数学演習(道のり・曲線の長さ)R１．９．１４　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の曲線の長さを求めよ。(1) では $a>0$ とする。

(1) アステロイド　$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$

(2) $y=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ $(\sqrt{2}\leqq x\leqq 4)$

$\boxed{2}$ 次の曲線の長さを求めよ。

(1) $x=2t-1$，$y=e^t+e^{-t}$ $(0\leqq t\leqq 1)$

(2) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$ $(0\leqq t\leqq \pi)$

(3) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$ $(1\leqq x\leqq 2)$

(4) $y=\log(\sin x)$ $\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\boxed{3}$ 円 $C: x^2+y^2=9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。

(1) 時刻 $t=0$ において点 $(3,\ 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。ただし，$0\leqq t\leqq \dfrac{2}{3}\pi$ とする。

(2) (1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

$\boxed{4}$ $a>0$ とする。長さ $2\pi a$ のひもが一方の端を半径 a の円周上の点 A に固定して，その円に巻きつけてある。このひもを引っ張りながら円からはずしていくとき，ひもの他方の端 P が描く曲線の長さを求めよ。

$\boxed{5}$ (1) 数直線上を点 1 から出発して t 秒後の速度 v が $v=t(t-1)(t-2)$ で運動する点 P がある。出発してから 3 秒後の P の位置は $^{ア}\boxed{}$ であり，P が動いた道のりは $^{イ}\boxed{}$ である。

(2) x 軸上を，原点から出発して t 秒後の加速度が $\dfrac{1}{1+t}$ であるように動く物体がある。物体の初速度が v_0 のとき，出発してから t 秒後の物体の速度と位置を求めよ。

$\boxed{6}$ (1) x 軸上を動く 2 点 P，Q が同時に原点を出発して，t 秒後の速度はそれぞれ $\sin\pi t$，$2\sin\pi t$ (/s) である。

(ア) $t=3$ における P の座標を求めよ。

(イ) $t=0$ から $t=3$ までに P が動いた道のりを求めよ。

(ウ) 出発後初めて 2 点 P，Q が重なるのは何秒後か。また，このときまでの Q の道のりを求めよ。

(2) x 軸上を動く点の加速度が時刻 t の関数 $6(2t^2-2t+1)$ であり，$t=0$ のとき点 1，速度 -1 である。$t=1$ のときの点の位置を求めよ。

$\boxed{7}$ 時刻 t における動点 P の座標が $x=e^{-t}\cos t$, $y=e^{-t}\sin t$ で与えられている。$t=1$ から $t=2$ までに P が動いた道のりを求めよ。

$\boxed{8}$ 時刻 t における座標が次の式で与えられる点が動く道のりを求めよ。

(1) $x=t^2$, $y=t^3$ $(0 \leqq t \leqq 1)$

(2) $x=t^2-\sin t^2$, $y=1-\cos t^2$ $(0 \leqq t \leqq \sqrt{2\pi})$

$\boxed{9}$ 曲線 $y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸の周りに 1 回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h, 体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

$\boxed{10}$ 曲線 $y=x(1-x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸の周りに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1) 水面の高さが h $\left(0 \leqq h \leqq \dfrac{1}{4}\right)$ であるときの水の体積を $v(h)$ とすると，

$v(h)=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^h \left(\boxed{}\right) dy$ と表される。ただし，$\boxed{}$ には y の関数を入れよ。

(2) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(3) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

$\boxed{11}$ 極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線の長さを求めよ。

$\boxed{12}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=\cos t+\dfrac{1}{3}\cos 3t$，$y=\sin t+\dfrac{1}{3}\sin 3t$ で表される。時刻 t における点 P の速度を $\vec{v}$ とし，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

(1) $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，速度 $\vec{v}$ が直線 $y=\sqrt{3}\,x$ と平行である時刻 t を求めよ。

(2) $0 \leqq t \leqq \pi$ のとき，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ の最小値とその値をとる時刻 t を求めよ。

(3) 時刻 $t=0$ から $t=\pi$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ。

$\boxed{13}$ 曲線 $y=-\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる形をした容器がある。ただし，単位は cm とする。この容器に毎秒 1 cm^3 ずつ水を入れたとき，t 秒後の水面の半径を r cm とし，水の体積を V cm^3 とする。水を入れ始めてからあふれるまでの時間内で考えるとき

(1) 水の体積 V を r の式で表せ。

(2) 水を入れ始めて t 秒後の r の増加する速度 $\dfrac{dr}{dt}$ を r の式で表せ。

1 次の曲線の長さを求めよ。(1) では $a>0$ とする。

(1) アステロイド　$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$

(2) $y=\log(x+\sqrt{x^2-1})$　$(\sqrt{2}\leqq x\leqq 4)$

解答　(1) $6a$　(2) $\sqrt{15}-1$

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=3a\cos^2 t(-\sin t)$，$\dfrac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t$

ゆえに

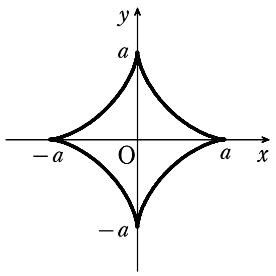
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=9a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

よって，曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t}\,dt$$

$$=\frac{3}{2}a\int_0^{2\pi}|\sin 2t|dt=4\cdot\frac{3}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt$$

$$=3a\Big[-\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=6a$$



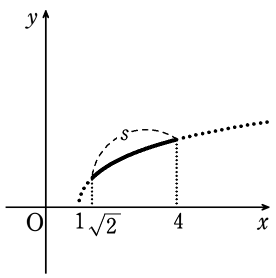
(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

よって，曲線の長さ s は

$$s=\int_{\sqrt{2}}^4\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{\sqrt{2}}^4\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\Big[\sqrt{x^2-1}\Big]_{\sqrt{2}}^4$$

$$=\sqrt{15}-1$$



2 次の曲線の長さを求めよ。

(1) $x=2t-1$，$y=e^t+e^{-t}$　$(0\leqq t\leqq 1)$　　(2) $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$　$(0\leqq t\leqq \pi)$

(3) $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$　$(1\leqq x\leqq 2)$　　(4) $y=\log(\sin x)$　$\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

解答　(1) $e-\dfrac{1}{e}$　(2) 4　(3) $\dfrac{59}{24}$　(4) $\dfrac{1}{2}\log 3$

解説

求める曲線の長さを L とする。

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2$，$\dfrac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$

よって　$L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{2^2+(e^t-e^{-t})^2}\,dt=\int_0^1(e^t+e^{-t})dt=\Big[e^t-e^{-t}\Big]_0^1=e-\frac{1}{e}$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$

$(1-\cos t)^2+\sin^2 t=2(1-\cos t)=4\sin^2\dfrac{t}{2}$

また，$0\leqq t\leqq\pi$ から　$\sin\dfrac{t}{2}\geqq 0$

よって　$L=\displaystyle\int_0^\pi\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=\int_0^\pi 2\sin\frac{t}{2}\,dt=4\Big[-\cos\frac{t}{2}\Big]_0^\pi=4$

(3) $\dfrac{dy}{dx}=x^2-\dfrac{1}{4x^2}$

よって　$L=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right]_1^2=\frac{7}{3}+\frac{1}{8}=\frac{59}{24}$$

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{\sin x}$

よって　$L=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}-\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(0-\log\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\log 3$$

3 円 $C: x^2+y^2=9$ の内側を半径 1 の円 D が滑らずに転がる。時刻 t において D は点 $(3\cos t,\ 3\sin t)$ で C に接している。

(1) 時刻 $t=0$ において点 $(3,\ 0)$ にあった D 上の点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ を求めよ。ただし，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ とする。

(2) (1) の範囲で点 P の描く曲線の長さを求めよ。

解答　(1) $(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$　(2) $\dfrac{16}{3}$

解説

(1) A $(3,\ 0)$，T $(3\cos t,\ 3\sin t)$ とする。

D と C が T で接しているとき，D の中心 Q の座標は $(2\cos t,\ 2\sin t)$ である。

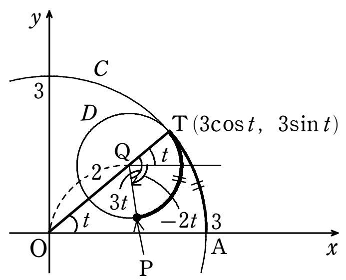
また，$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\overset{\frown}{\mathrm{TA}}=3t$ であるから，x 軸の正の方向から半直線 QP への角は　$t-3t=-2t$

よって，O を原点とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$

$=(2\cos t,\ 2\sin t)+(\cos(-2t),\ \sin(-2t))$

$=(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t-\sin 2t)$



(2) $x'(t)=-2\sin t-2\sin 2t$，$y'(t)=2\cos t-2\cos 2t$ から

$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=4(\sin^2 t+2\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)$

$+4(\cos^2 t-2\cos t\cos 2t+\cos^2 2t)$

$=4(2-2\cos 3t)=8(1-\cos 3t)=16\sin^2\dfrac{3}{2}t$

$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ であるから　$\sin\dfrac{3}{2}t\geqq 0$

よって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{16\sin^2\frac{3}{2}t}\,dt=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}4\sin\frac{3}{2}t\,dt=4\cdot\frac{2}{3}\left[-\cos\frac{3}{2}t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{16}{3}$$

4 $a>0$ とする。長さ $2\pi a$ のひもが一方の端を半径 a の円周上の点 A に固定して，その円に巻きつけてある。このひもを引っ張りながら円からはずしていくとき，ひもの他方の端 P が描く曲線の長さを求めよ。

解答　$2\pi^2 a$

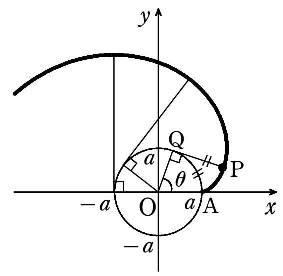
解説

円の方程式を $x^2+y^2=a^2$，A $(a,\ 0)$，P $(x,\ y)$ とし，図のように Q をとる。O を原点とし，$\angle\mathrm{QOA}=\theta$ $(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ とすると

Q $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$，$\mathrm{PQ}=\overset{\frown}{\mathrm{AQ}}=a\theta$，

$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\left(a\theta\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right),\ a\theta\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

$=(a\theta\sin\theta,\ -a\theta\cos\theta)$



よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ から

$x=a\cos\theta+a\theta\sin\theta$，$y=a\sin\theta-a\theta\cos\theta$

ゆえに　$\dfrac{dx}{d\theta}=a(-\sin\theta)+a\sin\theta+a\theta\cos\theta=a\theta\cos\theta$，

$\dfrac{dy}{d\theta}=a\cos\theta-a\cos\theta+a\theta\sin\theta=a\theta\sin\theta$

したがって，曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{(a\theta\cos\theta)^2+(a\theta\sin\theta)^2}\,d\theta=a\int_0^{2\pi}\theta\,d\theta=a\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi}=2\pi^2 a$$

参考　この曲線を円の伸開線 (インボリュート) という。

5 (1) 数直線上を点 1 から出発して t 秒後の速度 v が $v=t(t-1)(t-2)$ で運動する点 P がある。出発してから 3 秒後の P の位置は ア□ であり，P が動いた道のりは イ□ である。

(2) x 軸上を，原点から出発して t 秒後の加速度が $\dfrac{1}{1+t}$ であるように動く物体がある。物体の初速度が v_0 のとき，出発してから t 秒後の物体の速度と位置を求めよ。

解答　(1) (ア) $\dfrac{13}{4}$　(イ) $\dfrac{11}{4}$

(2) 速度 $\log(1+t)+v_0$，位置 $(1+t)\log(1+t)+(v_0-1)t$

解説

(1) $1+\displaystyle\int_0^3 t(t-1)(t-2)dt=1+\int_0^3(t^3-3t^2+2t)dt=1+\left[\frac{t^4}{4}-t^3+t^2\right]_0^3=^{ア}\frac{13}{4}$

$l=\displaystyle\int_0^3|t(t-1)(t-2)|dt$

$=\displaystyle\int_0^1 t(t-1)(t-2)dt-\int_1^2 t(t-1)(t-2)dt+\int_2^3 t(t-1)(t-2)dt$

$F(t)=\displaystyle\int_0^t t(t-1)(t-2)dt=\frac{t^4}{4}-t^3+t^2$ とすると

$l=F(1)-F(0)-\{F(2)-F(1)\}+F(3)-F(2)=-0+2\cdot\dfrac{1}{4}-2\cdot 0+\dfrac{9}{4}=^{イ}\dfrac{11}{4}$

(2) 速度　$v=v_0+\displaystyle\int_0^t\frac{1}{1+t}dt=v_0+\Big[\log(1+t)\Big]_0^t=\log(1+t)+v_0$

位置　$\displaystyle\int_0^t\{\log(1+t)+v_0\}dt=\Big[(1+t)\log(1+t)-t+v_0 t\Big]_0^t$

$=(1+t)\log(1+t)+(v_0-1)t$

6 (1) x 軸上を動く 2 点 P，Q が同時に原点を出発して，t 秒後の速度はそれぞれ $\sin\pi t$，$2\sin\pi t$ (/s) である。

(ア) $t=3$ における P の座標を求めよ。

(イ) $t=0$ から $t=3$ までに P が動いた道のりを求めよ。

(ウ) 出発後初めて 2 点 P，Q が重なるのは何秒後か。また，このときまでの Q の道のりを求めよ。

(2) x 軸上を動く点の加速度が時刻 t の関数 $6(2t^2-2t+1)$ であり，$t=0$ のとき点 1，速度 -1 である。$t=1$ のときの点の位置を求めよ。

解答 (1) (ア) $\dfrac{2}{\pi}$ (イ) $\dfrac{6}{\pi}$ (ウ) 2 秒後，道のりは $\dfrac{8}{\pi}$ (2) 2

解説

(1) (ア) $0+\displaystyle\int_0^3 \sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^3=-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{2}{\pi}$

(イ) $0\leqq t\leqq 1$，$2\leqq t\leqq 3$ のとき $\sin\pi t\geqq 0$

$1\leqq t\leqq 2$ のとき $\sin\pi t\leqq 0$

したがって，求める道のりは

$$\int_0^3|\sin\pi t|dt=\int_0^1\sin\pi t\,dt+\int_1^2(-\sin\pi t)dt+\int_2^3\sin\pi t\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1+\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2+\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_2^3$$

$$=-\frac{1}{\pi}(-1-1)+\frac{1}{\pi}(1+1)-\frac{1}{\pi}(-1-1)=\frac{6}{\pi}$$

(ウ) $t\,(>0)$ 秒後に P，Q が重なるとすると

$$\int_0^t\sin\pi t\,dt=\int_0^t 2\sin\pi t\,dt \quad すなわち \quad \int_0^t\sin\pi t\,dt=0$$

ゆえに $\left[-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^t=0$ 　よって $\cos\pi t-1=0$

したがって $\cos\pi t=1$ すなわち $\pi t=2n\pi$ (n は整数)

$t>0$ の範囲で $\pi t=2n\pi$ を満たす最小のものは，$n=1$ とすると $\pi t=2\pi$ から

$t=2$

すなわち 2 秒後。また，Q の道のりは

$$\int_0^2|2\sin\pi t|dt=2\int_0^1\sin\pi t\,dt+2\int_1^2(-\sin\pi t)dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_0^1+2\left[\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right]_1^2=\frac{8}{\pi}$$

(2) 速度：$v(t)=-1+\displaystyle\int_0^t 6(2t^2-2t+1)dt=4t^3-6t^2+6t-1$

位置：$x(t)=1+\displaystyle\int_0^t(4t^3-6t^2+6t-1)dt=t^4-2t^3+3t^2-t+1$

よって，$t=1$ のときの点の位置は $x(1)=1-2+3-1+1=2$

7 時刻 t における動点 P の座標が $x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ で与えられている。$t=1$ から $t=2$ までに P が動いた道のりを求めよ。

解答 $\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{e^2}\right)$

解説

$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}\cos t+e^{-t}(-\sin t)=-e^{-t}(\cos t+\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t=e^{-t}(\cos t-\sin t)$$

よって $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=e^{-2t}(1+2\cos t\sin t)+e^{-2t}(1-2\cos t\sin t)$

$$=2e^{-2t}=(\sqrt{2}\,e^{-t})^2$$

求める道のりは $\displaystyle\int_1^2\sqrt{2}\,e^{-t}dt=-\sqrt{2}\left[e^{-t}\right]_1^2=\sqrt{2}\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}\right)$

8 時刻 t における座標が次の式で与えられる点が動く道のりを求めよ。

(1) $x=t^2$，$y=t^3$ $(0\leqq t\leqq 1)$

(2) $x=t^2-\sin t^2$，$y=1-\cos t^2$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{2\pi})$

解答 (1) $\dfrac{13\sqrt{13}-8}{27}$ (2) 8

解説

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2t$，$\dfrac{dy}{dt}=3t^2$ 　道のりは，$t\geqq 0$ であるから

$$\int_0^1\sqrt{(2t)^2+(3t^2)^2}\,dt=\int_0^1\sqrt{t^2(9t^2+4)}\,dt=\int_0^1 t\sqrt{9t^2+4}\,dt$$

$$=\int_0^1\sqrt{9t^2+4}\cdot\frac{1}{18}(9t^2+4)'dt=\frac{1}{18}\left[\frac{2}{3}(9t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}=2t-2t\cos t^2=2t(1-\cos t^2)$，$\dfrac{dy}{dt}=2t\sin t^2$

道のりは，$t\geqq 0$ であるから

$$\int_0^{\sqrt{2\pi}}\{4t^2(1-2\cos t^2+\cos^2 t^2)+4t^2\sin^2 t^2\}^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int_0^{\sqrt{2\pi}}\{8t^2(1-\cos t^2)\}^{\frac{1}{2}}dt=2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2\pi}}t\sqrt{1-\cos t^2}\,dt$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2\pi}}t\sqrt{2\sin^2\frac{t^2}{2}}\,dt=4\int_0^{\sqrt{2\pi}}t\sin\frac{t^2}{2}\,dt$$

$$=4\left[-\cos\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2\pi}}=4\cdot 2=8$$

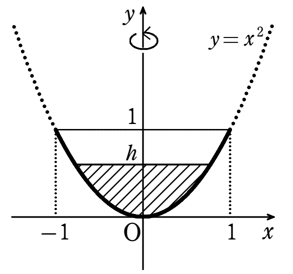
9 曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ を y 軸の周りに 1 回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする。V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

解答 (1) $-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$ (2) $\dfrac{2}{3}\pi$

解説



(1) 水の深さが h であるときの水の体積を $V(h)$ とすると $V(h)=\pi\displaystyle\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h y\,dy$

ゆえに $\dfrac{dV}{dh}=\pi h$

よって $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\pi h\dfrac{dh}{dt}$

題意から $\pi h\dfrac{dh}{dt}=-\sqrt{h}$

したがって $\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$

(2) (1) より $\dfrac{dt}{dh}=-\pi\sqrt{h}$ であるから

$$T=\int_1^0(-\pi\sqrt{h})dh=\pi\int_0^1\sqrt{h}\,dh=\pi\left[\frac{2}{3}h\sqrt{h}\right]_0^1=\frac{2}{3}\pi$$

10 曲線 $y=x(1-x)$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸の周りに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1) 水面の高さが h $\left(0\leqq h\leqq\dfrac{1}{4}\right)$ であるときの水の体積を $v(h)$ とすると，

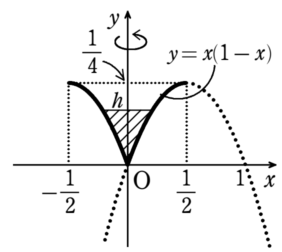
$v(h)=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^h(\boxed{})dy$ と表される。ただし，$\boxed{}$ には y の関数を入れよ。

(2) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(3) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。

解答 (1) $1-2y-\sqrt{1-4y}$ (2) $u=\dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{1-2h+\sqrt{1-4h}}{h^2}$ (3) $\dfrac{\pi}{96V}$

解説



(1) $v(h)=\pi\displaystyle\int_0^h x^2dy$ である。

ここで，$y=x(1-x)$ から

$x^2-x+y=0$

よって $x=\dfrac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot y}}{2\cdot 1}$

$=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4y}}{2}$

$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ であるから $x=\dfrac{1-\sqrt{1-4y}}{2}$

ゆえに $x^2=\left(\dfrac{1-\sqrt{1-4y}}{2}\right)^2=\dfrac{1-2y-\sqrt{1-4y}}{2}$

よって $v(h)=\dfrac{\pi}{2}\displaystyle\int_0^h(1-2y-\sqrt{1-4y})dy$

(2) $V=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{dv}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{\pi}{2}(1-2h-\sqrt{1-4h})\cdot\dfrac{dh}{dt}$

ゆえに $u=\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{2V}{\pi}\cdot\dfrac{1}{1-2h-\sqrt{1-4h}}=\dfrac{2V}{\pi}\cdot\dfrac{1-2h+\sqrt{1-4h}}{(1-2h)^2-(1-4h)}$

$=\dfrac{V}{2\pi}\cdot\dfrac{1-2h+\sqrt{1-4h}}{h^2}$

(3) 水がいっぱいになったときの水の体積は

$$v\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{4}}(1-2y-\sqrt{1-4y})dy=\frac{\pi}{2}\left[y-y^2-\frac{1}{-4}\cdot\frac{2}{3}(1-4y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{96}$$

よって，いっぱいになるまでの時間は　$v\left(\frac{1}{4}\right)\div V=\frac{\pi}{96V}$

$\boxed{11}$ 極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線の長さを求めよ。

解答　4

解説

曲線上の点の直交座標を $(x,\ y)$ とすると

$$x=r\cos\theta=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta$$

$$y=r\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta$$

よって　$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta-2\cos\theta\sin\theta=-\sin\theta-\sin2\theta$

$\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta+\cos2\theta$

ゆえに　$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=(-\sin\theta-\sin2\theta)^2+(\cos\theta+\cos2\theta)^2$

$$=2+2\sin\theta\sin2\theta+2\cos\theta\cos2\theta=2+2\cos\theta$$

$$=2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $\cos\frac{\theta}{2}\geqq0$ であるから，求める曲線の長さは

$$\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^\pi\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$=4\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=4$$

$\boxed{12}$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $x=\cos t+\frac{1}{3}\cos3t$，$y=\sin t+\frac{1}{3}\sin3t$ で表される。時刻 t における点 P の速度を $\vec{v}$ とし，加速度を $\vec{\alpha}$ とする。

(1)　$0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき，速度 $\vec{v}$ が直線 $y=\sqrt{3}\,x$ と平行である時刻 t を求めよ。

(2)　$0\leqq t\leqq\pi$ のとき，加速度の大きさ $|\vec{\alpha}|$ の最小値とその値をとる時刻 t を求めよ。

(3)　時刻 $t=0$ から $t=\pi$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ。

解答　(1)　$t=\frac{5}{12}\pi$　　(2)　$t=\frac{\pi}{2}$ で最小値 2　　(3)　4

解説

(1)　$\frac{dx}{dt}=-\sin t-\sin3t=-2\sin2t\cos t$

$\frac{dy}{dt}=\cos t+\cos3t=2\cos2t\cos t$

$0<t<\frac{\pi}{2}$ のとき，$0<2t<\pi$ であるから　$\frac{dx}{dt}\neq0$

よって　$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\cos2t}{\sin2t}$

速度 $\vec{v}$ が直線 $y=\sqrt{3}\,x$ と平行であるとき　$-\frac{\cos2t}{\sin2t}=\sqrt{3}$

ゆえに　$\tan2t=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$0<2t<\pi$ であるから　$2t=\frac{5}{6}\pi$　　よって　$t=\frac{5}{12}\pi$

(2)　$\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t-3\cos3t$，$\frac{d^2y}{dt^2}=-\sin t-3\sin3t$

ゆえに　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$

$$=\sqrt{(-\cos t-3\cos3t)^2+(-\sin t-3\sin3t)^2}$$

$$=\sqrt{10+6(\cos3t\cos t+\sin3t\sin t)}$$

$$=\sqrt{10+6\cos(3t-t)}=\sqrt{10+6\cos2t}$$

$0\leqq t\leqq\pi$ のとき $0\leqq2t\leqq2\pi$ であるから，$|\vec{\alpha}|$ は $\cos2t=-1$，すなわち $2t=\pi$ より，$t=\frac{\pi}{2}$ で最小値 $\sqrt{10-6}=2$ をとる。

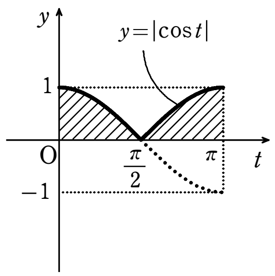
(3)　$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

$$=\sqrt{(-\sin t-\sin3t)^2+(\cos t+\cos3t)^2}$$

$$=\sqrt{2+2(\cos3t\cos t+\sin3t\sin t)}$$

$$=\sqrt{2+2\cos2t}=\sqrt{2+2(2\cos^2t-1)}$$

$$=\sqrt{4\cos^2t}=2|\cos t|$$



$0\leqq t\leqq\pi$ で，$y=2|\cos t|$ のグラフは直線 $t=\frac{\pi}{2}$ に関して対称であるから　$L=\int_0^\pi|\vec{v}|\,dt=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos t\,dt=4\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=4$

$\boxed{13}$ 曲線 $y=-\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる形をした容器がある。ただし，単位は cm とする。この容器に毎秒 1 cm^3 ずつ水を入れたとき，t 秒後の水面の半径を r cm とし，水の体積を V cm^3 とする。水を入れ始めてからあふれるまでの時間内で考えるとき

(1)　水の体積 V を r の式で表せ。

(2)　水を入れ始めて t 秒後の r の増加する速度 $\frac{dr}{dt}$ を r の式で表せ。

解答　(1)　$\pi(-r^2\cos r+2r\sin r+2\cos r-2)$　　(2)　$\frac{1}{\pi r^2\sin r}$

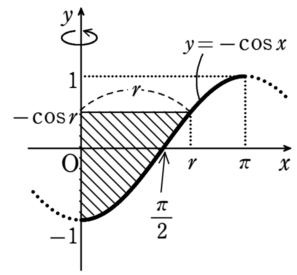
解説

(1)　条件から　$V=\int_{-1}^{-\cos r}\pi x^2dy$

ここで　$y=-\cos x$

$dy=\sin x\,dx$ であり，y と x の対応は次のようになる。

y	$-1\ \longrightarrow\ -\cos r$
x	$0\ \longrightarrow\ r$



よって　$V=\int_0^r\pi x^2\sin x\,dx=\pi\int_0^r x^2\sin x\,dx$

$$=\pi\left\{\Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^r-\int_0^r2x(-\cos x)dx\right\}$$

$$=\pi\left\{-r^2\cos r+2\left(\Big[x\sin x\Big]_0^r-\int_0^r\sin x\,dx\right)\right\}$$

$$=\pi\left(-r^2\cos r+2r\sin r+2\Big[\cos x\Big]_0^r\right)$$

$$=\pi(-r^2\cos r+2r\sin r+2\cos r-2)$$

(2)　(1) で導いた $V=\pi\int_0^r x^2\sin x\,dx$ の両辺を r で微分すると　$\frac{dV}{dr}=\pi r^2\sin r$

ここで　$\frac{dV}{dr}=\frac{dV}{dt}\cdot\frac{dt}{dr}$

$\frac{dV}{dt}=1$ であるから　$\frac{dV}{dr}=1\cdot\frac{dt}{dr}=\frac{dt}{dr}$

よって　$\frac{dt}{dr}=\pi r^2\sin r$　　ゆえに　$\frac{dr}{dt}=\frac{1}{\frac{dt}{dr}}=\frac{1}{\pi r^2\sin r}$