数学演習(定積分のいろいろな問題)R１．９．１１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$ とする。

(1) a_1 を求めよ。　(2) a_{n+1} を a_n で表せ。　(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 自然数 n に対して，$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$ とする。

(1) I_1 を求めよ。また，I_n+I_{n+1} を n で表せ。

(2) 不等式 $\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\int_1^x te^{-t}dt$　(2) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\sqrt{1+3\cos^2 t}\,dt$

$\boxed{4}$ (1) (ア) $1 \leqq x \leqq e$ において，不等式 $\log x \leqq \dfrac{x}{e}$ が成り立つことを示せ。

(イ) 自然数 n に対し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^e x^2(\log x)^n dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\int_0^x te^{t^2}dt$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $f(x)$，$g(x)$ はともに区間 $a \leqq x \leqq b$ $(a<b)$ で定義された連続な関数とする。

このとき，不等式 $\displaystyle\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx\right)\left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx\right)$ ……〔A〕

が成立することを示せ。また，等号はどのようなときに成立するかを述べよ。

$\boxed{6}$ $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$，$\alpha = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$ とする。

$|a_n - \alpha| \leqq \displaystyle\int_0^1 x^n dx$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{7}$ 自然数 n に対して，$R_n(x)=\dfrac{1}{1+x}-\{1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n\}$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x^2)\,dx$ を求めよ。

(2) 無限級数 $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots\cdots$ の和を求めよ。

$\boxed{8}$ n を 2 以上の自然数とする。

(1) 定積分 $\displaystyle\int_1^n x\log x\,dx$ を求めよ。

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdots\cdot n^n)}{n^2\log n}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 数列 $\{I_n\}$ を関係式 $I_0=\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$，$I_n=\dfrac{1}{n\,!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定めるとき，次の問いに答えよ。

(1) I_0，I_1 を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，I_n-I_{n-1} を n の式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ。

(4) $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k\,!}$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

$\boxed{10}$ $a>0$ に対し，$f(a)=\lim_{t\to+0}\int_t^1 |ax+x\log x|\,dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。必要ならば，$\lim_{t\to+0} t^n \log t=0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を用いてよい。

(1) $f(a)$ を求めよ。

(2) a が正の実数全体を動くとき，$f(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{11}$ 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

n を正の整数とし $a_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}$ とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $0\leqq x<2$ となる実数 x に対し，$g(x)=\begin{cases} x & (0\leqq x<1 \text{ のとき}) \\ 2-x & (1\leqq x<2 \text{ のとき}) \end{cases}$ と定める。次に，実数 $x\geqq 0$ に対し，$2m\leqq x<2m+2$ となる整数 m を用いて $f(x)=g(x-2m)$ と定める。

更に，$a_n=\int_0^{2n} e^{-x} f(x)\,dx$ で数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1) $y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq 4$ におけるグラフをかけ。

(2) a_1 を求めよ。

(3) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく。b_n を n の式で表せ。

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

数学演習(定積分のいろいろな問題)R１．９．１１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　）

[1] 自然数 n に対して，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$ とする。

(1) a_1 を求めよ。　(2) a_{n+1} を a_n で表せ。　(3) $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答　(1) $a_1=1-\frac{\pi}{4}$　(2) $a_{n+1}=-a_n+\frac{1}{2n+1}$　(3) 0

解説

(1) $a_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

(2) $a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx=\left[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-a_n$

$=-a_n+\frac{1}{2n+1}$

(3) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき　$0\leqq\tan x\leqq1$　よって　$0\leqq\tan^{2n+2}x\leqq\tan^{2n}x$

ゆえに　$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$　よって　$0\leqq a_{n+1}\leqq a_n$

ゆえに，(2) の結果から　$-a_n+\frac{1}{2n+1}\geqq0$　よって　$0\leqq a_n\leqq\frac{1}{2n+1}$

ここで，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

[2] 自然数 n に対して，$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$ とする。

(1) I_1 を求めよ。また，I_n+I_{n+1} を n で表せ。

(2) 不等式 $\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log2$ が成り立つことを示せ。

解答　(1) $I_1=1-\log2$，$I_n+I_{n+1}=\frac{1}{n+1}$　(2) 略　(3) 略

解説

(1) $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left[x-\log(1+x)\right]_0^1=1-\log2$

$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\left(\frac{x^n}{1+x}+\frac{x^{n+1}}{1+x}\right)dx=\int_0^1x^ndx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

(2) $0\leqq x\leqq1$ のとき　$1\leqq1+x\leqq2$

よって　$\frac12\leqq\frac{1}{1+x}\leqq1$　ゆえに　$\frac{x^n}{2}\leqq\frac{x^n}{1+x}\leqq x^n$

よって　$\int_0^1\frac{x^n}{2}dx\leqq\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqq\int_0^1x^ndx$

ここで　$\int_0^1\frac{x^n}{2}dx=\frac{1}{2(n+1)}$，$\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n+1}$

したがって　$\frac{1}{2(n+1)}\leqq I_n\leqq\frac{1}{n+1}$

(3) (1) より，$1=\log2+I_1$，$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+1}$ であるから

$\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}=1-\frac12+\frac13-\frac14+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

$=(\log2+I_1)-(I_1+I_2)+(I_2+I_3)-(I_3+I_4)+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(I_{n-1}+I_n)$

$=\log2+(-1)^{n-1}I_n$

(2) において　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

よって，$\lim_{n\to\infty}I_n=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log2$

[3] 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{x\to\infty}\int_1^x te^{-t}dt$　(2) $\lim_{x\to0}\frac1x\int_0^x\sqrt{1+3\cos^2t}\,dt$

解答　(1) $\frac{2}{e}$　(2) 2

解説

(1) $\int_1^x te^{-t}dt=\int_1^x t(-e^{-t})'dt=\left[-te^{-t}\right]_1^x+\int_1^xe^{-t}dt=-xe^{-x}+e^{-1}-\left[e^{-t}\right]_1^x$

$=-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+\frac{2}{e}$

ここで，$f(x)=e^x-x^2$ $(x\geqq1)$ とおくと

$f'(x)=e^x-2x$，　$f''(x)=e^x-2$

$f''(x)$ は単調に増加し，$x\geqq1$ のとき　$f''(x)\geqq e-2>0$

ゆえに，$f'(x)$ は $x\geqq1$ で単調に増加する。

このことと $f'(1)=e-2>0$ から，$x\geqq1$ のとき　$f'(x)>0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq1$ で単調に増加する。

このことと $f(1)=e-1>0$ から，$x\geqq1$ のとき　$f(x)>0$

したがって，$x\geqq1$ のとき　$e^x-x^2>0$　すなわち　$e^x>x^2$

ゆえに　$0<\frac{x}{e^x}<\frac1x$　$\lim_{x\to\infty}\frac1x=0$ であるから　$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$

以上から　$\lim_{x\to\infty}\int_1^xte^{-t}dt=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}+\frac2e\right)=\frac2e$

(2) $\int\sqrt{1+3\cos^2t}\,dt=F(t)+C$ (C は積分定数) とすると　$F'(t)=\sqrt{1+3\cos^2t}$

したがって　$\lim_{x\to0}\frac1x\int_0^x\sqrt{1+3\cos^2t}\,dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=F'(0)=2$

[4] (1) (ア) $1\leqq x\leqq e$ において，不等式 $\log x\leqq\frac{x}{e}$ が成り立つことを示せ。

(イ) 自然数 n に対し，$\lim_{n\to\infty}\int_1^ex^2(\log x)^ndx$ を求めよ。

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_0^xte^{t^2}dt$ を求めよ。

解答　(1) (ア) 略　(イ) 0　(2) 0

解説

(1) (ア) $f(x)=\frac{x}{e}-\log x$ とおくと　$f'(x)=\frac1e-\frac1x=\frac{x-e}{ex}$

$1<x<e$ において　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $1\leqq x\leqq e$ において単調に減少する。

また　$f(e)=0$

ゆえに，$1\leqq x\leqq e$ において　$f(x)\geqq0$　すなわち　$\log x\leqq\frac{x}{e}$

(イ) (ア) より，$1\leqq x\leqq e$ において　$0\leqq\log x\leqq\frac{x}{e}$

よって　$0\leqq(\log x)^n\leqq\left(\frac{x}{e}\right)^n$　ゆえに　$0\leqq x^2(\log x)^n\leqq x^2\left(\frac{x}{e}\right)^n$

よって　$0\leqq\int_1^ex^2(\log x)^ndx\leqq\int_1^ex^2\left(\frac xe\right)^ndx$

ここで　$\int_1^ex^2\left(\frac xe\right)^ndx=\frac{1}{e^n}\int_1^ex^{n+2}dx=\frac{1}{e^n}\left[\frac{1}{n+3}x^{n+3}\right]_1^e$

$=\frac{1}{e^n(n+3)}(e^{n+3}-1)=\frac{1}{n+3}\left(e^3-\frac{1}{e^n}\right)$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3}\left(e^3-\frac{1}{e^n}\right)=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\int_1^ex^2(\log x)^ndx=0$

(2) $\int te^{t^2}dt=F(t)+C$ (C は積分定数) とすると　$F'(t)=te^{t^2}$

よって　$\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_0^xte^{t^2}dt=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{2x}\cdot\left[F(t)\right]_0^x\right\}=\lim_{x\to0}\left\{\frac12\cdot\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\right\}$

$=\frac12F'(0)=0$

[5] $f(x)$，$g(x)$ はともに区間 $a\leqq x\leqq b$ $(a<b)$ で定義された連続な関数とする。

このとき，不等式 $\left\{\int_a^bf(x)g(x)dx\right\}^2\leqq\left(\int_a^b\{f(x)\}^2dx\right)\left(\int_a^b\{g(x)\}^2dx\right)$ ……[A]

が成立することを示せ。また，等号はどのようなときに成立するかを述べよ。

解答　証明略，常に $f(x)=0$ または $g(x)=0$ または $f(x)=kg(x)$ となる定数 k が存在するとき

解説

$p=\int_a^b\{g(x)\}^2dx$，$q=\int_a^bf(x)g(x)dx$，$r=\int_a^b\{f(x)\}^2dx$ とおく。区間 $[a,b]$ において

[1] 常に $f(x)=0$ または $g(x)=0$ のとき

不等式 [A] の両辺はともに 0 となり，[A] が成り立つ。

[2] [1] の場合以外のとき

t を任意の実数とすると

$\int_a^b\{f(x)+tg(x)\}^2dx=\int_a^b[\{f(x)\}^2+2tf(x)g(x)+t^2\{g(x)\}^2]dx=pt^2+2qt+r$

$\{f(x)+tg(x)\}^2\geqq0$ であるから　$\int_a^b\{f(x)+tg(x)\}^2dx\geqq0$

すなわち，任意の実数 t に対して $pt^2+2qt+r\geqq0$ が成り立つ。

ここで $p>0$ であるから，t の 2 次方程式 $pt^2+2qt+r=0$ の判別式を D とすると

$\frac D4=q^2-pr\leqq0$　ゆえに　$q^2\leqq pr$

[1]，[2] から　$q^2\leqq pr$　すなわち，不等式 [A] が成り立つ。

また，[2] において，不等式 [A] で等号が成り立つとすると，$D=0$ であるから，2 次方程式 $pt^2+2qt+r=0$ は重解 α をもつ。よって，$p\alpha^2+2q\alpha+r=0$ であるから

$\int_a^b\{f(x)+\alpha g(x)\}^2dx=0$ ……[B]

ここで，区間 $[a,b]$ で常に $\{f(x)+\alpha g(x)\}^2\geqq0$ であり，[B] から常に

$f(x)+\alpha g(x)=0$　すなわち　$f(x)=-\alpha g(x)$

以上から，[A] で等号が成り立つのは区間 $[a,b]$ で

常に $f(x)=0$ または $g(x)=0$ または $f(x)=kg(x)$ となる定数 k が存在するときに限る。

$\boxed{6}$ $a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$，$\alpha=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx$ とする。

$|a_n-\alpha|\leqq\int_0^1 x^n dx$ であることを示し，$\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答　証明略，$\log 2$

解説

$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して　$\int_0^1 x^{k-1}dx=\left[\frac{x^k}{k}\right]_0^1=\frac{1}{k}$

また，$0\leqq x\leqq 1$ では $-x\neq 1$，$1\leqq 1+x\leqq 2$ であり

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^1 x^{k-1}dx=\int_0^1\sum_{k=1}^{n}(-x)^{k-1}dx=\int_0^1\frac{1-(-x)^n}{1+x}dx$$

よって　$|a_n-\alpha|=\left|\int_0^1\left\{\frac{1-(-x)^n}{1+x}-\frac{1}{1+x}\right\}dx\right|$

$$=\left|\int_0^1\frac{-(-x)^n}{1+x}dx\right|\leqq\int_0^1\left|\frac{-(-x)^n}{1+x}\right|dx$$

$$=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx\leqq\int_0^1 x^n dx$$

$\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$ であるから　$0\leqq|a_n-\alpha|\leqq\frac{1}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}|a_n-\alpha|=0$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$

$\boxed{7}$ 自然数 n に対して，$R_n(x)=\frac{1}{1+x}-\{1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^n x^n\}$ とする。

(1)　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x^2)dx$ を求めよ。

(2)　無限級数 $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$ の和を求めよ。

解答　(1)　0　　(2)　$\frac{\pi}{4}$

解説

(1)　$R_n(x)$ の第 1 項の分母は 0 でないから　$x\neq -1$

$R_n(x)$ の第 2 項の{　}の中は，初項 1，公比 $-x$，項数 $n+1$ の等比数列の和であるから　$R_n(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1-(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}=\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{1+x}$

ゆえに　$\left|\int_0^1 R_n(x^2)dx\right|\leqq\int_0^1|R_n(x^2)|dx=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx$

$\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\leqq x^{2n+2}$ であり，等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}dx<\int_0^1 x^{2n+2}dx=\left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\right]_0^1=\frac{1}{2n+3}$$

したがって　$\left|\int_0^1 R_n(x^2)dx\right|<\frac{1}{2n+3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x^2)dx=0$

(2)　無限級数の初項から第 $n+1$ 項までの部分和を S_{n+1} とすると

$$S_{n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

$$\int_0^1 R_n(x^2)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^1\{1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}\}dx$$

ここで，$I=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$，$J=\int_0^1\{1-x^2+x^4-\cdots\cdots+(-1)^n x^{2n}\}dx$ とする。

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

$$J=\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

$$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

であるから

$$\int_0^1 R_n(x^2)dx=\frac{\pi}{4}-\left\{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}\right\}=\frac{\pi}{4}-S_{n+1}$$

(1) より，$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 R_n(x^2)dx=0$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4}-S_{n+1}\right)=0$

よって　$\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=\frac{\pi}{4}$　　　したがって，求める和は　$\frac{\pi}{4}$

$\boxed{8}$ n を 2 以上の自然数とする。

(1)　定積分 $\int_1^n x\log x\,dx$ を求めよ。

(2)　次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3)　$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdots\cdot n^n)}{n^2\log n}$ を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}$　　(2)　略　　(3)　$\frac{1}{2}$

解説

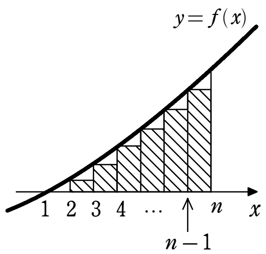
(1)　$\int_1^n x\log x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^n-\int_1^n\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}n^2\log n-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^n$

$$=\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}$$

(2)　$f(x)=x\log x$ とすると

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

よって，$x\geqq 1$ で $f'(x)>0$ となり，$x\geqq 1$ において $f(x)$ は単調に増加する。



自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき

$$k\log k\leqq x\log x\leqq(k+1)\log(k+1)$$

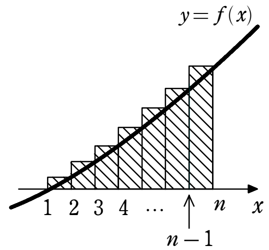
常に $k\log k=x\log x$ または $x\log x=(k+1)\log(k+1)$ ではないから

$$\int_k^{k+1}k\log k\,dx<\int_k^{k+1}x\log x\,dx<\int_k^{k+1}(k+1)\log(k+1)dx$$

ゆえに　$k\log k<\int_k^{k+1}x\log x\,dx<(k+1)\log(k+1)$

よって

$$\sum_{k=1}^{n-1}k\log k<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x\log x\,dx<\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\log(k+1)$$



ここで，(1) の結果を利用すると

$$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}x\log x\,dx=\int_1^n x\log x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)$$

また　$\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)\log(k+1)=\sum_{k=2}^{n}k\log k=\sum_{k=1}^{n}k\log k$

ゆえに　$\sum_{k=1}^{n-1}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k$　…… ①

$\sum_{k=1}^{n-1}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)$ の両辺に $n\log n$ を加えて

$$\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n\quad\cdots\cdots ②$$

①，② から，$n\geqq 2$ のとき

$$\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)<\sum_{k=1}^{n}k\log k<\frac{1}{2}n^2\log n-\frac{1}{4}(n^2-1)+n\log n$$

(3)　$a_n=\frac{\log(1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\cdots\cdots\cdot n^n)}{n^2\log n}$ とすると

$$a_n=\frac{1}{n^2\log n}(\log 1+2\log 2+\cdots\cdots+n\log n)=\frac{1}{n^2\log n}\sum_{k=1}^{n}k\log k$$

$n\geqq 2$ のとき　$n^2\log n>0$

よって，(2) で証明した不等式の各辺を $n^2\log n$ で割ると

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4\log n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)<a_n<\frac{1}{2}-\frac{1}{4\log n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}$$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\log n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right\}=\frac{1}{2}$，$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{4\log n}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n}\right\}=\frac{1}{2}$

したがって　$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$

$\boxed{9}$ 数列 $\{I_n\}$ を関係式 $I_0=\int_0^1 e^{-x}dx$，$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定めるとき，次の問いに答えよ。

(1)　I_0，I_1 を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，I_n-I_{n-1} を n の式で表せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}I_n$ を求めよ。

(4)　$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ とするとき，$\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

解答　(1)　$I_0=1-\frac{1}{e}$，$I_1=1-\frac{2}{e}$　　(2)　$I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!e}$　　(3)　0　　(4)　e

解説

(1)　$I_0=\int_0^1 e^{-x}dx=\Big[-e^{-x}\Big]_0^1=-e^{-1}+1=1-\frac{1}{e}$

$$I_1=\frac{1}{1!}\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_0^1 x(-e^{-x})'dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$=-e^{-1}+I_0=-\frac{1}{e}+\left(1-\frac{1}{e}\right)=1-\frac{2}{e}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}dx=\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n(-e^{-x})'dx$$

$$=\frac{1}{n!}\Big[-x^n e^{-x}\Big]_0^1+\frac{1}{n!}\int_0^1 nx^{n-1}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{e^{-1}}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx=-\frac{1}{n!e}+I_{n-1}$$

よって　$I_n-I_{n-1}=-\frac{1}{n!e}$　…… ①

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$0\leqq x^n\leqq 1$

各辺に e^{-x} を掛けると　$0\leqq x^n e^{-x}\leqq e^{-x}$

よって　$0\leqq\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{-x}dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx$

すなわち　$0\leqq I_n\leqq\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 e^{-x}dx$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-x}dx=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$

(4)　① について，$n=1$ とすると

$$I_1-I_0=\left(1-\frac{2}{e}\right)-\left(1-\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}=-\frac{1}{1!e}$$

よって，① は $n=1$ のときにも成り立つ。

ゆえに，$n\geqq1$ のとき

$$I_n=I_0+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k!e}\right)=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-1\right)=1-\frac{1}{e}S_n$$

したがって　$S_n=e-eI_n$

(3) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=e$

10　$a>0$ に対し，$f(a)=\displaystyle\lim_{t\to+0}\int_t^1|ax+x\log x|dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t^n\log t=0$（$n=1$，2，……）を用いてよい。

(1)　$f(a)$ を求めよ。

(2)　a が正の実数全体を動くとき，$f(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答　(1)　$f(a)=\dfrac{1}{2}e^{-2a}+\dfrac{a}{2}-\dfrac{1}{4}$　　(2)　$a=\dfrac{1}{2}\log2$ で最小値 $\dfrac{1}{4}\log2$

解説

(1)　$g(x)=ax+x\log x$ とすると　$g(x)=x(\log x+a)$

よって　$0<x\leqq e^{-a}$ のとき　$g(x)\leqq0$　　$x\geqq e^{-a}$ のとき　$g(x)\geqq0$

また，$a>0$ のとき，$0<e^{-a}<1$ である。

$t\longrightarrow+0$ のときを考えるから，t を十分小さくとると

$$\int_t^1|g(x)|dx=\int_t^{e^{-a}}\{-g(x)\}dx+\int_{e^{-a}}^1 g(x)dx$$

ここで　$\displaystyle\int g(x)dx=\int(ax+x\log x)dx=\frac{a}{2}x^2+\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=\frac{1}{2}x^2(a+\log x)-\frac{1}{4}x^2+C$$

$$=\frac{1}{4}x^2(2\log x+2a-1)+C\ \ (C\text{ は積分定数})$$

よって，$G(x)=\dfrac{1}{4}x^2(2\log x+2a-1)$ とすると

$$\int_t^1|g(x)|dx=\Big[-G(x)\Big]_t^{e^{-a}}+\Big[G(x)\Big]_{e^{-a}}^1=G(t)+G(1)-2G(e^{-a})$$

ここで，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t^2\log t=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{t\to+0}G(t)=0$

したがって　$f(a)=\displaystyle\lim_{t\to+0}\{G(t)+G(1)-2G(e^{-a})\}=G(1)-2G(e^{-a})$

$$=\frac{1}{4}(2a-1)-2\cdot\frac{1}{4}e^{-2a}\cdot(-1)=\frac{1}{2}e^{-2a}+\frac{a}{2}-\frac{1}{4}$$

(2)　(1) から　$f'(a)=\dfrac{1}{2}\cdot(-2e^{-2a})+\dfrac{1}{2}=-e^{-2a}+\dfrac{1}{2}$

$f'(a)=0$ とすると　$e^{-2a}=\dfrac{1}{2}$　　よって　$a=\dfrac{1}{2}\log2$

ゆえに，$a>0$ における $f(a)$ の増減表は右のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}\log2$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘	極小	↗

したがって，$f(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}\log2$ で最小となる。

最小値は　$f\left(\dfrac{1}{2}\log2\right)=\dfrac{1}{2}e^{-\log2}+\dfrac{1}{4}\log2-\dfrac{1}{4}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\log2-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\log2$$

11　実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。

n を正の整数とし $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答　$\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

解説

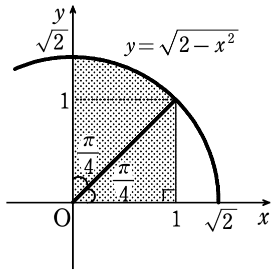
[　] の定義から　$\sqrt{2n^2-k^2}-1<[\sqrt{2n^2-k^2}]\leqq\sqrt{2n^2-k^2}$

よって　$\sqrt{2-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}-\dfrac{1}{n}<\dfrac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n}\leqq\sqrt{2-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$

ゆえに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}<a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$　…… ①

ここで　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$ は図の網目の部分の面積に等しいから



$$\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

また　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot n=\frac{1}{n}$

よって，① において

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}\right\}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$

12　$0\leqq x<2$ となる実数 x に対し，$g(x)=\begin{cases}x & (0\leqq x<1\text{ のとき})\\ 2-x & (1\leqq x<2\text{ のとき})\end{cases}$ と定める。次に，実数 $x\geqq0$ に対し，$2m\leqq x<2m+2$ となる整数 m を用いて $f(x)=g(x-2m)$ と定める。

更に，$a_n=\displaystyle\int_0^{2n}e^{-x}f(x)dx$ で数列 $\{a_n\}$ を定める。

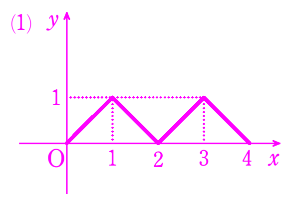
(1)　$y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq4$ におけるグラフをかけ。　　(2)　a_1 を求めよ。

(3)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおく。b_n を n の式で表せ。　　(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答　(1)　[図]　　(2)　$a_1=1-2e^{-1}+e^{-2}$

(3)　$b_n=e^{-2n}(1-2e^{-1}+e^{-2})$　　(4)　$\dfrac{e-1}{e+1}$

(1)



解説

(1)　[1]　$0\leqq x<2$ のとき

$2m\leqq x<2m+2$ となる整数 m は 0 であるから

$$f(x)=g(x)=\begin{cases}x & (0\leqq x<1)\\ 2-x & (1\leqq x<2)\end{cases}$$

[2]　$2\leqq x<4$ のとき

$2m\leqq x<2m+2$ となる整数 m は 1 であるから

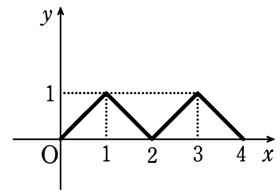
$$f(x)=g(x-2)=\begin{cases}x-2 & (2\leqq x<3)\\ 4-x & (3\leqq x<4)\end{cases}$$

[3]　$x=4$ のとき

$2m\leqq x<2m+2$ となる整数 m は 2 であるから

$f(4)=g(4-4)=0$

[1]～[3] から，$0\leqq x\leqq4$ における $y=f(x)$ のグラフは右の図のようになる。



(2)　(1) から，$0\leqq x<2$ において $f(x)=g(x)$ であるから

$$a_1=\int_0^1 xe^{-x}\,dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}\,dx$$

ここで　$\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^1-\int_0^1 1\cdot(-e^{-x})dx=-e^{-1}-\Big[e^{-x}\Big]_0^1=1-2e^{-1}$

$\displaystyle\int_1^2(2-x)e^{-x}dx=\Big[(x-2)e^{-x}\Big]_1^2-\int_1^2 1\cdot e^{-x}dx=e^{-1}+\Big[e^{-x}\Big]_1^2=e^{-2}$

よって　$a_1=1-2e^{-1}+e^{-2}$

(3)　$b_n=a_{n+1}-a_n=\displaystyle\int_0^{2n+2}e^{-x}f(x)dx-\int_0^{2n}e^{-x}f(x)dx=\int_{2n}^{2n+2}e^{-x}f(x)\,dx$

$2n\leqq x<2n+2$ において $f(x)=g(x-2n)$ であるから

$$b_n=\int_{2n}^{2n+2}e^{-x}g(x-2n)\,dx$$

$x-2n=t$ とおくと　$dx=dt$

x と t の対応は右のようになるから

x	$2n$	$\to$	$2n+2$
t	0	$\to$	2

$$b_n=\int_0^2 e^{-t-2n}g(t)\,dt=e^{-2n}\int_0^2 e^{-t}g(t)\,dt$$

$$=e^{-2n}a_1=e^{-2n}(1-2e^{-1}+e^{-2})$$

(4)　数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ の階差数列であるから，$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}e^{-2k}a_1=a_1\sum_{k=0}^{n-1}(e^{-2})^k$$

$e^{-2}\neq1$ であるから　$a_n=a_1\cdot\dfrac{1\cdot\{1-(e^{-2})^n\}}{1-e^{-2}}$

$0<e^{-2}<1$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a_1}{1-e^{-2}}=\frac{(1-e^{-1})^2}{(1+e^{-1})(1-e^{-1})}=\frac{1-e^{-1}}{1+e^{-1}}=\frac{e-1}{e+1}$