数学演習(面積)R１．９．１２　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=-\cos^2 x \ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸，y 軸　　(2) $y=(3-x)e^x$，$x=0$，$x=2$，x 軸

2 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=-x^4+2x^3$　　(2) $y=x+\dfrac{4}{x}-5$　　(3) $y=10-9e^{-x}-e^x$

3 区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

4 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=xe^x$, $y=e^x$ $(0 \leqq x \leqq 1)$, $x=0$

(2) $y=\log\dfrac{3}{4-x}$, $y=\log x$

(3) $y=\sqrt{3}\cos x$, $y=\sin 2x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$

(4) $y=(\log x)^2$, $y=\log x^2$ $(x>0)$

5 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=e\log x$, $y=-1$, $y=2e$, y 軸

(2) $y=-\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$, $y=\dfrac{1}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$, y 軸

6 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=y^2-2y-3$, $y=-x-1$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y=1$, $y=\dfrac{1}{2}$, y 軸

(3) $y=\tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$, $y=\sqrt{3}$, $y=1$, y 軸

$\boxed{7}$ 曲線 $y=\log x$ が曲線 $y=ax^2$ と接するように正の定数 a の値を定めよ。また，そのとき，これらの曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{8}$ 2 つの楕円 $x^2+3y^2=4$ …… ①，$3x^2+y^2=4$ …… ② がある。

(1) 2 つの楕円の 4 つの交点の座標を求めよ。

(2) 2 つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の面積を求めよ。

(1) 連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$，$xy \geqq \sqrt{3}$，$x>0$，$y>0$ で表される領域の面積

(2) 2 つの楕円 $x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$，$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ の内部の重なった部分の面積

$\boxed{10}$ 曲線 $(x^2-2)^2+y^2=4$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{11}$ 次の図形の面積 S を求めよ。

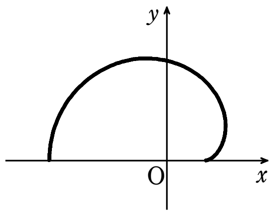
(1) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形

(2) 曲線 $y^2=(x+3)x^2$ で囲まれた図形

(3) 曲線 $2x^2-2xy+y^2=4$ で囲まれた図形

$\boxed{12}$ 媒介変数 t によって，$x=4\cos t$，$y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{13}$ 媒介変数 t によって，$x=2\cos t-\cos 2t$，$y=2\sin t-\sin 2t$ $(0 \leqq t \leqq \pi)$ と表される右図の曲線と，x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



$\boxed{14}$ 媒介変数 t によって，$x=2t+t^2$，$y=t+2t^2$ $(-2 \leqq t \leqq 0)$ と表される曲線と，y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

$\boxed{15}$ 方程式 $\sqrt{2}(x-y)=(x+y)^2$ で表される曲線 A について，次のものを求めよ。

(1)　曲線 A を原点 O を中心として $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転させてできる曲線の方程式

(2)　曲線 A と直線 $x=\sqrt{2}$ で囲まれる図形の面積

$\boxed{16}$ 曲線 C_1：$y=k\sin x$ $(0<x<2\pi)$ と，曲線 C_2：$y=\cos x$ $(0<x<2\pi)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$k>0$ とする。

(1) C_1，C_2 の 2 交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，$\sin\alpha$，$\sin\beta$ を k を用いて表せ。

(2) C_1，C_2 で囲まれた図形の面積が 10 であるとき，k の値を求めよ。

$\boxed{17}$ $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，2 曲線 $y=\tan x$，$y=a\sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように，正の実数 a の値を定めよ。

$\boxed{18}$ 曲線 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれる図形を E とする。曲線上の点 $(t,\ \cos t)$ を通る傾きが 1 の直線 ℓ で E を分割する。こうして得られた 2 つの図形の面積が等しくなるとき，$\cos t$ の値を求めよ。

$\boxed{19}$ xy 平面上に 2 曲線 C_1：$y=e^x-2$ と C_2：$y=3e^{-x}$ がある。

(1) C_1 と C_2 の共有点 P の座標を求めよ。

(2) 点 P を通る直線 ℓ が，C_1，C_2 および y 軸によって囲まれた部分の面積を 2 等分するとき，ℓ の方程式を求めよ。

$\boxed{20}$ 曲線 C：$y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)\ (t>1)$ における接線を ℓ とする。C と y 軸の共有点を A，ℓ と x 軸の交点を Q とする。原点を O とし，△AOQ の面積を $S(t)$ とする。Q を通り y 軸に平行な直線，y 軸，C および ℓ で囲まれた図形の面積を $T(t)$ とする。

(1) $S(t)$，$T(t)$ を t で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{t\to1+0}\frac{T(t)}{S(t)}$ を求めよ。

$\boxed{21}$ $g(x)=\sin^3 x$ とし，$0<\theta<\pi$ とする。x の 2 次関数 $y=h(x)$ のグラフは原点を頂点とし，$h(\theta)=g(\theta)$ を満たすとする。このとき，曲線 $y=g(x)$ $(0\leqq x\leqq\theta)$ と直線 $x=\theta$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $G(\theta)$ とする。また，曲線 $y=h(x)$ と直線 $x=\theta$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $H(\theta)$ とする。

(1) $G(\theta)$，$H(\theta)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{G(\theta)}{H(\theta)}$ を求めよ。

$\boxed{22}$ $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　$0<a<\pi$ とするとき，曲線 C と接線 ℓ および直線 $x=\pi$ と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ (2 部分の和) を求めよ。

(3)　面積 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{23}$ $f(x)=e^x-x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　t は実数とする。このとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　$S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

$\boxed{24}$ 曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x \geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k$ を求めよ。

$\boxed{25}$ 曲線 $y=e^{-x}$ と $y=e^{-x}|\cos x|$ で囲まれた図形のうち，$(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ を満たす部分の面積を a_n とする（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）。

(1) a_1，a_n の値を求めよ。

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

$\boxed{26}$ 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし，(2) の a は $0<a<1$ を満たす定数とする。

(1) $y=\sqrt[3]{x^2}$，$y=|x|$

(2) $y=\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$，$y=a$

$\boxed{27}$ (1) 関数 $f(x)=xe^{-2x}$ の極値と曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の変曲点における接線，曲線 $y=f(x)$ および直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{28}$ 関数 $f(x)=ae^{2x}$ (a は定数) について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(b,\ f(b))$ における接線が $y=x$ であるとき，次の各問いに答えよ。

(1) a と b の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ と表す。このとき，曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{29}$ 媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=t^2$ (ただし $-2\pi \leqq t \leqq 2\pi$) で表された曲線で囲まれた領域の面積を求めよ。なお，領域が複数ある場合は，その面積の総和を求めよ。

$\boxed{30}$ 極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ と表される。これを用いて，極方程式 $r=2(1+\cos\theta)$ $\left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積を求めよ。

$\boxed{31}$ 極方程式 $r=1+\sin\dfrac{\theta}{2}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ で表される曲線 C と x 軸で囲まれる領域の面積を，次のことを利用して求めよ。

極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ と表される。

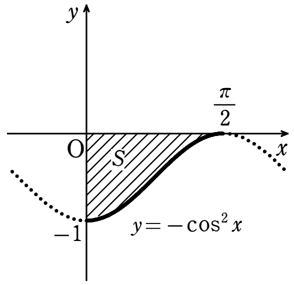
1 次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=-\cos^2 x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$, x 軸, y 軸　　(2) $y=(3-x)e^x$, $x=0$, $x=2$, x 軸

解答　(1) $\frac{\pi}{4}$　(2) $2e^2-4$

解説

(1) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ で $y\leqq 0$ であるから



$$S=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2 x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x+1}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

(2) $y'=-e^x+(3-x)e^x=(2-x)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=2$

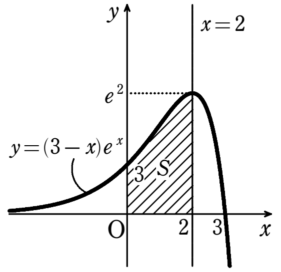
増減表は右のようになる。

x	…	2	…
y'	+	0	−
y	↗	e^2	↘

曲線と x 軸の交点の x 座標は,

$(3-x)e^x=0$ を解いて　$x=3$

$0\leqq x\leqq 2$ で $y>0$ であるから



$$S=\int_0^2(3-x)e^x dx=\Big[(3-x)e^x\Big]_0^2+\int_0^2 e^x dx$$

$$=e^2-3+\Big[e^x\Big]_0^2=2e^2-4$$

2 次の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=-x^4+2x^3$　　(2) $y=x+\frac{4}{x}-5$　　(3) $y=10-9e^{-x}-e^x$

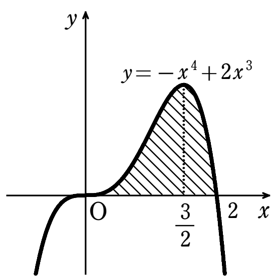
解答　(1) $\frac{8}{5}$　(2) $\frac{15}{2}-8\log 2$　(3) $20\log 3-16$

解説

(1) $y=0$ とすると　$x^4-2x^3=0$

ゆえに　$x^3(x-2)=0$　　よって　$x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ で $y\geqq 0$ であるから



$$S=\int_0^2(-x^4+2x^3)dx=\left[-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{2}\right]_0^2$$

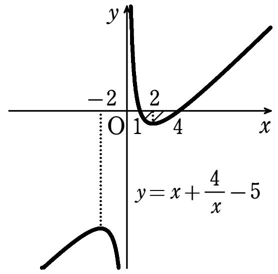
$$=-\frac{32}{5}+8=\frac{8}{5}$$

(2) $y'=1-\frac{4}{x^2}$　　$y'=0$ とすると　$x=\pm 2$

増減表は右のようになる。

曲線と x 軸の交点の x 座標は, $x+\frac{4}{x}-5=0$ から　$x^2-5x+4=0$

x	…	−2	…	0	…	2	…
y'	+	0	−	／	−	0	+
y	↗	極大	↘	／	↘	極小	↗



ゆえに　$(x-1)(x-4)=0$　　よって　$x=1,\ 4$

$1\leqq x\leqq 4$ で $y\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_1^4\left(x+\frac{4}{x}-5\right)dx=-\left[\frac{x^2}{2}+4\log x-5x\right]_1^4$$

$$=-(8+4\log 4-20)+\left(\frac{1}{2}-5\right)=\frac{15}{2}-8\log 2$$

(3) $y'=9e^{-x}-e^x=-e^{-x}(e^{2x}-9)$

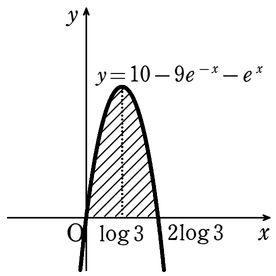
$=-e^{-x}(e^x+3)(e^x-3)$

$y'=0$ とすると, $e^x-3=0$ から

$x=\log 3$

増減表は右のようになる。

x	…	$\log 3$	…
y'	+	0	−
y	↗	極大	↘



曲線と x 軸の交点の x 座標は, $10-9e^{-x}-e^x=0$ の両辺に e^x を掛けて整理すると　$(e^x)^2-10e^x+9=0$

ゆえに　$(e^x-1)(e^x-9)=0$　　よって　$e^x=1,\ 9$

$e^x=1$ から　$x=0$　　$e^x=9$ から　$x=\log 9=2\log 3$

$0\leqq x\leqq 2\log 3$ で $y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_0^{2\log 3}(10-9e^{-x}-e^x)dx=\Big[10x+9e^{-x}-e^x\Big]_0^{2\log 3}$$

$$=20\log 3+9\cdot\frac{1}{9}-9-(9-1)=20\log 3-16$$

3 区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ において, 2つの曲線 $y=\sin x$, $y=\sin 2x$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答　5

解説

2 曲線の共有点の x 座標は, $\sin x=\sin 2x$

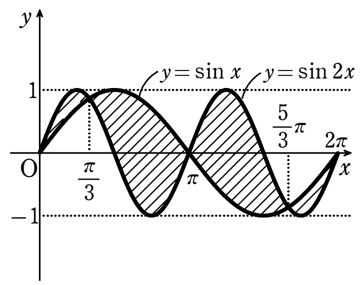
とすると　$\sin x=2\sin x\cos x$

よって　$\sin x(1-2\cos x)=0$

ゆえに　$\sin x=0$　または　$\cos x=\frac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ であるから

$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi$



また, 2曲線の位置関係は, 右の図のようになり, 面積を求める図形は点 $(\pi,\ 0)$ に関して対称。

よって, $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で考えると

$$\frac{1}{2}S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin 2x-\sin x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)-\left(-\frac{1}{2}-1\right)=\frac{5}{2}$$

したがって　$S=5$

4 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=xe^x$, $y=e^x$ $(0\leqq x\leqq 1)$, $x=0$　　(2) $y=\log\frac{3}{4-x}$, $y=\log x$

(3) $y=\sqrt{3}\cos x$, $y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$　　(4) $y=(\log x)^2$, $y=\log x^2$ $(x>0)$

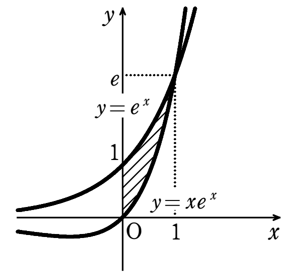
解答　(1) $e-2$　(2) $4\log 3-4$　(3) $\frac{7-4\sqrt{3}}{2}$　(4) 4

解説

(1) $xe^x=e^x$ とすると　$(x-1)e^x=0$

$e^x>0$ であるから, $x-1=0$ より　$x=1$

2 曲線の概形は右の図のようになり, $0\leqq x\leqq 1$ で $xe^x\leqq e^x$ であるから



$$S=\int_0^1(e^x-xe^x)dx=\int_0^1(1-x)e^x dx$$

$$=\int_0^1(1-x)(e^x)'dx=\Big[(1-x)e^x\Big]_0^1-\int_0^1(-e^x)dx$$

$$=-1+\Big[e^x\Big]_0^1=-1+(e-1)=e-2$$

(2) $y=\log\frac{3}{4-x}=\log 3-\log(4-x)$ の定義域は　$x<4$

$y=\log x$ の定義域は　$x>0$

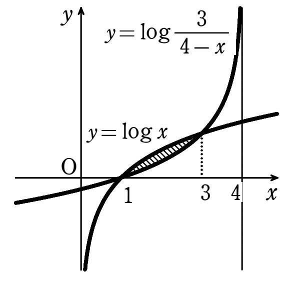
$\log\frac{3}{4-x}=\log x$ $(0<x<4)$ とすると　$\frac{3}{4-x}=x$

よって　$3=(4-x)x$

整理すると　$x^2-4x+3=0$

これを解くと　$x=1,\ 3$ $(0<x<4$ を満たす$)$

2 曲線の概形は右の図のようになる。



したがって

$$S=\int_1^3[\log x-\{\log 3-\log(4-x)\}]dx$$

$$=\int_1^3\{\log x-\log 3+\log(4-x)\}dx$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^3-(\log 3)\Big[x\Big]_1^3+\Big[(x-4)\log(4-x)-x\Big]_1^3$$

$$=(3\log 3-2)-2\log 3+(3\log 3-2)=4\log 3-4$$

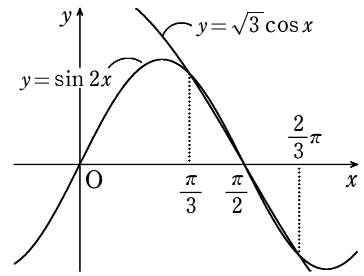
(3) $\sqrt{3}\cos x=\sin 2x$ とすると

$\sqrt{3}\cos x=2\sin x\cos x$

よって　$\cos x(2\sin x-\sqrt{3})=0$

ゆえに　$\cos x=0$　または　$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから　$x=\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi$



2 曲線の概形は右の図のようになり, 面積を求める図形は点 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称。

したがって

$$\frac{1}{2}S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\sqrt{3}\cos x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sqrt{3}\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$=-\frac{1}{2}\left\{-1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}-\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}$

よって　$S=\frac{7-4\sqrt{3}}{2}$

(4)　$y=(\log x)^2$ ……①，$y=\log x^2$ ……②　とする。

①について，$y=0$ とすると　$x=1$

$y'=2(\log x)\cdot\frac{1}{x}$

$y'=0$ とすると　$x=1$

増減表は右のようになる。

x	0	…	1	…
y'		−	0	+
y		↘	0	↗

$x>0$ であるから，② は　$y=2\log x$

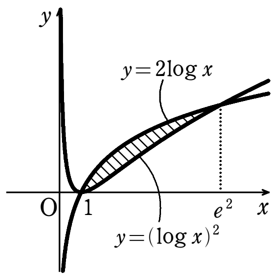
$y=0$ とすると　$x=1$

また，$x>0$ のとき，関数 ② は単調に増加する。

2 曲線 ①，② の交点の x 座標は，$(\log x)^2=2\log x$ から

$\log x(\log x-2)=0$

ゆえに　$\log x=0,\ 2$　　よって　$x=1,\ e^2$



2 曲線の概形は右の図のようになり，$1\leqq x\leqq e^2$ で $2\log x\geqq(\log x)^2$ であるから

$S=\int_1^{e^2}\{2\log x-(\log x)^2\}dx=\int_1^{e^2}(x)'\{2\log x-(\log x)^2\}dx$

$=\left[x\{2\log x-(\log x)^2\}\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}x\left(\frac{2}{x}-\frac{2\log x}{x}\right)dx$

$=2\int_1^{e^2}(\log x-1)dx=2\left[(x\log x-x)-x\right]_1^{e^2}=4$

5　次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=e\log x$，$y=-1$，$y=2e$，y 軸

(2)　$y=-\cos x$　$(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$，y 軸

解答　(1)　$e^3-e^{1-\frac{1}{e}}$　　(2)　$\frac{\pi}{2}$

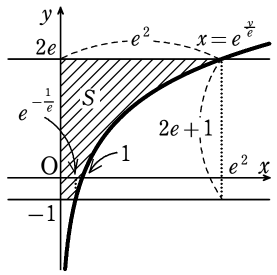
解説

(1)　$y=e\log x$ から　$x=e^{\frac{y}{e}}$

$-1\leqq y\leqq 2e$ で常に　$x>0$

よって　$S=\int_{-1}^{2e}e^{\frac{y}{e}}dy=\left[e\cdot e^{\frac{y}{e}}\right]_{-1}^{2e}$

$=e\cdot e^2-e\cdot e^{-\frac{1}{e}}=e^3-e^{1-\frac{1}{e}}$



別解　$S=e^2(2e+1)-\int_{e^{-\frac{1}{e}}}^{e^2}(e\log x+1)dx$

$=2e^3+e^2-\left[e(x\log x-x)+x\right]_{e^{-\frac{1}{e}}}^{e^2}=e^3-e^{1-\frac{1}{e}}$

(2)　$y=-\cos x$ から

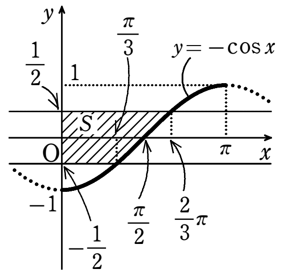
$dy=\sin x\,dx$

よって

y	$-\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{2}$
x	$\frac{\pi}{3}\longrightarrow\frac{2}{3}\pi$

$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}x\,dy=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}x\sin x\,dx$

$=\left[-x\cos x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\cos x\,dx$



$=-\frac{2}{3}\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+0=\frac{\pi}{2}$

別解　$S=\frac{2}{3}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\left(-\cos x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{2}{3}\pi+\left[\sin x-\frac{1}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{\pi}{2}$

6　次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$x=y^2-2y-3$，$y=-x-1$

(2)　$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$，$y=1$，$y=\frac{1}{2}$，y 軸

(3)　$y=\tan x$　$\left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$，$y=\sqrt{3}$，$y=1$，$y$ 軸

解答　(1)　$\frac{9}{2}$　　(2)　1　　(3)　$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{1}{2}\log 2$

解説

(1)　$y=-x-1$ から　$x=-y-1$

曲線と直線の交点の y 座標は，$y^2-2y-3=-y-1$ から　$y^2-y-2=0$

よって　$y=-1,\ 2$

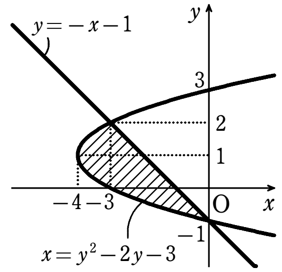
図から

$S=\int_{-1}^{2}\{(-y-1)-(y^2-2y-3)\}dy$

$=-\int_{-1}^{2}(y^2-y-2)dy$

$=-\int_{-1}^{2}(y+1)(y-2)dy$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$

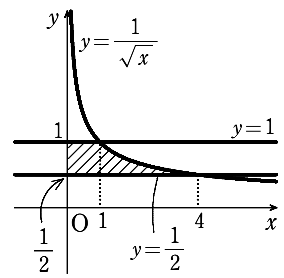


(2)　$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ から　$x=\frac{1}{y^2}$

$\frac{1}{2}\leqq y\leqq 1$ で $x>0$ であるから

$S=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dy}{y^2}=\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=-1+2=1$



(3)　$y=\tan x$ から　$dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx$

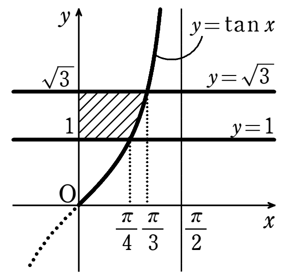
y と x の対応は右のようになる。

したがって

y	$1\longrightarrow\sqrt{3}$
x	$\frac{\pi}{4}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

$S=\int_{1}^{\sqrt{3}}x\,dy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$

$=\left[x\tan x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\tan x\,dx$

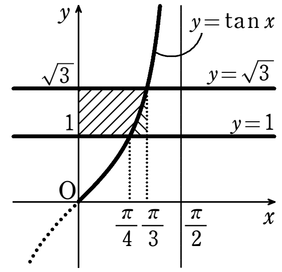


$=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{\pi}{4}+\left[\log(\cos x)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{1}{2}\log 2$

別解　$S=\frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-1)-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}(\tan x-1)dx$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{4}\right)\pi-\frac{1}{2}\log 2$



7　曲線 $y=\log x$ が曲線 $y=ax^2$ と接するように正の定数 a の値を定めよ。また，そのとき，これらの曲線と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

解答　$a=\frac{1}{2e}$，面積 $\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$

解説

$f(x)=\log x$，$g(x)=ax^2$ とすると　$f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=2ax$

2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が $x=c$ の点で接するための条件は

$\log c=ac^2$ ……①　かつ　$\frac{1}{c}=2ac$ ……②

② から　$a=\frac{1}{2c^2}$ ……③　　③ を ① に代入して　$\log c=\frac{1}{2}$

ゆえに　$c=\sqrt{e}$　　したがって　$a=\frac{1}{2c^2}=\frac{1}{2e}$

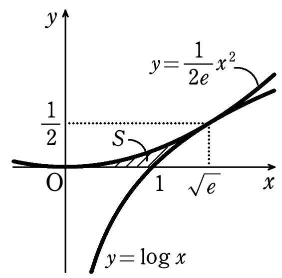
このとき，接点の座標は　$\left(\sqrt{e},\ \frac{1}{2}\right)$

よって，求める面積 S は

$S=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{1}{2e}x^2dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx$

$=\frac{1}{2e}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{e}}-\left[x\log x-x\right]_1^{\sqrt{e}}$

$=\frac{1}{6}\sqrt{e}-\left(\frac{1}{2}\sqrt{e}-\sqrt{e}+1\right)=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$



8　2 つの楕円 $x^2+3y^2=4$ ……①，$3x^2+y^2=4$ ……② がある。

(1)　2 つの楕円の 4 つの交点の座標を求めよ。

(2)　2 つの楕円の内部の重なった部分の面積を求めよ。

解答　(1)　(1，1)，(1，−1)，(−1，1)，(−1，−1)　　(2)　$\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

(1)　② から　$y^2=4-3x^2$ ……③

③ を ① に代入して　$x^2+3(4-3x^2)=4$

整理すると　$x^2=1$　　よって　$x=\pm1$

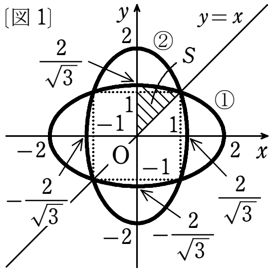
$x=\pm1$ を ③ に代入して　$y^2=1$　　ゆえに　$y=\pm1$

よって，求める 4 つの交点の座標は　(1，1)，(1，−1)，(−1，1)，(−1，−1)

(2) 楕円の内部が重なった部分の図形を D とすると，図形 D は x 軸，y 軸，および直線 $y=x$ に関して対称である。

よって，[図 1] の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は $8S$ である。

[図 1]



① より，$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}$ であるから

$$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot1^2$$

$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$ は [図 2] の斜線部分の面積に等しいから，これを求めると

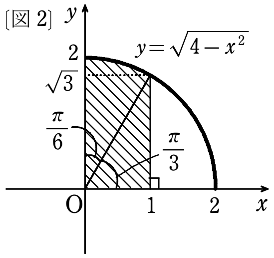
$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに　$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

よって，求める面積は

$$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}\pi=\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi$$

[図 2]



9 次の面積を求めよ。

(1) 連立不等式 $x^2+y^2\leqq4$，$xy\geqq\sqrt{3}$，$x>0$，$y>0$ で表される領域の面積

(2) 2 つの楕円 $x^2+\frac{y^2}{3}=1$，$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ の内部の重なった部分の面積

解答　(1) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\log3$　(2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

解説

(1) 2 曲線 $x^2+y^2=4$，$xy=\sqrt{3}$ $(x>0,\ y>0)$ の交点の x 座標は，y を消去して

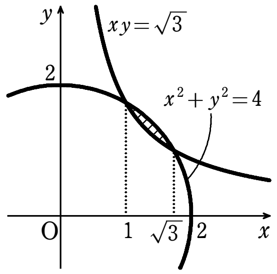
$$x^2+\frac{3}{x^2}=4$$

分母を払って整理すると

$$x^4-4x^2+3=0$$

$x>0$，$y>0$ を満たすものは

$$x=1,\ \sqrt{3}$$



連立不等式の表す領域は，右の図の斜線部分であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_1^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{x}\right)dx=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{4-x^2}\,dx-\sqrt{3}\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x}$$

$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

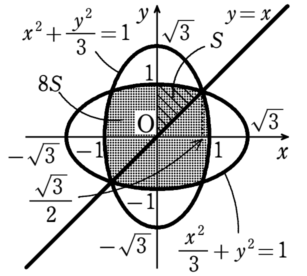
x	$1\longrightarrow\sqrt{3}$
θ	$\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{3}$

よって　$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}4\cos^2\theta\,d\theta-\sqrt{3}\Big[\log x\Big]_1^{\sqrt{3}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2+2\cos2\theta)d\theta-\sqrt{3}\log\sqrt{3}$

$$=\Big[2\theta+\sin2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}-\sqrt{3}\log\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\log3$$

(2) 楕円の内部が重なった部分の図形を D とすると，図形 D は x 軸，y 軸，および直線 $y=x$ に関して対称である。

よって，図の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は $8S$ である。



$x^2+\frac{y^2}{3}=1$ から　$y^2=3-3x^2$　……①

① を $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ に代入して　$x^2=\frac{3}{4}$　……②

② を ① に代入すると　$y^2=\frac{3}{4}$　……③

②，③ から，2 つの楕円の交点のうち，第 1 象限にあるものの座標は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

また，$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ から　$y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$

ゆえに，面積 S について

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-x^2}\,dx-\frac{3}{8}$$

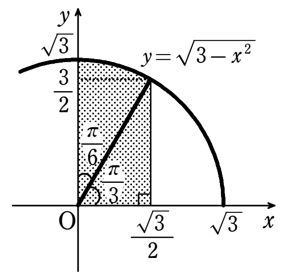
$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-x^2}\,dx$ は図の網目の部分の面積に等しいから，これを求めて

$$\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

ゆえに　$S=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$

したがって，求める面積は

$$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$



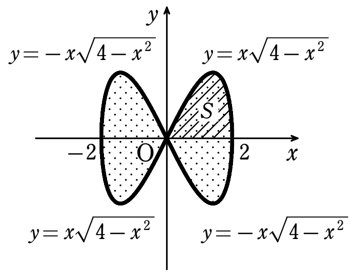
10 曲線 $(x^2-2)^2+y^2=4$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ。

解答　$\frac{32}{3}$

解説

曲線の式で $(x,\ y)$ を $(x,\ -y)$，$(-x,\ y)$，$(-x,\ -y)$ におき換えても $(x^2-2)^2+y^2=4$ は成り立つから，この曲線は x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

したがって，求める面積 S は，図の斜線部分の面積の 4 倍である。



$(x^2-2)^2+y^2=4$ から　$y^2=x^2(4-x^2)$

$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき　$y=x\sqrt{4-x^2}$

ここで，$4-x^2\geqq0$ であるから　$-2\leqq x\leqq2$

$x\geqq0$ と合わせて　$0\leqq x\leqq2$

$0<x<2$ のとき

$$y'=\sqrt{4-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$y'=0$ とすると，$0<x<2$ では　$x=\sqrt{2}$

$0\leqq x\leqq2$ における増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	2	↘	0

よって　$S=4\int_0^2x\sqrt{4-x^2}\,dx=4\int_0^2(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{(4-x^2)'}{-2}dx$

$$=-2\left[\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=-\frac{4}{3}\left(0-4^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{32}{3}$$

11 次の図形の面積 S を求めよ。

(1) 曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ と x 軸および y 軸で囲まれた図形

(2) 曲線 $y^2=(x+3)x^2$ で囲まれた図形

(3) 曲線 $2x^2-2xy+y^2=4$ で囲まれた図形

解答　(1) $\frac{8}{3}$　(2) $\frac{24\sqrt{3}}{5}$　(3) 4π

解説

(1) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$ から

$$y=(2-\sqrt{x})^2\geqq0$$

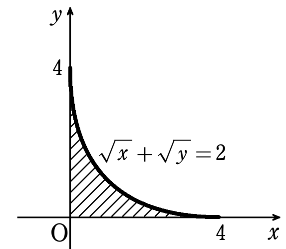
また，$\sqrt{y}=2-\sqrt{x}\geqq0$ から

$$0\leqq x\leqq4$$

曲線の概形は，右の図のようになるから

$$S=\int_0^4(2-\sqrt{x})^2dx=\int_0^4(4-4\sqrt{x}+x)dx$$

$$=\left[4x-\frac{8}{3}x\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{8}{3}$$



(2) 曲線の式で $(x,\ y)$ を $(x,\ -y)$ におき換えても $y^2=(x+3)x^2$ は成り立つから，この曲線は x 軸に関して対称である。

$y^2=(x+3)x^2\geqq0$ から　$x\geqq-3$

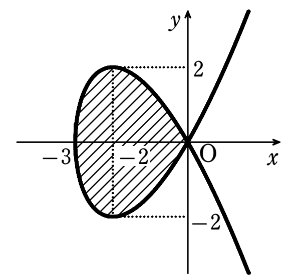
このとき　$y=\pm x\sqrt{x+3}$

$f(x)=x\sqrt{x+3}$ とすると　$f'(x)=\sqrt{x+3}+\frac{x}{2\sqrt{x+3}}=\frac{3(x+2)}{2\sqrt{x+3}}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	-2	↗



$y=f(x)$ に $y=-f(x)$ をつけ加えて，曲線 $y^2=(x+3)x^2$ の概形は右の図のようになる。

よって，求める面積 S は　$S=2\int_{-3}^0(-x\sqrt{x+3})dx$

$\sqrt{x+3}=t$ とおくと　$x=t^2-3$，$dx=2t\,dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-3\longrightarrow0$
t	$0\longrightarrow\sqrt{3}$

ゆえに　$S=2\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)t\cdot2t\,dt=4\int_0^{\sqrt{3}}(3t^2-t^4)dt$

$$=4\left[t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{5}$$

(3) $2x^2-2xy+y^2=4$ から

$$y^2-2xy+2x^2-4=0$$

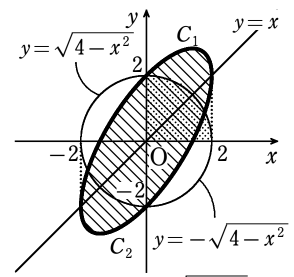
ゆえに　$y=x\pm\sqrt{4-x^2}$　$(-2\leqq x\leqq2)$

図から，面積は

$$S=\int_{-2}^2\{x+\sqrt{4-x^2}-(x-\sqrt{4-x^2})\}dx$$

$$=2\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=2\cdot\frac{\pi\cdot2^2}{2}=4\pi$$



$C_1:\ y=x+\sqrt{4-x^2}$

$C_2:\ y=x-\sqrt{4-x^2}$

12 媒介変数 t によって, $x=4\cos t$, $y=\sin 2t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と表される曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $\frac{8}{3}$

解説

$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ …… ① の範囲で $y=0$ となる t の値は　$t=0,\ \frac{\pi}{2}$

また, ① の範囲においては, 常に $y\geqq 0$ である。

$x=4\cos t$ から　$\frac{dx}{dt}=-4\sin t$

よって　$dx=-4\sin t\,dt$

$y=\sin 2t$ から　$\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$ であり, $\frac{dy}{dt}=0$

とすると　$t=\frac{\pi}{4}$

ゆえに, 右のような表が得られる (↘ は減少, ↗ は増加を表す)。

t	0	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	−	−	−	−
x	4	↘	$2\sqrt{2}$	↘	0
$\frac{dy}{dt}$	+	+	0	−	−
y	0	↗	1	↘	0

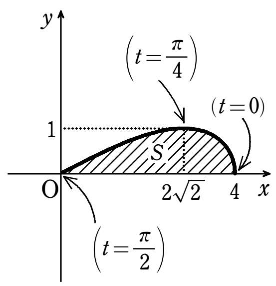
よって　$S=\int_0^4 y\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin 2t\cdot(-4\sin t)dt$

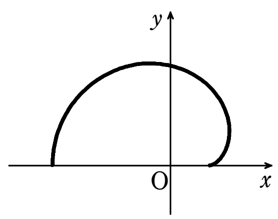
$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sin t\,dt$

$=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos t\,dt$

$=8\left[\frac{1}{3}\sin^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{8}{3}$



13 媒介変数 t によって, $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$ $(0\leqq t\leqq\pi)$ と表される右図の曲線と, x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。



解答 3π

解説

図から, $0\leqq t\leqq\pi$ では常に　$y\geqq 0$

また, $y=2\sin t(1-\cos t)$ であるから, $y=0$ とすると　$\sin t=0$ または $\cos t=1$

$0\leqq t\leqq\pi$ から　$t=0,\ \pi$

更に　$\frac{dx}{dt}=-2\sin t+2\sin 2t$

$=2\sin t(2\cos t-1)$

$0<t<\pi$ で $\frac{dx}{dt}=0$ とすると, $\cos t=\frac{1}{2}$ から

$t=\frac{\pi}{3}$

t	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π
$\frac{dx}{dt}$		+	0	−	
x	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	−3

よって, x の値の増減は右上の表のようになる。

ゆえに, $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{3}$ における y を y_1, $\frac{\pi}{3}\leqq t\leqq\pi$ における y を y_2 とすると

$S=\int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2\,dx-\int_1^{\frac{3}{2}} y_1\,dx=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt-\int_0^{\frac{\pi}{3}} y\frac{dx}{dt}dt$

$=\int_{\pi}^0 y\frac{dx}{dt}dt=\int_{\pi}^0(2\sin t-\sin 2t)(-2\sin t+2\sin 2t)dt$

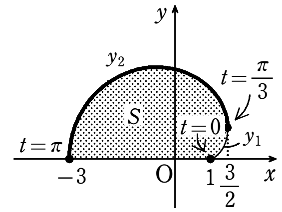
$=2\int_0^{\pi}(2\sin t-\sin 2t)(\sin t-\sin 2t)dt$

$=2\int_0^{\pi}(2\sin^2 t-3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)dt$

$=2\int_0^{\pi}\left(2\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}-3\sin t\cdot 2\sin t\cos t+\frac{1-\cos 4t}{2}\right)dt$

$=2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-\cos 2t-\frac{1}{2}\cos 4t-6\sin^2 t\cos t\right)dt$

$=2\left[\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 4t-2\sin^3 t\right]_0^{\pi}=3\pi$



14 媒介変数 t によって, $x=2t+t^2$, $y=t+2t^2$ $(-2\leqq t\leqq 0)$ と表される曲線と, y 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 4

解説

$\frac{dx}{dt}=2+2t$, $\frac{dy}{dt}=1+4t$

$\frac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=-1$　　$\frac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=-\frac{1}{4}$

よって, 次のような表が得られる。

t	−2	…	−1	…	$-\frac{1}{4}$	…	0
$\frac{dx}{dt}$	−	−	0	+	+	+	+
x	0	↘	−1	↗	$-\frac{7}{16}$	↗	0
$\frac{dy}{dt}$	−	−	−	−	0	+	+
y	6	↘	1	↘	$-\frac{1}{8}$	↗	0

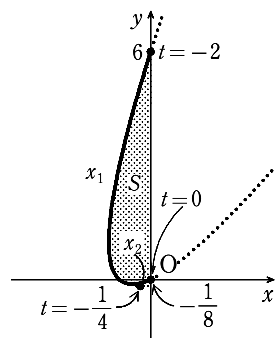
ゆえに, $-2\leqq t\leqq-\frac{1}{4}$ における x を x_1, $-\frac{1}{4}\leqq t\leqq 0$ における x を x_2 とすると

$S=\int_{-\frac{1}{8}}^6(-x_1)dy-\int_{-\frac{1}{8}}^0(-x_2)dy$

$=-\int_{-\frac{1}{4}}^{-2} x\frac{dy}{dt}dt+\int_{-\frac{1}{4}}^0 x\frac{dy}{dt}dt$

$=\int_{-2}^0 x\frac{dy}{dt}dt=\int_{-2}^0(2t+t^2)(1+4t)dt$

$=\int_{-2}^0(4t^3+9t^2+2t)dt$



$=\left[t^4+3t^3+t^2\right]_{-2}^0=-(16-24+4)=4$

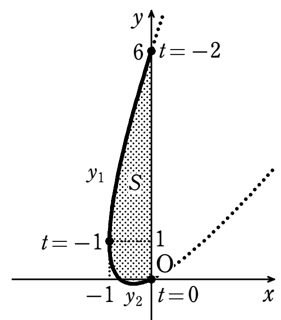
別解 $-2\leqq t\leqq-1$ における y を y_1, $-1\leqq t\leqq 0$ における y を y_2 とすると

$S=\int_{-1}^0(y_1-1)dx+\int_{-1}^0(1-y_2)dx$

$=\int_{-1}^{-2}(y-1)\frac{dx}{dt}dt-\int_{-1}^0(y-1)\frac{dx}{dt}dt$

$=\int_0^{-2}(y-1)\frac{dx}{dt}dt=\int_0^{-2}(t+2t^2-1)(2+2t)dt$

$=2\int_0^{-2}(2t^3+3t^2-1)dt=2\left[\frac{1}{2}t^4+t^3-t\right]_0^{-2}=4$



15 方程式 $\sqrt{2}(x-y)=(x+y)^2$ で表される曲線 A について, 次のものを求めよ。

(1) 曲線 A を原点 O を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転させてできる曲線の方程式

(2) 曲線 A と直線 $x=\sqrt{2}$ で囲まれる図形の面積

解答 (1) $x=y^2$　(2) $\frac{9}{2}$

解説

(1) 曲線 A 上の点 $(X,\ Y)$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点の座標を $(x,\ y)$ とする。

複素数平面上で, $\mathrm{P}(X+Yi)$, $\mathrm{Q}(x+yi)$ とすると, 点 Q を原点を中心として $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転した点が P である

から　$X+Yi=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}(x+yi)$

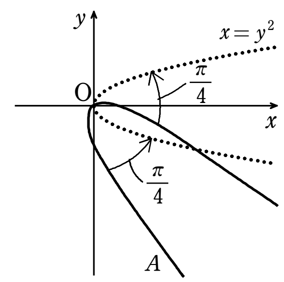
$=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)(x+yi)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)+\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)i$

よって　$X=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$ …… ①, $Y=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)$

これらを $\sqrt{2}(X-Y)=(X+Y)^2$ に代入すると　$2x=(\sqrt{2}\,y)^2$

すなわち　$x=y^2$　　これが求める曲線の方程式である。



(2) ① を $X=\sqrt{2}$ に代入して整理すると　$x=-y+2$

これは, 直線 $x=\sqrt{2}$ を原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転した直線の方程式である。

直線 $x=-y+2$ と曲線 $x=y^2$ の交点の y 座標は,

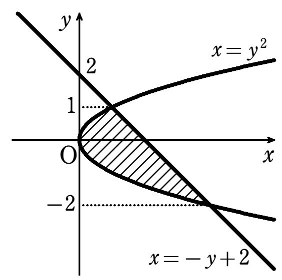
$-y+2=y^2$ から　$(y+2)(y-1)=0$

ゆえに　$y=-2,\ 1$

よって, 求める面積は

$\int_{-2}^1(-y+2-y^2)dy=-\int_{-2}^1(y+2)(y-1)dy$

$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-2)\}^3=\frac{9}{2}$



16 曲線 C_1 : $y=k\sin x$ $(0<x<2\pi)$ と, 曲線 C_2 : $y=\cos x$ $(0<x<2\pi)$ について, 次の問いに答えよ。ただし, $k>0$ とする。

(1) C_1, C_2 の 2 交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とするとき, $\sin\alpha$, $\sin\beta$ を k を用いて表せ。

(2) C_1, C_2 で囲まれた図形の面積が 10 であるとき, k の値を求めよ。

解答 (1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，$\sin\beta=-\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$ (2) $k=2\sqrt{6}$

解説

(1) C_1，C_2 の 2 交点の x 座標は，方程式 $k\sin x=\cos x$ …… ① の解である。

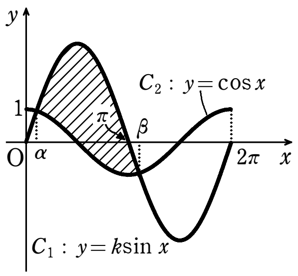
① から $k^2\sin^2x=\cos^2x$ よって $k^2\sin^2x=1-\sin^2x$

ゆえに $\sin^2x=\dfrac{1}{k^2+1}$ したがって $\sin x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

右の図から明らかに $\sin\alpha>0$，$\sin\beta<0$

したがって

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}},\ \sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$$



(2) C_1，C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると

$$S=\int_\alpha^\beta(k\sin x-\cos x)dx$$
$$=\Big[-k\cos x-\sin x\Big]_\alpha^\beta$$
$$=k(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha-\sin\beta$$

α，β は ① の解であるから $\cos\alpha=k\sin\alpha$，$\cos\beta=k\sin\beta$

よって $S=k(k\sin\alpha-k\sin\beta)+(\sin\alpha-\sin\beta)=(k^2+1)(\sin\alpha-\sin\beta)$

$$=(k^2+1)\left(\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}\right)=2\sqrt{k^2+1}$$

$S=10$ から $\sqrt{k^2+1}=5$ ゆえに $k^2=24$

$k>0$ であるから $k=2\sqrt{6}$

17 $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で，2 曲線 $y=\tan x$，$y=a\sin 2x$ と x 軸で囲まれた図形の面積が 1 となるように，正の実数 a の値を定めよ。

解答 $a=\dfrac{e}{2}$

解説

2 曲線の交点の x 座標は，方程式 $\tan x=a\sin 2x$ …… ① の解である。

$x=0$ は ① の解であり，$x=\dfrac{\pi}{2}$ は ① の解ではない。

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，① から $\dfrac{\sin x}{\cos x}=2a\sin x\cos x$

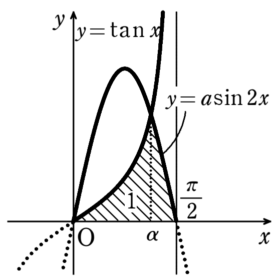
ゆえに $2a\cos^2x=1$ よって $\cos^2x=\dfrac{1}{2a}$

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ …… ②

等式 ② を満たす x の値を α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

このとき，2 曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\int_0^\alpha\tan x\,dx+\int_\alpha^{\frac{\pi}{2}}a\sin 2x\,dx$$
$$=\Big[-\log(\cos x)\Big]_0^\alpha-\frac{a}{2}\Big[\cos 2x\Big]_\alpha^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\log(\cos\alpha)-\frac{a}{2}\{-1-(2\cos^2\alpha-1)\}$$
$$=-\log\frac{1}{\sqrt{2a}}+a\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2=\frac{1}{2}\log 2a+\frac{1}{2}$$



$S=1$ となるための条件は $\dfrac{1}{2}\log 2a+\dfrac{1}{2}=1$ 整理して $\log 2a=1$

ゆえに $2a=e$ したがって $a=\dfrac{e}{2}$

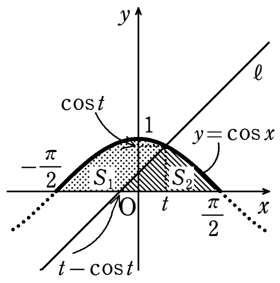
18 曲線 $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれる図形を E とする。曲線上の点 $(t,\ \cos t)$ を通る傾きが 1 の直線 ℓ で E を分割する。こうして得られた 2 つの図形の面積が等しくなるとき，$\cos t$ の値を求めよ。

解答 $\cos t=\sqrt{2(-1+\sqrt{2})}$

解説

直線 ℓ が図形 E を分割するから $-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}$

図形 E の面積 S は $S=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=2$



直線 ℓ の方程式は $y-\cos t=1\cdot(x-t)$

すなわち $y=x-t+\cos t$ …… ①

直線 ℓ が図形 E を分割するとき，直線 ℓ より上の部分の面積を S_1，下の部分の面積を S_2 とする。

直線 ℓ と x 軸の交点の x 座標は，① で $y=0$ とすると，$x=t-\cos t$ であるから

$$S_2=\frac{1}{2}\{t-(t-\cos t)\}\cos t+\int_t^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\frac{1}{2}\cos^2t+\Big[\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\cos^2t+1-\sin t$$

求める条件は $2S_2=S$

ゆえに $\cos^2t+2-2\sin t=2$ すなわち $\cos^2t=2\sin t$ …… ②

$\cos^2t=1-\sin^2t$ を用いて整理すると $\sin^2t+2\sin t-1=0$

これを解いて $\sin t=-1\pm\sqrt{2}$

$|\sin t|<1$ であるから $\sin t=-1+\sqrt{2}$

このとき，② から $\cos^2t=2(-1+\sqrt{2})$

$\cos t>0$ であるから $\cos t=\sqrt{2(-1+\sqrt{2})}$

19 xy 平面上に 2 曲線 C_1 : $y=e^x-2$ と C_2 : $y=3e^{-x}$ がある。

(1) C_1 と C_2 の共有点 P の座標を求めよ。

(2) 点 P を通る直線 ℓ が，C_1，C_2 および y 軸によって囲まれた部分の面積を 2 等分するとき，ℓ の方程式を求めよ。

解答 (1) $(\log 3,\ 1)$ (2) $y=\dfrac{4(\log 3-1)}{(\log 3)^2}x-3+\dfrac{4}{\log 3}$

解説

(1) $e^x-2=3e^{-x}$ とすると $(e^x)^2-2e^x-3=0$ ゆえに $(e^x+1)(e^x-3)=0$

$e^x>0$ であるから $e^x=3$ よって $x=\log 3$ このとき $y=1$

したがって，点 P の座標は $(\log 3,\ 1)$

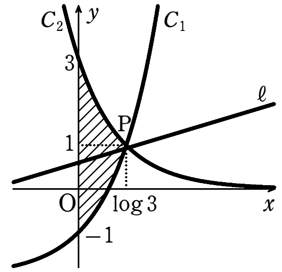
(2) 2 曲線 C_1，C_2 および y 軸によって囲まれた部分の図形を E とし，直線 ℓ の傾きを m とする。

直線 ℓ が図形 E を 2 等分するためには $m>0$

また，$\log 3=\alpha$ とおくと，直線 ℓ の方程式は

$y=m(x-\alpha)+1$ と表される。

ここで，図形 E の面積を S，直線 ℓ が図形 E を分割するときの直線 ℓ より上の部分の面積を S_1 とする。



求める条件は，$S=2S_1$ であるから

$$\int_0^\alpha(3e^{-x}-e^x+2)dx=2\int_0^\alpha\{3e^{-x}-m(x-\alpha)-1\}dx$$

ゆえに $\Big[-3e^{-x}-e^x+2x\Big]_0^\alpha=2\Big[-3e^{-x}-\dfrac{1}{2}m(x-\alpha)^2-x\Big]_0^\alpha$

よって $-3e^{-\alpha}-e^\alpha+2\alpha+3+1=2\left(-3e^{-\alpha}-\alpha+3+\dfrac{1}{2}m\alpha^2\right)$

ゆえに $3e^{-\alpha}-e^\alpha-m\alpha^2+4\alpha-2=0$

ここで，$e^\alpha=3$ より $e^{-\alpha}=\dfrac{1}{3}$ であるから $m\alpha^2=4\alpha-4$

よって $m=\dfrac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}=\dfrac{4(\log 3-1)}{(\log 3)^2}$

ゆえに，直線 ℓ の方程式は $y=\dfrac{4(\log 3-1)}{(\log 3)^2}(x-\log 3)+1$

すなわち $y=\dfrac{4(\log 3-1)}{(\log 3)^2}x-3+\dfrac{4}{\log 3}$

20 曲線 C : $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ $(t>1)$ における接線を ℓ とする。C と y 軸の共有点を A，ℓ と x 軸の交点を Q とする。原点を O とし，△AOQ の面積を $S(t)$ とする。Q を通り y 軸に平行な直線，y 軸，C および ℓ で囲まれた図形の面積を $T(t)$ とする。

(1) $S(t)$，$T(t)$ を t で表せ。 (2) $\displaystyle\lim_{t\to1+0}\frac{T(t)}{S(t)}$ を求めよ。

解答 (1) $S(t)=\dfrac{t-1}{2}$，$T(t)=\dfrac{e^t}{2}(t-1)^2+e^{t-1}-1$ (2) 2

解説

(1) 点 A の座標は $(0,\ 1)$

$y=e^x$ より $y'=e^x$ であるから，接線 ℓ の方程式は

$y-e^t=e^t(x-t)$

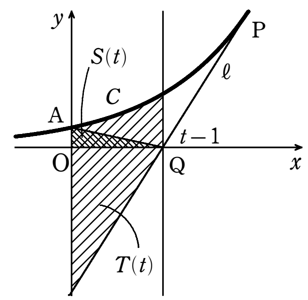
すなわち $y=e^tx+(1-t)e^t$ …… ①

① において，$y=0$ とすると $0=\{x+(1-t)\}e^t$

よって $x=t-1$

ゆえに，点 Q の座標は $(t-1,\ 0)$

したがって $S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot(t-1)\cdot 1=\dfrac{t-1}{2}$



また $T(t)=\displaystyle\int_0^{t-1}[e^x-\{e^tx+(1-t)e^t\}]dx$

$$=\left[e^x-\frac{e^t}{2}x^2+(t-1)e^tx\right]_0^{t-1}=\frac{e^t}{2}(t-1)^2+e^{t-1}-1$$

(2) $\dfrac{T(t)}{S(t)}=\dfrac{2}{t-1}\left\{\dfrac{e^t}{2}(t-1)^2+e^{t-1}-1\right\}=e^t(t-1)+\dfrac{2(e^{t-1}-1)}{t-1}$

ここで，$t-1=s$ とおくと，$t\longrightarrow 1+0$ のとき $s\longrightarrow +0$

よって $\displaystyle\lim_{t\to1+0}\frac{e^{t-1}-1}{t-1}=\lim_{s\to+0}\frac{e^s-1}{s}=1$

ゆえに $\displaystyle\lim_{t\to1+0}\frac{T(t)}{S(t)}=0+2\cdot1=2$

$\boxed{21}$ $g(x)=\sin^3 x$ とし，$0<\theta<\pi$ とする。x の 2 次関数 $y=h(x)$ のグラフは原点を頂点とし，$h(\theta)=g(\theta)$ を満たすとする。このとき，曲線 $y=g(x)$ $(0\leqq x\leqq\theta)$ と直線 $x=\theta$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $G(\theta)$ とする。また，曲線 $y=h(x)$ と直線 $x=\theta$ および x 軸で囲まれた図形の面積を $H(\theta)$ とする。

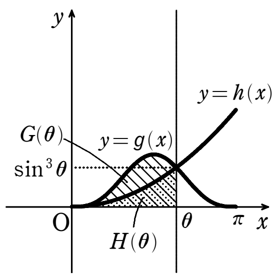
(1)　$G(\theta)$，$H(\theta)$ を求めよ。　　(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{G(\theta)}{H(\theta)}$ を求めよ。

解答　(1)　$G(\theta)=\dfrac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta+\dfrac{2}{3}$，$H(\theta)=\dfrac{1}{3}\theta\sin^3\theta$　　(2)　$\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$0<\theta<\pi$ から，$0\leqq x\leqq\theta$ において　$\sin x\geqq 0$

よって　$g(x)\geqq 0$



ゆえに　$G(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta \sin^3 x\,dx=\int_0^\theta(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$=\displaystyle\int_0^\theta(\sin x-\cos^2 x\sin x)dx$

$=\left[-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^\theta$

$=\dfrac{1}{3}\cos^3\theta-\cos\theta+\dfrac{2}{3}$

また，2 次関数 $y=h(x)$ は，$h(x)=ax^2$ $(a\neq 0)$ と表される。

$h(\theta)=g(\theta)$ から　$a\theta^2=\sin^3\theta$

$\theta\neq 0$ から　$a=\dfrac{\sin^3\theta}{\theta^2}$

$0\leqq x\leqq\theta$ において，$h(x)\geqq 0$ であるから

$$H(\theta)=\int_0^\theta h(x)dx=\int_0^\theta ax^2dx=\frac{a}{3}\theta^3=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^2}\cdot\theta^3=\frac{1}{3}\theta\sin^3\theta$$

(2)　$G(\theta)=\dfrac{1}{3}(\cos^3\theta-3\cos\theta+2)=\dfrac{1}{3}(\cos\theta-1)(\cos^2\theta+\cos\theta-2)$

$=\dfrac{1}{3}(\cos\theta-1)^2(\cos\theta+2)$

よって　$\dfrac{G(\theta)}{H(\theta)}=\dfrac{(\cos\theta-1)^2(\cos\theta+2)}{\theta\sin^3\theta}=\dfrac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2(\cos\theta+2)}{\theta\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{(1-\cos^2\theta)^2(\cos\theta+2)}{\theta\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2}=\dfrac{\sin^4\theta(\cos\theta+2)}{\theta\sin^3\theta(1+\cos\theta)^2}$

$=\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{\cos\theta+2}{(1+\cos\theta)^2}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{G(\theta)}{H(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\left\{\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\cos\theta+2}{(1+\cos\theta)^2}\right\}=1\cdot\frac{3}{2^2}=\frac{3}{4}$

$\boxed{22}$ $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2)　$0<a<\pi$ とするとき，曲線 C と接線 ℓ および直線 $x=\pi$ と y 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$（2 部分の和）を求めよ。

(3)　面積 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答　(1)　$y=x\cos a+\sin a-a\cos a$　　(2)　$\pi\sin a+\left(\dfrac{\pi^2}{2}-\pi a\right)\cos a-2$

(3)　$a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\pi-2$

解説

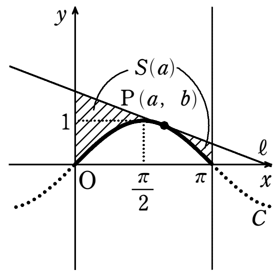
(1)　$y'=\cos x$ であるから，接線 ℓ の方程式は

$y-b=(\cos a)(x-a)$

すなわち　$y=x\cos a+b-a\cos a$

$b=\sin a$ であるから

$y=x\cos a+\sin a-a\cos a$



(2)　$y=\sin x$ から　$y''=-\sin x$

$0<x<\pi$ では $y''<0$ であるから，曲線 C はこの範囲で上に凸であり，接線 ℓ は曲線 C の上側にある。

よって

$S(a)=\displaystyle\int_0^\pi(x\cos a+\sin a-a\cos a-\sin x)dx$

$=\left[\dfrac{x^2}{2}\cos a+(\sin a-a\cos a)x+\cos x\right]_0^\pi$

$=\dfrac{\pi^2}{2}\cos a+(\sin a-a\cos a)\pi-1-1$

$=\pi\sin a+\left(\dfrac{\pi^2}{2}-\pi a\right)\cos a-2$

(3)　$S'(a)=\pi\cos a-\pi\cos a+\left(\dfrac{\pi^2}{2}-\pi a\right)(-\sin a)=\pi\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right)\sin a$

$0<a<\pi$ のとき，$\sin a>0$ であるから，この範囲で $S'(a)=0$ となるのは，$a=\dfrac{\pi}{2}$ のときである。

ゆえに，$0<a<\pi$ における増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，$S(a)$ は $a=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最小値 $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\pi-2$ をとる。

$\boxed{23}$ $f(x)=e^x-x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　t は実数とする。このとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　$S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

解答　(1)　$\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^t-t+\dfrac{1}{2}$　　(2)　$t=1-\log(e-1)$ のとき最小値 $\log(e-1)+\dfrac{1}{2}$

解説

(1)　$f'(x)=e^x-1$

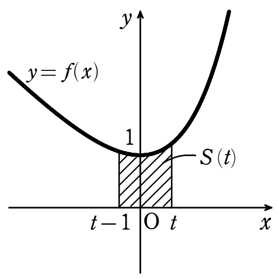
$f'(x)=0$ とすると　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↗

よって，曲線 $y=f(x)$ の概形は図のようになる。

ゆえに，求める面積 $S(t)$ は



$S(t)=\displaystyle\int_{t-1}^t(e^x-x)dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_{t-1}^t$

$=e^t-e^{t-1}-\dfrac{1}{2}\{t^2-(t-1)^2\}$

$=\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^t-t+\dfrac{1}{2}$

(2)　$S'(t)=\left(1-\dfrac{1}{e}\right)e^t-1=\dfrac{e-1}{e}e^t-1$

$S'(t)=0$ とすると　$e^t=\dfrac{e}{e-1}$

よって　$t=\log\dfrac{e}{e-1}=1-\log(e-1)$

$S(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	$1-\log(e-1)$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	↘	極小	↗

ゆえに，$S(t)$ は $t=1-\log(e-1)$ のとき極小かつ最小となり，最小値は　$\dfrac{e-1}{e}\cdot\dfrac{e}{e-1}-1+\log(e-1)+\dfrac{1}{2}=\log(e-1)+\dfrac{1}{2}$

$\boxed{24}$ 曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸で囲まれた図形で，x 軸の上側にある部分の面積を y 軸に近い方から順に S_0，S_1，……，S_n，…… とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n S_k$ を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2(1-e^{-\pi})}$　$\left[\dfrac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}\right]$

解説

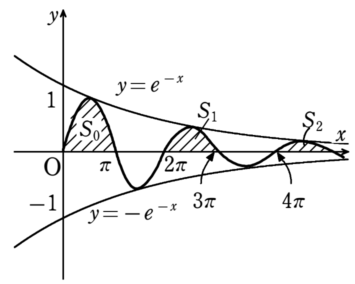
曲線 $y=e^{-x}\sin x$ $(x\geqq 0)$ と x 軸の交点の x 座標は，$e^{-x}\sin x=0$ から　$\sin x=0$

ゆえに　$x=n\pi$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

また，$y\geqq 0$ となるのは，$e^{-x}>0$ であるから，$\sin x\geqq 0$ のときである。

よって　$2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$

ゆえに



$S_k=\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\cos x\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\cos x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\cos x\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}-\left\{\left[e^{-x}\sin x\right]_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}+\displaystyle\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right\}$

すなわち　$S_k=e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}-S_k$

したがって　$S_k=\dfrac{1}{2}\{e^{-(2k+1)\pi}+e^{-2k\pi}\}$

よって　$\displaystyle\sum_{k=0}^n S_k=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^n e^{-(2k+1)\pi}+\sum_{k=0}^n e^{-2k\pi}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{e^{-\pi}\{1-e^{-2(n+1)\pi}\}}{1-e^{-2\pi}}+\dfrac{1-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}}\right]$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^n S_k=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\pi}+1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1+e^{-\pi}}{2(1+e^{-\pi})(1-e^{-\pi})}$

$=\dfrac{1}{2(1-e^{-\pi})}$　$\left[\dfrac{e^\pi}{2(e^\pi-1)}\ \text{でもよい}\right]$

$\boxed{25}$ 曲線 $y=e^{-x}$ と $y=e^{-x}|\cos x|$ で囲まれた図形のうち，$(n-1)\pi\leqq x\leqq n\pi$ を満たす部分の面積を a_n とする $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$。

(1)　a_1，a_n の値を求めよ。　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ を求めよ。

解答　(1)　$a_1=\dfrac{1}{2}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$，$a_n=\dfrac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$

(2)　$\dfrac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$　$\left[\dfrac{e^\pi-2e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^\pi-1)}\right]$

解説

(1)　$\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$

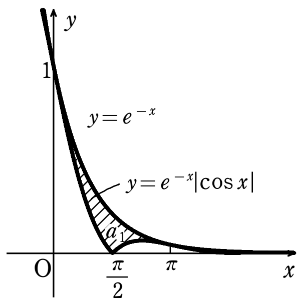
$=-e^{-x}\cos x-\left(-e^{-x}\sin x+\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx\right)$

$=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$

積分定数を考えて

$$\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$$

（C は積分定数）



$0\leqq|\cos x|\leqq 1$，$e^{-x}>0$ であるから　$e^{-x}\geqq e^{-x}|\cos x|$

よって

$$a_1=\int_0^{\pi}(e^{-x}-e^{-x}|\cos x|)dx$$

$$=\Big[-e^{-x}\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-x}\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx$$

$$=1-e^{-\pi}-\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\Big[e^{-x}(\sin x-\cos x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$=1-e^{-\pi}-\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)+\frac{1}{2}\left(e^{-\pi}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-e^{-\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\pi}=\frac{1}{2}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$$

また，$a_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}(e^{-x}-e^{-x}|\cos x|)dx$ において

$x=t+(n-1)\pi$ とおくと　　$dx=dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$(n-1)\pi\longrightarrow n\pi$
t	$0\quad\longrightarrow\ \pi$

$e^{-t-(n-1)\pi}=e^{-(n-1)\pi}e^{-t}$，$|\cos\{t+(n-1)\pi\}|=|\cos t|$

に注意すると

$$a_n=\int_0^{\pi}\{e^{-t-(n-1)\pi}-e^{-t-(n-1)\pi}|\cos\{t+(n-1)\pi\}|\}dt$$

$$=e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi}(e^{-t}-e^{-t}|\cos t|)dt=e^{-(n-1)\pi}a_1$$

$$=\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}\left(1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}\right)$$

(2)　(1) より，数列 $\{a_n\}$ は初項 a_1，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であるから

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=a_1\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{1-e^{-\pi}}$$

$0<e^{-\pi}<1$ であるから　　$\lim_{n\to\infty}e^{-n\pi}=0$

したがって　　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{a_1}{1-e^{-\pi}}=\frac{1-2e^{-\frac{\pi}{2}}-e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}$　　$\left[\frac{e^{\pi}-2e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2(e^{\pi}-1)}\right.$ でもよい$\left.\right]$

26 次の曲線または直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。ただし，(2) の a は $0<a<1$ を満たす定数とする。

(1)　$y=\sqrt[3]{x^2}$，$y=|x|$　　　　(2)　$y=\left|\frac{x}{x+1}\right|$，$y=a$

解答　(1)　$\frac{1}{5}$　　(2)　$-\log(1-a^2)$

解説

(1)　$x\geqq0$ のとき，2 曲線の交点の x 座標は，

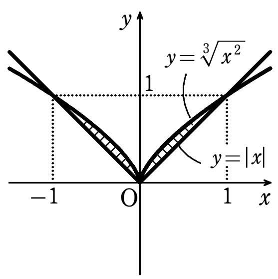
$\sqrt[3]{x^2}=|x|$ から　　$\sqrt[3]{x^2}=x$

ゆえに　　$x^2=x^3$

よって　　$x^2(x-1)=0$

したがって　　$x=0,\ 1$

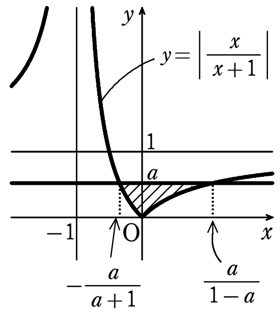
$\sqrt[3]{(-x)^2}=\sqrt[3]{x^2}$，$|-x|=|x|$ より，2 つの曲線はともに y 軸に関して対称であるから，右の図のようになる。



よって　　$S=2\int_0^1\left(x^{\frac{2}{3}}-x\right)dx=2\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{5}$

(2)　$y=\begin{cases}\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1} & (x<-1,\ x\geqq0 \text{ のとき})\\ -\frac{x}{x+1}=-1+\frac{1}{x+1} & (-1<x<0 \text{ のとき})\end{cases}$

よって，$y=\left|\frac{x}{x+1}\right|$ のグラフは右の図のようになる。



$y=\frac{x}{x+1}$ から　　$x=\frac{y}{1-y}=-1-\frac{1}{y-1}$

$y=-\frac{x}{x+1}$ から　　$x=-\frac{y}{y+1}=-1+\frac{1}{y+1}$

したがって，求める面積は

$$S=\int_0^a\left\{\left(-1-\frac{1}{y-1}\right)-\left(-1+\frac{1}{y+1}\right)\right\}dy$$

$$=\Big[-\log|y-1|-\log|y+1|\Big]_0^a=-\Big[\log|y^2-1|\Big]_0^a$$

$$=-\log|a^2-1|$$

$0<a<1$ であるから　　$|a^2-1|=-(a^2-1)=1-a^2$

よって　　$S=-\log(1-a^2)$

27 (1)　関数 $f(x)=xe^{-2x}$ の極値と曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の変曲点における接線，曲線 $y=f(x)$ および直線 $x=3$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1)　$x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$，変曲点の座標 $\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)$　　(2)　$\frac{3e^4-7}{4e^6}$

解説

(1)　$f'(x)=e^{-2x}+x\cdot(-2e^{-2x})=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=-2e^{-2x}+(1-2x)\cdot(-2e^{-2x})=4(x-1)e^{-2x}$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=\frac{1}{2}$

$f''(x)=0$ とすると　　$x=1$

$f(x)$ の増減，グラフの凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	$\frac{1}{e^2}$	↘

よって，$f(x)$ は $x=\frac{1}{2}$ で極大値 $\frac{1}{2e}$ をとり，

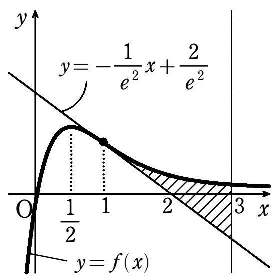
曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標は $\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)$ である。

(2)　(1) から　　$f'(1)=-\frac{1}{e^2}$

よって，変曲点 $\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)$ における接線の方程式は

$$y-\frac{1}{e^2}=-\frac{1}{e^2}(x-1)$$

すなわち　　$y=-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e^2}$



(1) から，求める面積 S は右の図の斜線部分の面積である。したがって

$$S=\int_1^3\left\{xe^{-2x}-\left(-\frac{1}{e^2}x+\frac{2}{e^2}\right)\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\right]_1^3+\int_1^3\frac{1}{2}e^{-2x}dx+\left[\frac{1}{2e^2}x^2-\frac{2}{e^2}x\right]_1^3$$

$$=-\frac{3}{2e^6}+\frac{1}{2e^2}+\left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_1^3+0=-\frac{3}{2e^6}+\frac{1}{2e^2}-\frac{1}{4e^6}+\frac{1}{4e^2}=\frac{3e^4-7}{4e^6}$$

28 関数 $f(x)=ae^{2x}$（a は定数）について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(b,\ f(b))$ における接線が $y=x$ であるとき，次の各問いに答えよ。

(1)　a と b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ の逆関数を $y=f^{-1}(x)$ と表す。このとき，曲線 $y=f(x)$，$y=f^{-1}(x)$，x 軸および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

解答　(1)　$a=\frac{1}{2e}$，$b=\frac{1}{2}$　　(2)　$\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-1}$

解説

(1)　$f'(x)=2ae^{2x}$ であるから，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(b,\ f(b))$ における接線の方程式は

$y-ae^{2b}=2ae^{2b}(x-b)$　すなわち　$y=2ae^{2b}x+a(1-2b)e^{2b}$

これが $y=x$ と一致するための条件は

$2ae^{2b}=1$ …… ①，　$a(1-2b)e^{2b}=0$ …… ②

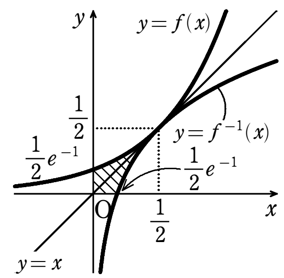
① を ② に代入して　　$1-2b=0$　　ゆえに　$b=\frac{1}{2}$

$b=\frac{1}{2}$ を ① に代入して　　$2ae=1$　　よって　$a=\frac{1}{2e}$

(2)　(1) の結果から，$a=\frac{1}{2e}$ のとき　　$f(x)=\frac{1}{2}e^{2x-1}$

また，曲線 $y=f(x)$ は点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ で直線 $y=x$ に接する。

曲線 $y=f(x)$ と 曲線 $y=f^{-1}(x)$ は直線 $y=x$ に関して対称であるから，この 2 曲線は点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ で接する。



よって，図のように，面積を求める部分の図形は直線 $y=x$ に関して対称である。

したがって，求める面積を S とすると

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}e^{2x-1}-x\right)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x-1}-x^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}e^{-1}$$

29 媒介変数表示 $x=\sin t$，$y=t^2$（ただし $-2\pi\leqq t\leqq2\pi$）で表された曲線で囲まれた領域の面積を求めよ。なお，領域が複数ある場合は，その面積の総和を求めよ。

解答　16π

解説

$x=\sin t$，$y=t^2$ から　　$\frac{dx}{dt}=\cos t$，$\frac{dy}{dt}=2t$

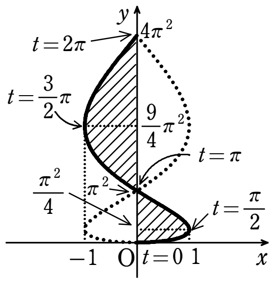
$\sin(-t)=-\sin t$，$(-t)^2=t^2$ であるから，曲線の $-2\pi\leqq t\leqq0$ に対応する部分は，曲線の $0\leqq t\leqq2\pi$ に対応する部分を y 軸に関して対称移動したものと一致する。

$0\leqq t\leqq2\pi$ のとき，$\frac{dx}{dt}=0$ とすると　　$t=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$

$0\leqq t\leqq2\pi$ における x，y の値の変化は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
x	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi^2}{4}$	$\nearrow$	$\frac{9}{4}\pi^2$	$\nearrow$	$4\pi^2$

よって，求める面積は，右の図の斜線部分の面積の 2 倍である。



斜線部分の面積は

$$\int_0^{\pi^2} x\,dy+\int_{\pi^2}^{4\pi^2}(-x)\,dy=\int_0^{\pi} x\frac{dy}{dt}dt-\int_{\pi}^{2\pi} x\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\int_0^{\pi}\sin t\cdot 2t\,dt-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\cdot 2t\,dt$$

$$=2\left(\int_0^{\pi} t\sin t\,dt-\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t\,dt\right)$$

ここで　$\displaystyle\int t\sin t\,dt=t(-\cos t)-\int 1\cdot(-\cos t)\,dt$

$$=-t\cos t+\sin t+C\quad (C\text{ は積分定数})$$

ゆえに　$\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_0^{\pi}=\pi$

$$\int_{\pi}^{2\pi} t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t+\sin t\Big]_{\pi}^{2\pi}=-3\pi$$

よって，斜線部分の面積は　$2\{\pi-(-3\pi)\}=8\pi$

したがって，求める面積は　$2\cdot 8\pi=16\pi$

30 極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ と表される。これを用いて，極方程式 $r=2(1+\cos\theta)$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{3}{2}\pi+4$

解説

曲線の極方程式は $r=2(1+\cos\theta)$ であるから，求める面積は

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+4\cos\theta+2\cos^2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+4\cos\theta+1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\left[3\theta+4\sin\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}\pi+4$$

31 極方程式 $r=1+\sin\dfrac{\theta}{2}$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ で表される曲線 C と x 軸で囲まれる領域の面積を，次のことを利用して求めよ。

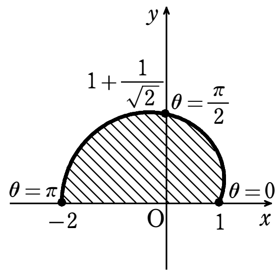
極方程式 $r=f(\theta)$ $(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$ で表される曲線上の点と極 O を結んだ線分が通過する領域の面積は $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ と表される。

解答　$\dfrac{3}{4}\pi+2$

解説

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$0\leqq\dfrac{\theta}{2}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から　$1+\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

よって，曲線 C の概形は右の図のようになるから，求める面積 S は



$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\sin\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1+2\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\theta-4\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\sin\theta\right]_0^{\pi}=\frac{3}{4}\pi+2$$