数学演習(体積)Ｒ１．９．１３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　　　　)

[1] 2 点 P$(x,\ 0)$，Q$(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形を，x 軸に垂直な平面上に作る。P が x 軸上を原点 O から点 $(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正三角形が描く立体の体積を求めよ。

[2] xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ を底面とし，高さが十分にある直楕円柱を，y 軸を含み xy 平面と 45° の角をなす平面で 2 つの立体に切り分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

[3] 次の曲線や座標軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=1-\sqrt{x}$，x 軸，y 軸

(2) $y=1+\cos x$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$，x 軸

$\boxed{4}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=e^x$，$x=0$，$x=1$，x 軸　　(2)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，x 軸

(3)　$y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$x=1$，$x=4$，x 軸

$\boxed{5}$ 次の図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　放物線 $y=-x^2+4x$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

(2)　円 $x^2+(y-2)^2=4$ の周および内部

$\boxed{6}$ 次の 2 曲線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-2$，$y=2x^2-3$　　(2)　$y=\sqrt{3}\,x^2$，$y=\sqrt{4-x^2}$

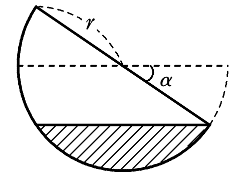
$\boxed{7}$ 放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=-x+2$ で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{8}$ 2曲線 $y=\cos\dfrac{x}{2}\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と $y=\cos x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ を考える。

(1) 上の2曲線と直線 $x=\pi$ を描き，これらで囲まれる領域を斜線で図示せよ。

(2) (1)で示した斜線部分の領域を x 軸の周りに1回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{9}$ 水を満たした半径 r の半球形の容器がある。これを静かに角 α だけ傾けたとき，こぼれ出た水の量を r，α で表せ。(α は弧度法で表された角とする。)



$\boxed{10}$ 次の回転体の体積 V を求めよ。

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体

(2) 曲線 C : $y=\log(x^2+1)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と直線 $y=\log 2$，および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体

$\boxed{11}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$

(2) $y=-x^4+2x^2$ $(x\geqq 0)$，x 軸

(3) $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$，$y=-1$，y 軸

$\boxed{12}$ 放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{13}$ 曲線 $y=e^x$，直線 $x=1$，x 軸，y 軸によって囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{14}$ 曲線 $C: y=\log x$ に原点から接線 ℓ を引く。曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた図形を D とするとき，次の回転体の体積を求めよ。

(1) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_x

(2) D を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_y

$\boxed{15}$ 曲線 $x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{16}$ 曲線 $C : x=\cos t,\ y=2\sin^3 t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。

(1) 曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) (1) で考えた図形を y 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{17}$ 次の図形を直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

(2) 曲線 $y=\sin x\ (0 \leqq x \leqq \pi)$ と 2 直線 $y=x,\ x+y=\pi$ で囲まれた図形

$\boxed{18}$ xyz 空間において，次の連立不等式が表す立体を考える。

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1 \geqq 0$$

(1) この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し，この断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) この立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{19}$ 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする三角錐を C，4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(-1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする三角錐を x 軸の正の方向に a $(0<a<1)$ だけ平行移動したものを D とする。

このとき，C と D の共通部分の体積 $V(a)$ を求めよ。また，$V(a)$ が最大になるときの a の値を求めよ。

$\boxed{20}$ xyz 空間において，2 点 $\mathrm{P}\,(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}\,(-1,\ 1,\ 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに 1 回転して得られる立体を S とする。立体 S と，2 つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

$\boxed{21}$ xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{O}\,(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\,(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}\,(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸の周りに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{22}$ xy 平面上の原点を中心とする単位円を底面とし，点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする。t が $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くとき，円錐 K の表面および内部が通過する部分の体積を求めよ。

$\boxed{23}$ $a>0$ に対し，区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において曲線 $y=a^2x+\dfrac{1}{a}\sin x$ と直線 $y=a^2x$ によって囲まれる部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1) $V(a)$ を a で表せ。

(2) $V(a)$ が最小になるように a の値を定めよ。

$\boxed{24}$ 座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0 \leqq t \leqq 1$ を用いて $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ と定める。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{25}$ 連立不等式 $x+y^2 \leqq 2$，$x+y \geqq 0$，$x-y \leqq 2$ で表される図形を S とし，S を直線 $y=-x$ の周りに1回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面上に図示せよ。　　(2) V を求めよ。

1 2 点 P$(x,\ 0)$，Q$(x,\ \sin x)$ を結ぶ線分を 1 辺とする正三角形を，x 軸に垂直な平面上に作る。P が x 軸上を原点 O から点 $(\pi,\ 0)$ まで動くとき，この正三角形が描く立体の体積を求めよ。

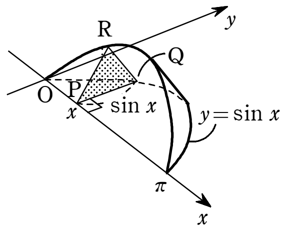
解答　$\dfrac{\sqrt{3}}{8}\pi$

解説
線分 PQ を 1 辺とする正三角形の面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x$$

よって，求める立体の体積 V は

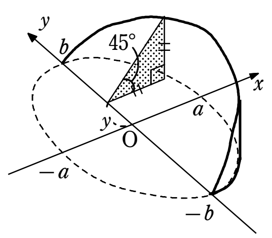
$$V=\int_0^{\pi}S(x)\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2 x\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\sqrt{3}}{8}\pi$$



2 xy 平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ を底面とし，高さが十分にある直楕円柱を，y 軸を含み xy 平面と 45° の角をなす平面で 2 つの立体に切り分けるとき，小さい方の立体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{2}{3}a^2b$

解説
y 軸上の点 $(0,\ y)$ $(-b\leqq y\leqq b)$ を通り，y 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの切り口は，直角二等辺三角形である。



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ から　　$x^2=a^2\left(1-\dfrac{y^2}{b^2}\right)$

よって，断面積を $S(y)$ とすると

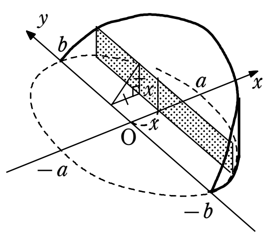
$$S(y)=\frac{1}{2}x^2=\frac{a^2}{2}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

ゆえに，求める体積を V とすると

$$V=\int_{-b}^{b}S(y)\,dy=2\int_0^{b}S(y)\,dy=a^2\int_0^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy$$
$$=a^2\left[y-\frac{y^3}{3b^2}\right]_0^{b}=\frac{2}{3}a^2b$$

別解　x 軸に垂直な平面で切った場合

x 軸上の点 $(x,\ 0)$ $(0\leqq x\leqq a)$ を通り，x 軸に垂直な平面で題意の立体を切ったときの切り口は，長方形である。



$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ から　　$y^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$

よって，$y\geqq 0$ のとき　　$y=b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$

断面積を $S(x)$ とすると

$$S(x)=2y\cdot x=2bx\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$$

ゆえに，求める体積を V とすると

$$V=\int_0^{a}S(x)\,dx=\frac{2b}{a}\int_0^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$\sqrt{a^2-x^2}=t$ とおくと　　$a^2-x^2=t^2$

$-2x\,dx=2t\,dt$ から　　$x\,dx=-t\,dt$

x と t の対応は右のようになるから

x	$0\longrightarrow a$
t	$a\longrightarrow 0$

$$V=\frac{2b}{a}\int_a^0 t(-t)\,dt=\frac{2b}{a}\int_0^{a}t^2\,dt=\frac{2b}{a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{a}=\frac{2}{3}a^2b$$

3 次の曲線や座標軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

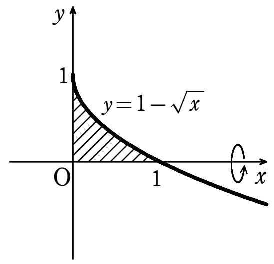
(1)　$y=1-\sqrt{x}$，x 軸，y 軸　　　(2)　$y=1+\cos x$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$，x 軸

解答　(1)　$\dfrac{\pi}{6}$　　(2)　$3\pi^2$

解説
(1)　$1-\sqrt{x}=0$ とすると　$\sqrt{x}=1$　　よって　$x=1$

ゆえに　$V=\pi\displaystyle\int_0^{1}(1-\sqrt{x})^2dx$

$$=\pi\int_0^{1}(1-2\sqrt{x}+x)\,dx$$
$$=\pi\left[x-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^{1}$$
$$=\pi\left(1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$$

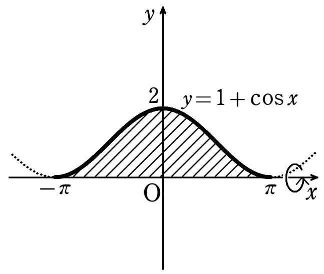


(2)　$1+\cos x=0$ とすると，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ では

$x=\pm\pi$

よって　$V=\pi\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos x)^2dx$

$$=2\pi\int_0^{\pi}(1+\cos x)^2dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}(1+2\cos x+\cos^2 x)\,dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}\left(1+2\cos x+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=2\pi\left[\frac{3}{2}x+2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=2\pi\cdot\frac{3}{2}\pi=3\pi^2$$



4 次の曲線や直線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

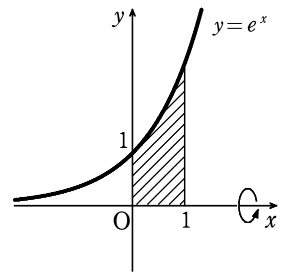
(1)　$y=e^x$，$x=0$，$x=1$，x 軸　　　(2)　$y=\tan x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，x 軸

(3)　$y=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$x=1$，$x=4$，x 軸

解答　(1)　$\dfrac{1}{2}(e^2-1)\pi$　　(2)　$\pi\left(1-\dfrac{\pi}{4}\right)$　　(3)　$\left(\dfrac{91}{3}+2\log 2\right)\pi$

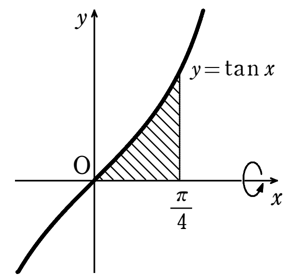
解説
(1)　$V=\pi\displaystyle\int_0^{1}(e^x)^2dx$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{1}$$
$$=\frac{1}{2}(e^2-1)\pi$$



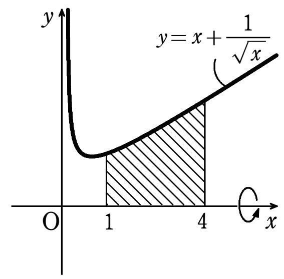
(2)　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$
$$=\pi\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\pi\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$



(3)　$V=\pi\displaystyle\int_1^{4}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

$$=\pi\int_1^{4}\left(x^2+2\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\log x\right]_1^{4}$$
$$=\pi\left\{\frac{64-1}{3}+\frac{4(2^3-1)}{3}+\log 4\right\}$$
$$=\left(\frac{91}{3}+2\log 2\right)\pi$$



5 次の図形を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　放物線 $y=-x^2+4x$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

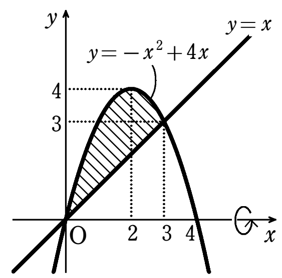
(2)　円 $x^2+(y-2)^2=4$ の周および内部

解答　(1)　$\dfrac{108}{5}\pi$　　(2)　$16\pi^2$

解説
(1)　$-x^2+4x=x$ とすると，$x(x-3)=0$ から　$x=0,\ 3$

$0\leqq x\leqq 3$ では $-x^2+4x\geqq x\geqq 0$ であるから

$$V=\pi\int_0^{3}\{(-x^2+4x)^2-x^2\}\,dx$$
$$=\pi\int_0^{3}(x^4-8x^3+15x^2)\,dx$$
$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-2x^4+5x^3\right]_0^{3}$$
$$=\pi\left(\frac{243}{5}-162+135\right)=\frac{108}{5}\pi$$



(2) $x^2+(y-2)^2=4$ から　　$y=2\pm\sqrt{4-x^2}$

$4-x^2\geqq 0$ であるから　　$-2\leqq x\leqq 2$

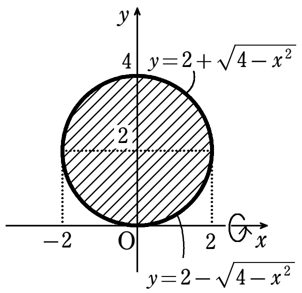
また，$2+\sqrt{4-x^2}\geqq 2-\sqrt{4-x^2}\geqq 0$ であるから

$$V=\pi\int_{-2}^{2}\{(2+\sqrt{4-x^2})^2-(2-\sqrt{4-x^2})^2\}dx$$

$$=8\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ は半径が 2 の半円の面積を表すから

$$V=8\pi\cdot\frac{\pi\cdot 2^2}{2}=16\pi^2$$



6 次の 2 曲線で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=x^2-2$，$y=2x^2-3$　　　(2) $y=\sqrt{3}\,x^2$，$y=\sqrt{4-x^2}$

解答 (1) $\frac{88}{15}\pi$　　(2) $\frac{92}{15}\pi$

解説

(1) $y=x^2-2$，$y=2x^2-3$ のグラフをかくと，右図のようになり，交点の x 座標は，

$x^2-2=2x^2-3$ から　　$x^2=1$

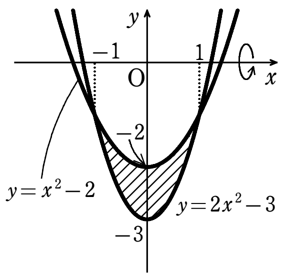
よって　　$x=\pm1$

囲まれた部分は y 軸に関して対称であるから

$$V=2\pi\int_0^1\{(2x^2-3)^2-(x^2-2)^2\}dx$$

$$=2\pi\int_0^1(3x^4-8x^2+5)dx$$

$$=2\pi\left[\frac35x^5-\frac83x^3+5x\right]_0^1=2\pi\left(\frac35-\frac83+5\right)=\frac{88}{15}\pi$$



(2) $y=\sqrt{3}\,x^2$，$y=\sqrt{4-x^2}$ のグラフをかくと，右図のようになり，交点の x 座標は，

$\sqrt{3}\,x^2=\sqrt{4-x^2}$ から　　$3x^4=4-x^2$

ゆえに　　$(x^2-1)(3x^2+4)=0$

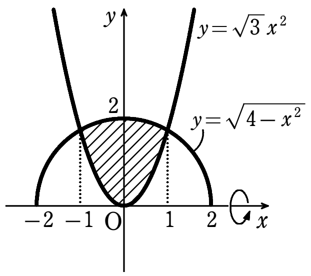
$3x^2+4>0$ より $x^2-1=0$ であるから

$x=\pm1$

囲まれた部分は y 軸に関して対称であるから

$$V=2\pi\int_0^1\{(\sqrt{4-x^2})^2-(\sqrt{3}\,x^2)^2\}dx$$

$$=2\pi\int_0^1(4-x^2-3x^4)dx=2\pi\left[4x-\frac{x^3}{3}-\frac35x^5\right]_0^1=2\pi\left(4-\frac13-\frac35\right)=\frac{92}{15}\pi$$



7 放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=-x+2$ で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答 $\frac{20}{3}\pi$

解説

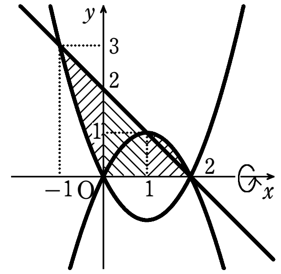
$x^2-2x=-x+2$ とすると，$x^2-x-2=0$ から

$x=-1,\ 2$

放物線 $y=x^2-2x$ の x 軸より下側の部分を，x 軸に関して対称に折り返すと右図のようになり，題意の回転体の体積は，図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転すると得られる。

このとき，折り返してできる放物線 $y=-x^2+2x$ と直線 $y=-x+2$ の交点の x 座標は，$-x^2+2x=-x+2$ を解いて　　$x=1,\ 2$

よって，求める立体の体積 V は



$$V=\pi\int_{-1}^{0}\{(-x+2)^2-(x^2-2x)^2\}dx+\pi\int_0^1(-x+2)^2dx+\pi\int_1^2(-x^2+2x)^2dx$$

$$=\pi\int_{-1}^{0}(-x^4+4x^3-3x^2-4x+4)dx+\pi\int_0^1(x-2)^2dx+\pi\int_1^2(x^4-4x^3+4x^2)dx$$

$$=\pi\left[-\frac{x^5}{5}+x^4-x^3-2x^2+4x\right]_{-1}^{0}+\pi\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_0^1+\pi\left[\frac{x^5}{5}-x^4+\frac43x^3\right]_1^2$$

$$=\frac{19}{5}\pi+\frac73\pi+\frac{8}{15}\pi=\frac{100}{15}\pi=\frac{20}{3}\pi$$

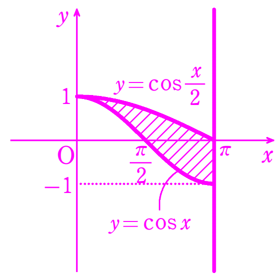
8 2 曲線 $y=\cos\frac{x}{2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ を考える。

(1) 上の 2 曲線と直線 $x=\pi$ を描き，これらで囲まれる領域を斜線で図示せよ。

(2) (1) で示した斜線部分の領域を x 軸の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

解答 (1) ［図］境界線を含む

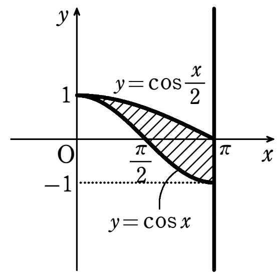
(2) $\frac{\pi(2\pi+3\sqrt{3})}{8}$



解説

(1) 曲線 $y=\cos\frac{x}{2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と曲線 $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ および，直線 $x=\pi$ は右の図の実線部分のようになる。

よって，これらの曲線と直線で囲まれる領域は，右の図の斜線部分である。



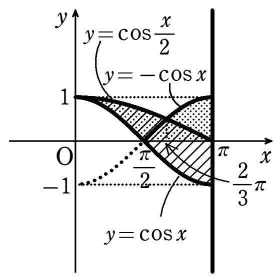
(2) 求める体積は，右の図の網目の部分を x 軸の周りに 1 回転すると得られる。

$\cos\frac{x}{2}=-\cos x$ とすると　　$\cos\frac{x}{2}=-2\cos^2\frac{x}{2}+1$

ゆえに，$\left(\cos\frac{x}{2}+1\right)\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$ から

$\cos\frac{x}{2}=-1,\ \frac12$

$0\leqq x\leqq\pi$ より $0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから



$0\leqq\cos\frac{x}{2}\leqq 1$

よって，$\cos\frac{x}{2}=\frac12$ から　　$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}$　すなわち　$x=\frac23\pi$

したがって，求める体積は

$$V=\pi\int_0^{\frac23\pi}\cos^2\frac{x}{2}\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx+\pi\int_{\frac23\pi}^{\pi}\cos^2x\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac23\pi}\frac{\cos x+1}{2}dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos2x+1}{2}dx+\pi\int_{\frac23\pi}^{\pi}\frac{\cos2x+1}{2}dx$$

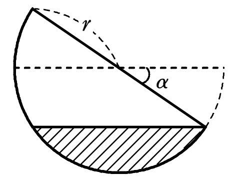
$$=\frac{\pi}{2}\left(\left[\sin x+x\right]_0^{\frac23\pi}-\left[\frac{\sin2x}{2}+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\sin2x}{2}+x\right]_{\frac23\pi}^{\pi}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac23\pi-\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{\sqrt3}{4}-\frac23\pi\right)$$

$$=\frac{\pi(2\pi+3\sqrt3)}{8}$$

9 水を満たした半径 r の半球形の容器がある。これを静かに角 α だけ傾けたとき，こぼれ出た水の量を r，α で表せ。

(α は弧度法で表された角とする。)



解答 $\frac{\pi}{3}r^3\sin\alpha(3-\sin^2\alpha)$

解説

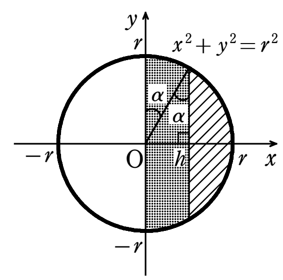
図のように座標軸をとる。

水がこぼれ出た後，水面が h だけ下がったとすると

$h=r\sin\alpha$

流れ出た水の量は，右の図の網目の部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積に等しい。

その体積は



$$\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$=\pi\left(r^2h-\frac{h^3}{3}\right)=\frac{\pi}{3}h(3r^2-h^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}r\sin\alpha(3r^2-r^2\sin^2\alpha)=\frac{\pi}{3}r^3\sin\alpha(3-\sin^2\alpha)$$

10 次の回転体の体積 V を求めよ。

(1) 楕円 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体

(2) 曲線 C：$y=\log(x^2+1)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と直線 $y=\log2$，および y 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体

解答 (1) 24π　　(2) $(1-\log2)\pi$

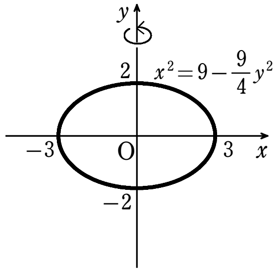
解説

(1)　$x=0$ とすると　　$y=\pm 2$

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ から　　$x^2=9-\dfrac{9}{4}y^2$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_{-2}^{2}x^2dy=2\pi\int_0^2\left(9-\frac{9}{4}y^2\right)dy$

$=2\pi\left[9y-\dfrac{3}{4}y^3\right]_0^2=24\pi$



(2)　$y=\log(x^2+1)$ から

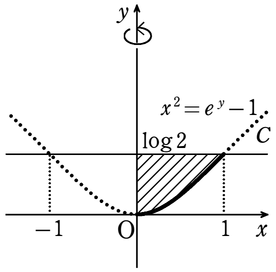
$x^2+1=e^y$　すなわち　$x^2=e^y-1$

$0\leqq x\leqq 1$ では $0\leqq y\leqq \log 2$ である。

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\log 2}x^2dy=\pi\int_0^{\log 2}(e^y-1)dy$

$=\pi\Big[e^y-y\Big]_0^{\log 2}=\pi(2-\log 2-1)$

$=(1-\log 2)\pi$



別解　$y=\log(x^2+1)$ から

$dy=\dfrac{2x}{x^2+1}dx$

y	$0\longrightarrow \log 2$
x	$0\longrightarrow\ \ 1$

y と x の対応は右のようになる。

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^{\log 2}x^2dy=\pi\int_0^1 x^2\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\left(2x-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx=\pi\Big[x^2-\log(x^2+1)\Big]_0^1=(1-\log 2)\pi$

11　次の曲線や直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2$，$y=\sqrt{x}$　　　　(2)　$y=-x^4+2x^2$ $(x\geqq 0)$，x 軸

(3)　$y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=-1$，y 軸

解答　(1)　$\dfrac{3}{10}\pi$　　(2)　$\dfrac{4}{3}\pi$　　(3)　$\pi^3-4\pi$

解説

(1)　$y=\sqrt{x}$ から　　$x=y^2$

$y=x^2$ に代入して　　$y=y^4$

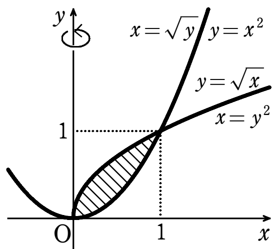
よって　　$y(y^3-1)=0$

ゆえに　　$y=0,\ 1$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_0^1 y\,dy-\pi\int_0^1 y^4dy$

$=\pi\displaystyle\int_0^1(y-y^4)dy$

$=\pi\left[\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{y^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{3}{10}\pi$



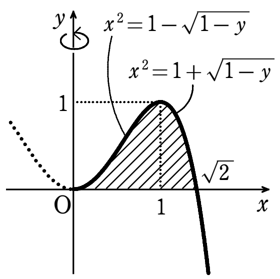
(2)　$y'=-4x^3+4x=-4x(x^2-1)$

$=-4x(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると，$x\geqq 0$ で　　$x=0,\ 1$

$x\geqq 0$ における増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	0	$+$	0	$-$
y	0	↗	1	↘



$x^4-2x^2+y=0$ から　　$x^2=1\pm\sqrt{1-y}$

したがって，図から

$V=\pi\displaystyle\int_0^1(1+\sqrt{1-y})dy-\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-y})dy$

$=\pi\displaystyle\int_0^1\{(1+\sqrt{1-y})-(1-\sqrt{1-y})\}dy$

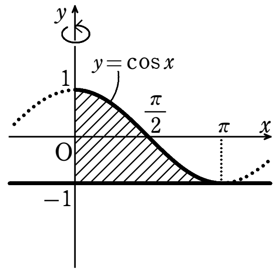
$=2\pi\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy=-2\pi\cdot\frac{2}{3}\Big[(1-y)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{4}{3}\pi$

(3)　右図から，体積は　　$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}x^2dy$

$y=\cos x$ から　　$dy=-\sin x\,dx$

y と x の対応は次のようになる。

y	$-1\longrightarrow 1$
x	$\pi\ \longrightarrow 0$



よって　　$V=\pi\displaystyle\int_{\pi}^{0}(-x^2\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx$

$=\pi\left\{\Big[x^2(-\cos x)\Big]_0^{\pi}+\displaystyle\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx\right\}$

$=\pi\left(\pi^2+\Big[2x\sin x\Big]_0^{\pi}-\displaystyle\int_0^{\pi}2\sin x\,dx\right)$

$=\pi\left(\pi^2+\Big[2\cos x\Big]_0^{\pi}\right)=\pi^3-4\pi$

12　放物線 $y=2x-x^2$ と x 軸で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　$\dfrac{8}{3}\pi$

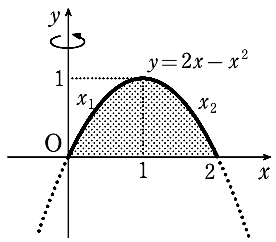
解説

$y=2x-x^2$ のグラフは右図のようになる。

このグラフの $0\leqq x\leqq 1$ の部分の x 座標を x_1 とし，

$1\leqq x\leqq 2$ の部分の x 座標を x_2 とすると，求める立体の

体積 V は　　$V=\pi\displaystyle\int_0^1 {x_2}^2dy-\pi\int_0^1 {x_1}^2dy$



ここで，$y=2x-x^2$ から　　$dy=(2-2x)dx$

積分区間の対応は

x_1 については [1],

x_2 については [2]

のようになる。

[1]

y	$0\longrightarrow 1$
x	$0\longrightarrow 1$

[2]

y	$0\longrightarrow 1$
x	$2\longrightarrow 1$

よって　　$V=\pi\displaystyle\int_2^1 x^2(2-2x)dx-\pi\int_0^1 x^2(2-2x)dx=-\pi\int_0^2 x^2(2-2x)dx$

$=2\pi\displaystyle\int_0^2(x^3-x^2)dx=2\pi\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2\pi\left(4-\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}\pi$

別解　求める立体の体積を V とすると

$V=2\pi\displaystyle\int_0^2 x(2x-x^2)dx=2\pi\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$

$=2\pi\left[-\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{2}{3}x^3\right]_0^2=2\pi\left(-4+\dfrac{16}{3}\right)=\dfrac{8}{3}\pi$

13　曲線 $y=e^x$，直線 $x=1$，x 軸，y 軸によって囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答　2π

解説

求める体積は

$2\pi\displaystyle\int_0^1 xe^xdx=2\pi\left(\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^xdx\right)=2\pi\left(e-\Big[e^x\Big]_0^1\right)=2\pi\{e-(e-1)\}=2\pi$

14　曲線 C：$y=\log x$ に原点から接線 ℓ を引く。曲線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた図形を D とするとき，次の回転体の体積を求めよ。

(1)　D を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_x

(2)　D を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V_y

解答　(1)　$\dfrac{2(3-e)}{3}\pi$　　(2)　$\dfrac{(e^2-3)\pi}{6}$

解説

曲線 C 上の点 $(a,\ \log a)$ における接線の方程式は，

$y'=\dfrac{1}{x}$ であるから

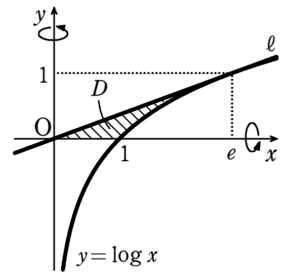
$y-\log a=\dfrac{1}{a}(x-a)$

この直線が原点を通るから　　$\log a=1$

ゆえに　　$a=e$

よって，接線 ℓ の方程式は　　$y=\dfrac{x}{e}$

また，接点の座標は　　$(e,\ 1)$



(1)　$V_x=\dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot e-\pi\displaystyle\int_1^e(\log x)^2dx=\frac{e\pi}{3}-\pi\int_1^e(x)'(\log x)^2dx$

$=\dfrac{e\pi}{3}-\pi\left\{\Big[x(\log x)^2\Big]_1^e-2\displaystyle\int_1^e\log x\,dx\right\}$

$=\dfrac{e\pi}{3}-\pi\left(e-2\Big[x\log x-x\Big]_1^e\right)=\dfrac{2(3-e)}{3}\pi$

(2)　$y=\log x$ から　　$x=e^y$

$V_y=\pi\displaystyle\int_0^1(e^y)^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot e^2\cdot 1=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1-\frac{e^2\pi}{3}=\frac{(e^2-3)\pi}{6}$

15　曲線 $x=\tan\theta$，$y=\cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

解答　$\pi(4-\pi)$

解説

$y=0$ とすると　　$\cos 2\theta=0$

$-\pi<2\theta<\pi$ であるから　　$2\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\pm\dfrac{\pi}{4}$

このとき　　$x=\pm 1$（複号同順）

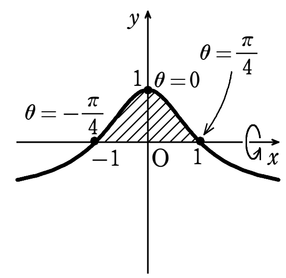
θ の値に対応した x，y の値の変化は表のようになり，曲線と x 軸で囲まれるのは $-\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
x		↗	-1	↗	0	↗	1	↗	
y		↗	0	↗	1	↘	0	↘	

$x=\tan\theta$ から

$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$-1\ \longrightarrow\ 1$
θ	$-\frac{\pi}{4}\ \longrightarrow\ \frac{\pi}{4}$



よって，求める体積は

$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{1}y^2dx=\pi\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\cos^2\theta-1)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$=2\pi\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(4\cos^2\theta-4+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos 2\theta-2+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)d\theta$

$$=2\pi\left[\sin 2\theta-2\theta+\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2\pi\left(1-\frac{\pi}{2}+1\right)=\pi(4-\pi)$$

16 曲線 C：$x=\cos t$，$y=2\sin^3 t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ がある。

(1) 曲線 C と x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) (1) で考えた図形を y 軸の周りに 1 回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

解答 (1) $\frac{3}{8}\pi$ (2) $\frac{4}{5}\pi$

解説

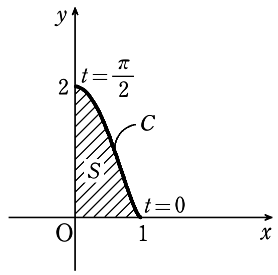
(1) $\frac{dx}{dt}=-\sin t$，$\frac{dy}{dt}=6\sin^2 t\cos t$

$y=0$ とすると $\sin^3 t=0$

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ であるから $t=0$ このとき $x=1$

x，y の増減は左下の表のようになり，曲線 C の概形は右下の図のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	$-$
x	1	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	0
y	0	↗	2



ゆえに，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^3 t(-\sin t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^4 t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\cos 2t+\frac{1}{2}\cos^2 2t\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}-\cos 2t+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\cos 4t}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{4}-\cos 2t+\frac{1}{4}\cos 4t\right)dt=\left[\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{16}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{8}\pi$$

(2) 求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^2 x^2 dy=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\cdot 6\sin^2 t\cos t\,dt=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cdot\sin^2 t\cos t\,dt$$

$$=6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t-\sin^4 t)(\sin t)'dt=6\pi\left[\frac{1}{3}\sin^3 t-\frac{1}{5}\sin^5 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\pi=\frac{4}{5}\pi$$

17 次の図形を直線 $y=x$ の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形

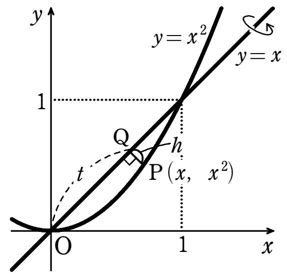
(2) 曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ と 2 直線 $y=x$，$x+y=\pi$ で囲まれた図形

解答 (1) $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$ (2) $\frac{\sqrt{2}(\pi^2-9)\pi^2}{12}$

解説

(1) 与えられた放物線と直線で囲まれた部分は右の図のようになる。放物線上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き，

$\mathrm{PQ}=h$，$\mathrm{OQ}=t$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$ とする。



このとき $h=\frac{|x-x^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$

$t=\sqrt{2}x-h=\sqrt{2}x-\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{2}}$

ゆえに $dt=\frac{2x+1}{\sqrt{2}}dx$

t と x の対応は表のようになるから

t	$0\longrightarrow\sqrt{2}$
x	$0\longrightarrow 1$

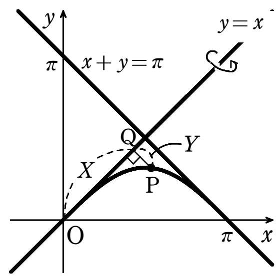
$$V=\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2 dt=\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)(2x+1)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(2x^5-3x^4+x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^6}{3}-\frac{3}{5}x^5+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{\pi}{30\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

(2) 曲線 $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ \sin x)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き，$\mathrm{OQ}=X$ $\left(0\leqq X\leqq\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$，$\mathrm{PQ}=Y$ とする。



このとき，右下の図から

$X=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sin x}{\sqrt{2}}=\frac{x+\sin x}{\sqrt{2}}$

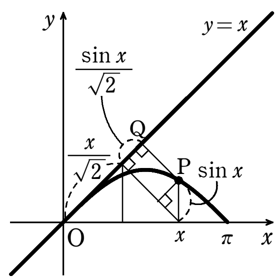
また，$\mathrm{P}(x,\ \sin x)$ と直線 $x-y=0$ の距離は Y であるから $Y=\frac{|x-\sin x|}{\sqrt{2}}$

求める体積 V は

$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}Y^2 dX$

$dX=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos x)dx$

X	$0\longrightarrow\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
x	$0\longrightarrow\pi$



X と x の対応は右のようになる。

よって

$$V=\pi\int_0^{\pi}\frac{(\sin x-x)^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}(\sin^2 x-2x\sin x+x^2)(1+\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^{\pi}(\sin^2 x-2x\sin x+x^2+\sin^2 x\cos x-2x\sin x\cos x+x^2\cos x)dx\quad\cdots①$$

ここで

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx=\Big[-2x\cos x\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2\cos x\,dx=2\pi+2\Big[\sin x\Big]_0^{\pi}=2\pi,$$

$$\int_0^{\pi}x^2 dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3},$$

$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x(\sin x)'dx=\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\pi}=0,$$

$$\int_0^{\pi}2x\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx=\int_0^{\pi}x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\Big[\sin 2x\Big]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\pi}x^2\cos x\,dx=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}2x\sin x\,dx=-2\pi$$

これらを ① に代入して

$$V=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\pi}{2}-2\pi+\frac{\pi^3}{3}+0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+(-2\pi)\right\}=\frac{(\pi^2-9)\pi^2}{6\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\pi^2-9)\pi^2}{12}$$

18 xyz 空間において，次の連立不等式が表す立体を考える。

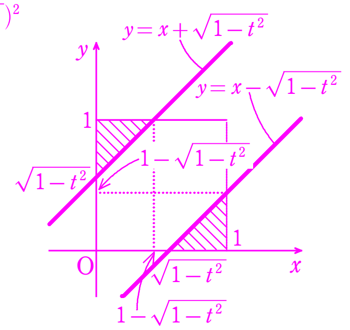
$$0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq z\leqq 1,\ x^2+y^2+z^2-2xy-1\geqq 0$$

(1) この立体を平面 $z=t$ で切ったときの断面を xy 平面に図示し，この断面の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) この立体の体積 V を求めよ。

解答 (1) [図] 境界線を含む，$S(t)=\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)^2$

(2) $\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$



解説

(1) $0\leqq z\leqq 1$ であるから $0\leqq t\leqq 1$

$x^2+y^2+z^2-2xy-1\geqq 0$ において，$z=t$ とすると

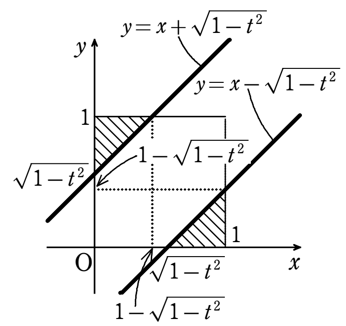
$x^2+y^2+t^2-2xy-1\geqq 0$

よって $(y-x)^2\geqq 1-t^2$

すなわち $y-x\leqq-\sqrt{1-t^2}$ または $\sqrt{1-t^2}\leqq y-x$

ゆえに $y\leqq x-\sqrt{1-t^2}$ または $y\geqq x+\sqrt{1-t^2}$

よって，平面 $z=t$ で切ったときの断面は，右の図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。



また $S(t)=2\cdot\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)^2$

$=\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)^2$

(2) $V=\int_0^1 S(t)dt=\int_0^1\left(1-\sqrt{1-t^2}\right)^2 dt$

$=\int_0^1\left(2-t^2-2\sqrt{1-t^2}\right)dt$

$=\left[2t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1-2\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

$\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$ は半径が 1 の四分円の面積を表すから

$$V=2-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 1^2=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

19 4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする三角錐を C，4 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(-1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする三角錐を x 軸の正の方向に a $(0<a<1)$ だけ平行移動したものを D とする。

このとき，C と D の共通部分の体積 $V(a)$ を求めよ。また，$V(a)$ が最大になるときの a

の値を求めよ。

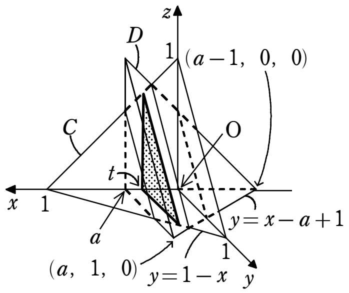
解答 $V(a)=\frac{1}{24}(7a^3-18a^2+12a)$，$a=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

解説

三角錐 C，D について，xy 平面上にある辺で座標軸に平行でないものは，それぞれ次の式で表される。

C の辺：$y=1-x\quad(0\leqq x\leqq 1)$

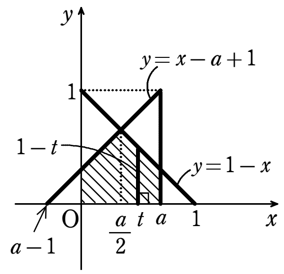
D の辺：$y=x-a+1\quad(a-1\leqq x\leqq a)$



$1-x=x-a+1$ とすると　$x=\frac{a}{2}$

C と D の共通部分は平面 $x=\frac{a}{2}$ に関して対称である。

平面 $x=t\left(\frac{a}{2}\leqq t\leqq a\right)$ による切り口は，直角を挟む2辺の長さがともに $1-t$ の直角二等辺三角形であり，その面積は　$\frac{1}{2}(1-t)^2$



よって　$V(a)=2\int_{\frac{a}{2}}^{a}\frac{1}{2}(1-t)^2dt=\int_{\frac{a}{2}}^{a}(t-1)^2dt$

$=\left[\frac{1}{3}(t-1)^3\right]_{\frac{a}{2}}^{a}=\frac{1}{3}\left\{(a-1)^3-\left(\frac{a}{2}-1\right)^3\right\}$

$=\frac{1}{24}(7a^3-18a^2+12a)$

ゆえに　$V'(a)=\frac{1}{24}(21a^2-36a+12)=\frac{1}{8}(7a^2-12a+4)$

$V'(a)=0$ とすると，$0<a<1$ から　$a=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$

よって，$0<a<1$ における $V(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$	$\cdots$	1
$V'(a)$		$+$	0	$-$	
$V(a)$		↗	極大	↘	

したがって，$V(a)$ は $a=\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$ で極大かつ最大となる。

20 xyz 空間において，2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{Q}(-1,\ 1,\ 0)$ を考える。線分 PQ を x 軸の周りに1回転して得られる立体を S とする。立体 S と，2つの平面 $x=1$ および $x=-1$ で囲まれる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{4}{3}\pi$

解説

線分 PQ 上の点 A は，O を原点，s を実数として

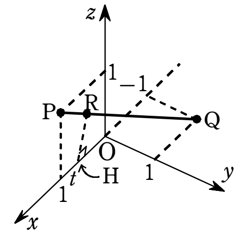
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ (0\leqq s\leqq 1)$　と表され

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 0,\ 1)+s(-2,\ 1,\ -1)=(1-2s,\ s,\ 1-s)$

$1-2s=t$ とすると　$s=\frac{1-t}{2}$

よって，線分 PQ 上の点で x 座標が $t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ である点 R の座標は

$\mathrm{R}\left(t,\ \frac{1-t}{2},\ \frac{1+t}{2}\right)$



$\mathrm{H}(t,\ 0,\ 0)$ とすると，立体 S を平面 $x=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切ったときの断面は，中心が H，半径が RH の円である。

その断面積は

$$\pi\mathrm{RH}^2=\pi\left\{\left(\frac{1-t}{2}\right)^2+\left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right\}=\frac{\pi}{2}(t^2+1)$$

よって，求める体積は

$$\int_{-1}^{1}\frac{\pi}{2}(t^2+1)dt=\pi\int_0^1(t^2+1)dt=\pi\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_0^1=\frac{4}{3}\pi$$

21 xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸の周りに1回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答 $\frac{8}{3}\pi$

解説

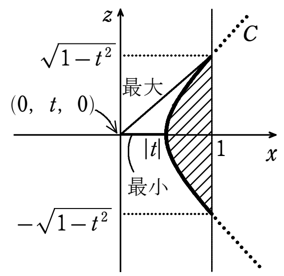
円錐 V の側面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)\ (0\leqq x\leqq 1,\ |y|\leqq 1)$ とする。

円錐 V 上の点 P と点 $\mathrm{Q}(x,\ 0,\ 0)$ の距離は x であるから

$(x-x)^2+y^2+z^2=x^2$

よって　$x^2-z^2=y^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$

円錐 V の平面 $y=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ による切り口は，曲線 $C：x^2-z^2=t^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ と直線 $x=1$ で囲まれた図形となる。



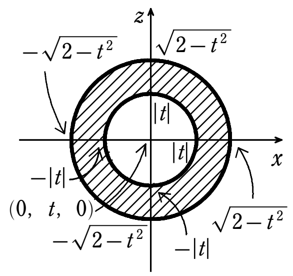
点 $(0,\ t,\ 0)$ と，この図形内の点との距離の最大値は

$\sqrt{1^2+(\sqrt{1-t^2})^2}=\sqrt{2-t^2}$

最小値は　$|t|$

したがって，円錐 V を y 軸の周りに1回転させてできた立体の，平面 $y=t$ による切断面は右の図のようになる。

この図形の面積は　$\pi(\sqrt{2-t^2})^2-\pi|t|^2=2(1-t^2)\pi$



よって，求める立体の体積は

$\int_{-1}^{1}2(1-t^2)\pi dt=-2\pi\int_{-1}^{1}(t+1)(t-1)dt$

$=-2\pi\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\{1-(-1)\}^3=\frac{8}{3}\pi$

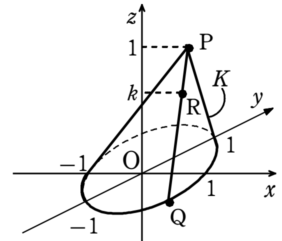
22 xy 平面上の原点を中心とする単位円を底面とし，点 $\mathrm{P}(t,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を K とする。t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，円錐 K の表面および内部が通過する部分の体積を求めよ。

解答 $\frac{\pi+2}{3}$

解説

円錐 K の底面の円周上の点を $\mathrm{Q}(x_0,\ y_0,\ 0)$ とし，K の平面 $z=k\ (0\leqq k<1)$ による切り口と線分 PQ との交点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ k)$ とする。

このとき，実数 l を用いて $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=l\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が成り立つ。



よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+l\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$=(t,\ 0,\ 1)+l(x_0-t,\ y_0,\ -1)$

$=(t+l(x_0-t),\ ly_0,\ 1-l)$

すなわち　$x=t+l(x_0-t)$，$y=ly_0$，$k=1-l$

ここで，$k=1-l$ より $l=1-k$ であるから

$x=t+(1-k)(x_0-t)$，$y=(1-k)y_0$

ゆえに　$x_0=\frac{x-t}{1-k}+t$，$y_0=\frac{y}{1-k}$　……①

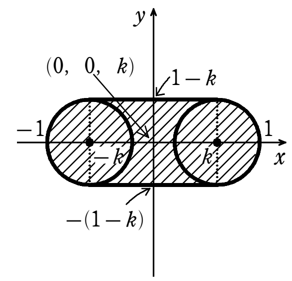
また　$x_0^2+y_0^2=1$

① を代入して　$\left(\frac{x-t}{1-k}+t\right)^2+\left(\frac{y}{1-k}\right)^2=1$

整理すると　$(x-kt)^2+y^2=(1-k)^2$

よって，円錐 K の平面 $z=k$ による切り口は，中心 $(kt,\ 0,\ k)$，半径 $1-k$ の円である。

t が $-1\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，円錐 K の表面および内部が通過する部分を平面 $z=k$ で切った断面は，右の図のようになる。斜線部分の面積を $S(k)$ とすると



$S(k)=\pi(1-k)^2+2(1-k)\cdot 2k$

$=\pi(k-1)^2+4k-4k^2$

したがって，求める体積 V は

$V=\int_0^1 S(k)dk=\int_0^1\{\pi(k-1)^2+4k-4k^2\}dk$

$=\left[\frac{\pi}{3}(k-1)^3+2k^2-\frac{4}{3}k^3\right]_0^1=\frac{\pi+2}{3}$

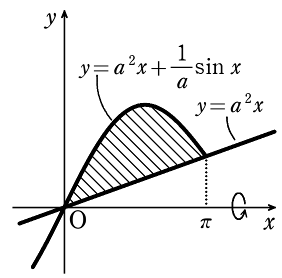
23 $a>0$ に対し，区間 $0\leqq x\leqq\pi$ において曲線 $y=a^2x+\frac{1}{a}\sin x$ と直線 $y=a^2x$ によって囲まれる部分を x 軸の周りに回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1)　$V(a)$ を a で表せ。　(2)　$V(a)$ が最小になるように a の値を定めよ。

解答 (1)　$V(a)=\frac{\pi^2}{2}\left(4a+\frac{1}{a^2}\right)$　(2)　$a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

解説

(1)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき，$a^2x+\frac{1}{a}\sin x\geqq a^2x\geqq 0$ であるから



$V(a)=\pi\int_0^{\pi}\left\{\left(a^2x+\frac{1}{a}\sin x\right)^2-(a^2x)^2\right\}dx$

$=\pi\int_0^{\pi}\left(2ax\sin x+\frac{1}{a^2}\sin^2 x\right)dx$

ここで

$\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\pi+\left[\sin x\right]_0^{\pi}=\pi$

$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

よって　$V(a)=\pi\left(2a\pi+\frac{\pi}{2a^2}\right)=\frac{\pi^2}{2}\left(4a+\frac{1}{a^2}\right)$

(2) $V'(a)=\frac{\pi^2}{2}\left(4-\frac{2}{a^3}\right)=\frac{\pi^2(2a^3-1)}{a^3}$

$V'(a)=0$ とすると　$a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$V(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\cdots$
$V'(a)$		$-$	0	$+$
$V(a)$		↘	極小	↗

よって，$V(a)$ が最小となる a の値は　$a=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

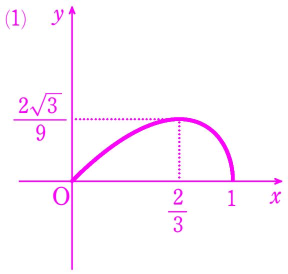
24 座標平面上の曲線 C を，媒介変数 $0\leqq t\leqq 1$ を用いて $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$ と定める。

(1) 曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

解答　(1) [図]

(2) $\frac{32}{105}\pi$



解説

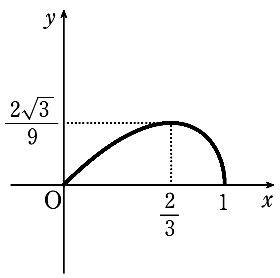
(1) $\frac{dx}{dt}=-2t$，$\frac{dy}{dt}=1-3t^2$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$\frac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=0$

$\frac{dy}{dt}=0$ とすると，$3t^2=1$ から　$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

x，y の増減は左下の表のようになるから，曲線 C の概形は右下の図のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$-$	$-$	
x	1	↘	$\frac{2}{3}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0



別解　$x=1-t^2$，$0\leqq t\leqq 1$ から，x の値の範囲は　$0\leqq x\leqq 1$

また　$t^2=1-x$　　$t\geqq 0$ であるから　$t=\sqrt{1-x}$

よって　$y=\sqrt{1-x}-\sqrt{(1-x)^3}$

ゆえに　$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-x}}-\frac{3}{2}\sqrt{1-x}\cdot(-1)=-\frac{3x-2}{2\sqrt{1-x}}$

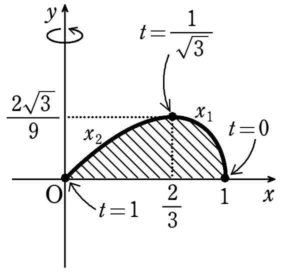
$y'=0$ とすると　$x=\frac{2}{3}$

よって，y の増減表は右のようになる。

この増減表を利用して，曲線 C の概形をかく。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

(2) $0\leqq t\leqq\frac{1}{\sqrt{3}}$ における x を x_1，$\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq 1$ における x を x_2 とすると，求める体積 V は



$$V=\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}x_1{}^2dy-\pi\int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{9}}x_2{}^2dy$$

よって　$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^2\frac{dy}{dt}dt-\int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}}x^2\frac{dy}{dt}dt$

$=\int_0^1 x^2\frac{dy}{dt}dt=\int_0^1(1-t^2)^2(1-3t^2)dt$

$=\int_0^1(1-5t^2+7t^4-3t^6)dt=\left[t-\frac{5}{3}t^3+\frac{7}{5}t^5-\frac{3}{7}t^7\right]_0^1=\frac{32}{105}$

したがって　$V=\frac{32}{105}\pi$

参考　$V=2\pi\int_0^1 xydx=2\pi\int_1^0(1-t^2)(t-t^3)(-2t)dt$

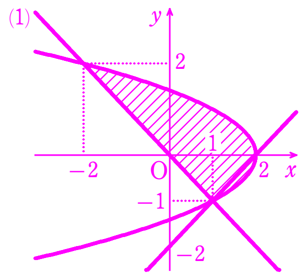
$=4\pi\int_0^1(t^6-2t^4+t^2)dt=4\pi\left[\frac{t^7}{7}-\frac{2}{5}t^5+\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{32}{105}\pi$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$1\longrightarrow 0$

25 連立不等式 $x+y^2\leqq 2$，$x+y\geqq 0$，$x-y\leqq 2$ で表される図形を S とし，S を直線 $y=-x$ の周りに1回転して得られる立体の体積を V とする。

(1) S を xy 平面上に図示せよ。　　(2) V を求めよ。

解答　(1) [図] 境界線を含む　(2) $\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi$



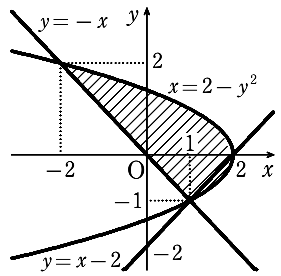
解説

(1) $x+y^2\leqq 2$ から　$x\leqq 2-y^2$

$x+y\geqq 0$ から　$y\geqq -x$

$x-y\leqq 2$ から　$y\geqq x-2$

よって，図形 S は右の図の斜線部分のようになる。ただし，境界線を含む。



(2) 曲線 $x=2-y^2$ 上の点 $\mathrm{P}(2-s^2,\ s)$ $(0\leqq s\leqq 2)$ から直線 $y=-x$ に垂線 PQ を下ろし，$\mathrm{PQ}=h$ とする。

直線 PQ の傾きは1であるから，その方程式は

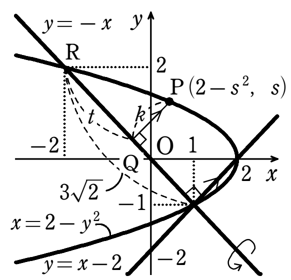
$$y-s=x-(2-s^2)$$

$x=-y$ を代入することにより，点 Q の y 座標は

$$y=\frac{s^2+s-2}{2}$$

よって　$h=\sqrt{2}\left(s-\frac{s^2+s-2}{2}\right)=\frac{-s^2+s+2}{\sqrt{2}}$

また，$\mathrm{R}(-2,\ 2)$ とし，$\mathrm{RQ}=t$ とすると



$t=\sqrt{2}\left(2-\frac{s^2+s-2}{2}\right)$

ゆえに　$dt=\sqrt{2}\left(-s-\frac{1}{2}\right)ds$　すなわち　$dt=-\sqrt{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)ds$

t と s の対応は右のようになるから

t	$0\longrightarrow 3\sqrt{2}$
s	$2\longrightarrow 0$

$V=\pi\int_0^{3\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_2^0\left(\frac{-s^2+s+2}{\sqrt{2}}\right)^2\left\{-\sqrt{2}\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}ds$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2(s^2-s-2)^2(2s+1)ds$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\int_0^2(2s^5-3s^4-8s^3+5s^2+12s+4)ds$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left[\frac{s^6}{3}-\frac{3}{5}s^5-2s^4+\frac{5}{3}s^3+6s^2+4s\right]_0^2$

$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(\frac{64}{3}-\frac{96}{5}-32+\frac{40}{3}+24+8\right)=\frac{58\sqrt{2}}{15}\pi$