-t=s$ とおくと　$t=x-s,\ dt=-ds$

t と s の対応は右のようになる。

t	$0\longrightarrow x$
s	$x\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_0^x e^tf(x-t)dt=\int_x^0 e^{x-s}f(s)(-1)ds=e^x\int_0^x e^{-s}f(s)ds$

ゆえに，関係式は　$e^x\displaystyle\int_0^x e^{-s}f(s)ds=f(x)-e^x$　…… ①

① の両辺を x で微分すると

$$e^x\int_0^x e^{-s}f(s)ds+e^x\{e^{-x}f(x)\}=f'(x)-e^x$$

よって　$e^x\displaystyle\int_0^x e^{-s}f(s)ds+f(x)=f'(x)-e^x$

① を代入して　$f(x)-e^x+f(x)=f'(x)-e^x$

ゆえに　$f'(x)=2f(x)$　…… ②

ここで，① の両辺に $x=0$ を代入すると　$0=f(0)-1$

すなわち　$f(0)=1$

したがって，定数関数 $f(x)=0$ は ② の解ではない。

よって，② から　$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int2dx$

よって　$\log|f(x)|=2x+C$　(C は任意定数)

ゆえに　$f(x)=\pm e^{2x+C}$　すなわち　$f(x)=\pm e^Ce^{2x}$

$\pm e^C=A$ とおくと　$f(x)=Ae^{2x}$ (A は任意定数，$A\neq0$)

$f(0)=1$ であるから　$A=1$

したがって　$f(x)=e^{2x}$

9 実数全体で微分可能な関数 $f(x)$ が次の条件 (A)，(B) をともに満たす。

(A) : すべての実数 $x,\ y$ について，$f(x+y)=f(x)f(y)$ が成り立つ。

(B) : すべての実数 x について，$f(x)\neq0$ である。

(1) すべての実数 x について $f(x)>0$ であることを，背理法によって証明せよ。

(2) すべての実数 x について，$f'(x)=f(x)f'(0)$ であることを示せ。

(3) $f'(0)=k$ とするとき，$f(x)$ を k を用いて表せ。

(解答)　(1) 略　(2) 略　(3) $f(x)=e^{kx}$

(解説)

(1) ある実数 a について $f(a)<0$ であると仮定する。

条件 (A) から　$f(a)=f(a+0)=f(a)f(0)$

よって　$f(a)\{1-f(0)\}=0$

$f(a)\neq0$ であるから　$f(0)=1$

$f(x)$ は微分可能な関数であるから，連続である。

また，$f(0)=1>0$，$f(a)<0$ であるから，中間値の定理により，$f(b)=0$ となる b が $0<x<a$ または $a<x<0$ の範囲に存在する。これは条件 (B) に矛盾する。

したがって，すべての実数 x について $f(x)>0$ である。

(2) $f'(x)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}$

$$=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=f(x)\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=f(x)f'(0)$$

(3) (2) の結果から　$f'(x)=kf(x)$

(1) より，$f(x)>0$ であるから　$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=k$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=k\int dx$

よって　$\log f(x)=kx+C$ (C は任意定数)

ゆえに　$f(x)=e^{kx+C}$　すなわち　$f(x)=e^Ce^{kx}$

$e^C=A$ とおくと　$f(x)=Ae^{kx}$ (A は任意定数，$A>0$)

(1) より，$f(0)=1$ であるから　$A=1$

したがって　$f(x)=e^{kx}$

10 ラジウムなどの放射性物質は，各瞬間の質量に比例する速度で，質量が減少していく。その比例定数を k $(k>0)$，最初の質量を A として，質量 x を時間 t の関数で表せ。また，ラジウムでは，質量が半減するのに 1600 年かかるという。800 年では初めの量のおよそ何 % になるか。小数点以下を四捨五入せよ。

解答　順に $x=Ae^{-kt}$，およそ 71 %

解説

時間 t における質量の変化する速度は　$\dfrac{dx}{dt}$

条件から，$\dfrac{dx}{dt}=-kx$ と表される。

質量 x については $x>0$ であるから　$\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{dx}{dt}=-k$

ゆえに　$\displaystyle\int\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{dt}dt=-k\int dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=-k\int dt$

ゆえに　$\log x=-kt+C$　(C は任意定数)

よって　$x=e^{-kt+C}$　すなわち　$x=e^Ce^{-kt}$

$t=0$ のとき，$x=A$ であるから　$e^C=A$

したがって　$x=Ae^{-kt}$

次に，$t=1600$ (年) のとき，$x=\dfrac{A}{2}$ となるから

$$Ae^{-1600k}=\frac{A}{2}\quad\text{すなわち}\quad e^{-1600k}=\frac{1}{2}$$

よって，$t=800$ のとき

$$x=Ae^{-800k}=A(e^{-1600k})^{\frac{1}{2}}=A\sqrt{\frac{1}{2}}\fallingdotseq 0.707A$$

したがって，800 年では初めの量のおよそ 71 % になる。