数学演習(区分求積法･不等式)Ｒ１．９．１０　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(k+n)^2(k+2n)}$

$\boxed{2}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right)$

$\boxed{3}$ 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3n+k}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\boxed{4}$ 次の極限値を求めよ。(2) では $p>0$ とする。

(1) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{3n}{n}\right)^2\right\}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

$\boxed{5}$ 極限値 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 数列 $a_n=\dfrac{1}{n^2}\sqrt[n]{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の極限値 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{7}$ 長さ 2 の線分 AB を直径とする半円周を点 $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0$, P_1, ……, P_{n-1}, $\mathrm{P}_n=\mathrm{B}$ で n 等分する。

(1) $\triangle \mathrm{AP}_k\mathrm{B}$ の 3 辺の長さの和 $\mathrm{AP}_k+\mathrm{P}_k\mathrm{B}+\mathrm{BA}$ を $l_n(k)$ とおく。$l_n(k)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\alpha=\lim_{n\to\infty}\dfrac{l_n(1)+l_n(2)+\cdots\cdots+l_n(n)}{n}$ を求めよ。ただし，$l_n(n)=4$ とする。

$\boxed{8}$ 曲線 $y=\sqrt{4-x}$ を C とする。$t\,(2\leqq t\leqq 3)$ に対して，曲線 C 上の点 $(t,\ \sqrt{4-t})$ と原点，点 $(t,\ 0)$ の 3 点を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とする。区間 $[2,\ 3]$ を n 等分し，その端点と分点を小さい方から順に $t_0=2$, t_1, t_2, ……, t_{n-1}, $t_n=3$ とするとき，極限値

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)$ を求めよ。

$\boxed{9}$ (1) 次の不等式を証明せよ。

(ア) $0<x<\dfrac{1}{2}$ のとき $1<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　(イ) $\dfrac{1}{2}<\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\dfrac{\pi}{6}$

(2) 不等式 $\displaystyle\int_0^a e^{-t^2}dt\geqq a-\dfrac{a^3}{3}$ を証明せよ。ただし，$a\geqq 0$ とする。

$\boxed{10}$ (1)　次の不等式を証明せよ。

(ア)　$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ のとき　$1<\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

(イ)　$\dfrac{\pi}{4}<\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}<2-\sqrt{4-\pi}$

(2)　$x>0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt<x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{10}$ を証明せよ。

$\boxed{11}$ 次の不等式を証明せよ。ただし，n は自然数とする。

(1)　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$　$(n\geqq 2)$

(2)　$2\sqrt{n+1}-2<1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqq 2\sqrt{n}-1$

$\boxed{12}$ 次の極限値を求めよ。

(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(k+\sqrt{k^2+n^2}\right)-\log n\right\}$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sin\dfrac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$

13 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{\sqrt{(2n)^2-1^2}+\sqrt{(2n)^2-2^2}+\sqrt{(2n)^2-3^2}+\cdots\cdots+\sqrt{(2n)^2-(2n-1)^2}\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n}{2n^2+3nk+k^2}$

14 (1) すべての実数 t に対し，$1+t\leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $\displaystyle\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$ を示せ。

15 n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも1個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

1 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(k+n)^2(k+2n)}$

解答 (1) $\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}-\dfrac{3}{4}$　(2) $\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{3}{4}$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $\displaystyle\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{n+k}{n^3\cdot n}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{n}\left(\frac{n+k}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$

よって　$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+k}{n^4}\right)^{\frac{1}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{3}}=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{3}}dx$

$\displaystyle=\left[\frac{3}{4}(1+x)^{\frac{4}{3}}\right]_0^1=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}-\frac{3}{4}$

(2) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}+1\right)^2\left(\frac{k}{n}+2\right)}=\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}dx$

ここで，$\displaystyle\frac{1}{(x+1)^2(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{(x+1)^2}+\frac{c}{x+2}$ とすると

$a=-1,\quad b=1,\quad c=1$

よって　$\displaystyle S=\int_0^1\left\{-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+2}\right\}dx$

$\displaystyle=\left[-\log(x+1)-\frac{1}{x+1}+\log(x+2)\right]_0^1=\frac{1}{2}+\log\frac{3}{4}$

2 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right)$

解答 (1) $\dfrac{\pi}{2}$　(2) 1

解説

求める極限値を S とする。

(1) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}=\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k}{n}\pi=\pi\int_0^1\sin^2\pi x\,dx=\pi\int_0^1\frac{1-\cos2\pi x}{2}dx$

$\displaystyle=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$

(2) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}ke^{\frac{k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}=\int_0^1xe^x dx$

$\displaystyle=\int_0^1x(e^x)'dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1e^xdx=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1$

3 次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3n+k}$　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

解答 (1) $\log\dfrac{5}{3}$　(2) $2(\sqrt{2}-1)$

解説

求める極限値を S とする。

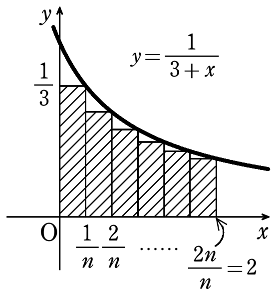
(1) $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3n+k}$ とすると

$\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{3+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}$

S_n は図の長方形の面積の和を表すから

$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^2\frac{1}{3+x}dx=\Big[\log(3+x)\Big]_0^2$

$\displaystyle=\log5-\log3=\log\frac{5}{3}$



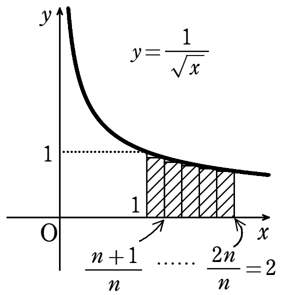
(2) $\displaystyle S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ とすると

$\displaystyle S_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$

S_n は図の長方形の面積の和を表すから

$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_1^2\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^2$

$=2(\sqrt{2}-1)$



別解　$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x}}=\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$

4 次の極限値を求めよ。(2) では $p>0$ とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{3}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{3n}{n}\right)^2\right\}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

解答 (1) 9　(2) $\dfrac{3^{p+1}-1}{2^{p+1}}$

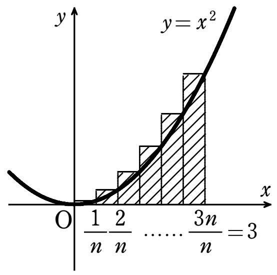
解説

求める極限値を S とする。

(1) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$

$\displaystyle S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^2$ とすると，S_n は図の長方形の面積の和を表すから

$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^3x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=9$



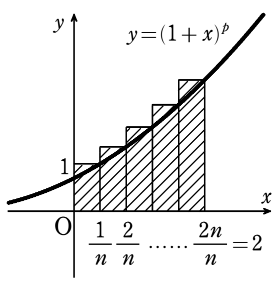
(2) $\displaystyle\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

$\displaystyle=\frac{\sum_{k=1}^{2n}(n+k)^p}{\sum_{k=1}^{2n}k^p}=\frac{\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}$ であり

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^p$

$\displaystyle=\int_0^2(1+x)^pdx$

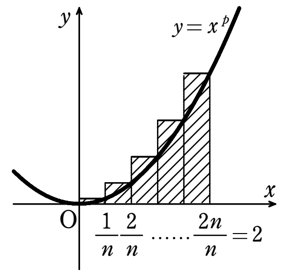
$\displaystyle=\left[\frac{(1+x)^{p+1}}{p+1}\right]_0^2=\frac{3^{p+1}-1}{p+1}$



$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$

$\displaystyle=\int_0^2x^pdx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^2=\frac{2^{p+1}}{p+1}$



したがって　$\displaystyle S=\frac{3^{p+1}-1}{p+1}\cdot\frac{p+1}{2^{p+1}}=\frac{3^{p+1}-1}{2^{p+1}}$

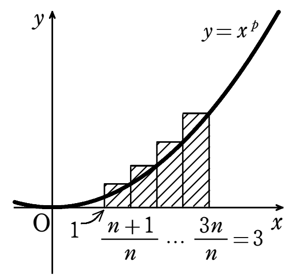
別解　$\displaystyle\frac{(n+1)^p+(n+2)^p+\cdots\cdots+(n+2n)^p}{1^p+2^p+\cdots\cdots+(2n)^p}$

$\displaystyle=\frac{\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}{\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}}$ と考えると

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{3n}\left(\frac{k}{n}\right)^p$

$\displaystyle=\int_1^3x^pdx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^3=\frac{3^{p+1}-1}{p+1}$



以後は，同じ。

5 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ を求めよ。

解答 $\dfrac{256}{27e}$

解説

$\displaystyle a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{\frac{(4n)!}{(3n)!}}$ とすると

$\displaystyle a_n=\frac{1}{n}\{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(3n+n)\}^{\frac{1}{n}}$

$\displaystyle=\frac{1}{n}\left\{n^n\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

$\displaystyle=\frac{1}{n}\cdot(n^n)^{\frac{1}{n}}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

$\displaystyle=\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$

よって，両辺の自然対数をとると

$\displaystyle\log a_n=\frac{1}{n}\left\{\log\left(3+\frac{1}{n}\right)+\log\left(3+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(3+\frac{n}{n}\right)\right\}$

$\displaystyle=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(3+\frac{k}{n}\right)$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\log a_n)=\int_0^1\log(3+x)dx=\int_0^1(3+x)'\log(3+x)dx$

$\displaystyle=\Big[(3+x)\log(3+x)\Big]_0^1-\int_0^1(3+x)\cdot\frac{1}{3+x}dx$

$\displaystyle=4\log4-3\log3-1=\log\frac{4^4}{3^3e}=\log\frac{256}{27e}$

関数 $\log x$ は $x>0$ で連続であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{256}{27e}$

6 数列 $a_n=\frac{1}{n^2}\sqrt[n]{{}_{4n}\mathrm{P}_{2n}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答 $\frac{64}{e^2}$

解説

$$a_n=\frac{1}{n^2}\{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+2n)\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left\{n^{2n}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(2+\frac{2n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

$$=\left\{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(2+\frac{2n}{n}\right)\right\}^{\frac{1}{n}}$$

よって，両辺の自然対数をとると

$$\log a_n=\frac{1}{n}\left\{\log\left(2+\frac{1}{n}\right)+\log\left(2+\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(2+\frac{2n}{n}\right)\right\}$$

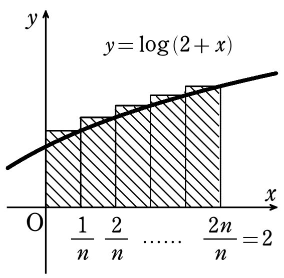
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}(\log a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\log\left(2+\frac{k}{n}\right)$

$$=\int_0^2\log(2+x)\,dx=\int_0^2(2+x)'\log(2+x)\,dx$$

$$=\Big[(2+x)\log(2+x)\Big]_0^2-\int_0^2(2+x)\cdot\frac{1}{2+x}\,dx$$

$$=4\log4-2\log2-2=\log\frac{4^4}{2^2e^2}=\log\frac{64}{e^2}$$



関数 $\log x$ は $x>0$ で連続であるから $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{64}{e^2}$

7 長さ 2 の線分 AB を直径とする半円周を点 $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0$，P_1，……，P_{n-1}，$\mathrm{P}_n=\mathrm{B}$ で n 等分する。

(1) $\triangle\mathrm{AP}_k\mathrm{B}$ の 3 辺の長さの和 $\mathrm{AP}_k+\mathrm{P}_k\mathrm{B}+\mathrm{BA}$ を $l_n(k)$ とおく。$l_n(k)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{l_n(1)+l_n(2)+\cdots\cdots+l_n(n)}{n}$ を求めよ。ただし，$l_n(n)=4$ とする。

解答 (1) $l_n(k)=2\left(\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)$ (2) $\alpha=2\left(\frac{4}{\pi}+1\right)$

解説

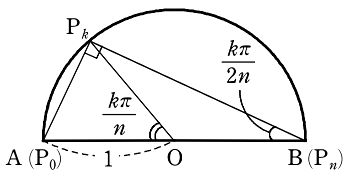
(1) 線分 AB の中点を O とすると

$$\angle\mathrm{AOP}_k=\frac{k}{n}\pi$$

よって $\angle\mathrm{ABP}_k=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOP}_k=\frac{k\pi}{2n}$

ゆえに $\mathrm{AP}_k=\mathrm{AB}\sin\angle\mathrm{ABP}_k=2\sin\frac{k\pi}{2n}$，

$\mathrm{P}_k\mathrm{B}=\mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{ABP}_k=2\cos\frac{k\pi}{2n}$



したがって $l_n(k)=2\left(\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)$

(2) $\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}l_n(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\left(\sin\frac{k\pi}{2n}+\cos\frac{k\pi}{2n}+1\right)$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)+1\right\}$$

$$=2\int_0^1\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\cos\frac{\pi x}{2}+1\right)dx=2\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}+x\right]_0^1$$

$$=2\left\{\left(\frac{2}{\pi}+1\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\right)\right\}=2\left(\frac{4}{\pi}+1\right)$$

8 曲線 $y=\sqrt{4-x}$ を C とする。$t\ (2\leqq t\leqq3)$ に対して，曲線 C 上の点 $(t,\ \sqrt{4-t})$ と原点，点 $(t,\ 0)$ の 3 点を頂点とする三角形の面積を $S(t)$ とする。区間 $[2,\ 3]$ を n 等分し，その端点と分点を小さい方から順に $t_0=2$，t_1，t_2，……，t_{n-1}，$t_n=3$ とするとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)$ を求めよ。

解答 $\frac{28\sqrt{2}-17}{15}$

解説

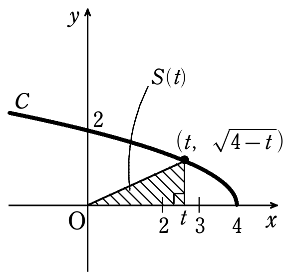
$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot\sqrt{4-t}=\frac{1}{2}t\sqrt{4-t}$$

$\frac{t_n-t_0}{n}=\frac{1}{n}$ より，$t_k=2+\frac{k}{n}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

と表すことができるから

$$S(t_k)=\frac{1}{2}t_k\sqrt{4-t_k}=\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{4-\left(2+\frac{k}{n}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{2-\frac{k}{n}}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$



よって $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2+\frac{k}{n}\right)\sqrt{2-\frac{k}{n}}$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(2+x)\sqrt{2-x}\,dx$$

ここで，$\sqrt{2-x}=u$ とおくと

$x=2-u^2$，$dx=-2u\,du$

x と u の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow1$
u	$\sqrt{2}\longrightarrow1$

ゆえに $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S(t_k)=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{1}(4-u^2)u\cdot(-2u)\,du=\int_1^{\sqrt{2}}(4u^2-u^4)\,du$

$$=\left[\frac{4}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5\right]_1^{\sqrt{2}}=\frac{28\sqrt{2}-17}{15}$$

9 (1) 次の不等式を証明せよ。

(ア) $0<x<\frac{1}{2}$ のとき $1<\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (イ) $\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{\pi}{6}$

(2) 不等式 $\int_0^a e^{-t^2}dt\geqq a-\frac{a^3}{3}$ を証明せよ。ただし，$a\geqq0$ とする。

解答 (1) (ア) 略 (イ) 略 (2) 略

解説

(1) (ア) $0<x<\frac{1}{2}$ のとき，$0<x^3<x^2<1$ であるから $1>1-x^3>1-x^2>0$

ゆえに $1>\sqrt{1-x^3}>\sqrt{1-x^2}>0$ よって $1<\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(イ) (ア) の結果から $\int_0^{\frac{1}{2}}dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$x=\sin\theta$ とおくと $dx=\cos\theta\,d\theta$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

x	$0\longrightarrow\frac{1}{2}$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\frac{\pi}{6}$$

したがって $\frac{1}{2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}<\frac{\pi}{6}$

(2) $f(a)=\int_0^a e^{-t^2}dt-\left(a-\frac{a^3}{3}\right)$ とすると $f'(a)=e^{-a^2}-(1-a^2)$

$a\geqq0$ のとき $f''(a)=2a(1-e^{-a^2})\geqq0$ また $f'(0)=0$

よって $f'(a)\geqq0$ また，$f(0)=0$ であるから $f(a)\geqq0$

ゆえに，与えられた不等式が成り立つ。

10 (1) 次の不等式を証明せよ。

(ア) $0<x<\frac{\pi}{4}$ のとき $1<\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(イ) $\frac{\pi}{4}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}<2-\sqrt{4-\pi}$

(2) $x>0$ のとき，不等式 $\int_0^x e^{-t^2}dt<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}$ を証明せよ。

解答 (1) (ア) 略 (イ) 略 (2) 略

解説

(1) (ア) $0<x<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$ のとき，$0<\sin x<x<1$ であるから

$1>1-\sin x>1-x>0$

よって $1>\sqrt{1-\sin x}>\sqrt{1-x}>0$

ゆえに $1<\frac{1}{\sqrt{1-\sin x}}<\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

(イ) (ア) から $\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

また $\int_0^{\frac{\pi}{4}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx=\Big[-2\sqrt{1-x}\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-2\left(\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}-1\right)$$

$$=-\sqrt{4-\pi}+2$$

したがって $\frac{\pi}{4}<\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sqrt{1-\sin x}}<2-\sqrt{4-\pi}$

(2) $f(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}-\int_0^x e^{-t^2}dt$ とすると

$$f'(x)=1-x^2+\frac{x^4}{2}-e^{-x^2},\quad f''(x)=-2x+2x^3+2xe^{-x^2}=2x(-1+x^2+e^{-x^2})$$

$g(x)=-1+x^2+e^{-x^2}$ とすると $g'(x)=2x(1-e^{-x^2})$

$x>0$ のとき $g'(x)>0$ であるから，$x\geqq0$ で $g(x)$ は単調に増加する。

$g(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき $g(x)>0$

したがって，$x>0$ のとき $f''(x)>0$

ゆえに，$x\geqq0$ で $f'(x)$ は単調に増加する。

$f'(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき $f'(x)>0$

よって，$x\geqq0$ で $f(x)$ は単調に増加する。

$f(0)=0$ であるから，$x>0$ のとき $f(x)>0$

したがって $x>0$ のとき $\int_0^x e^{-t^2}dt<x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}$

11 次の不等式を証明せよ。ただし，n は自然数とする。

(1) $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$ $(n\geqq2)$

(2) $2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq 2\sqrt{n}-1$

解答 (1) 略 (2) 略

解説

(1) 自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき $\frac{1}{(k+1)^2}\leqq\frac{1}{x^2}$

常に $\frac{1}{k+1}=\frac{1}{x}$ ではないから $\int_k^{k+1}\frac{dx}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}$

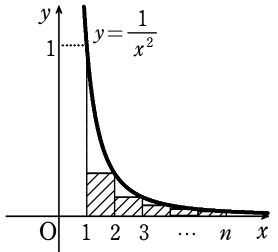
ゆえに $\frac{1}{(k+1)^2}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}$

よって $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^2}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}$ ……①

ここで $\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x^2}=\int_1^{n}\frac{dx}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n=1-\frac{1}{n}$

ゆえに，不等式①の両辺に1を加えて

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n}$



(2) 自然数 k に対して，$k\leqq x\leqq k+1$ のとき $\frac{1}{\sqrt{k+1}}\leqq\frac{1}{\sqrt{x}}\leqq\frac{1}{\sqrt{k}}$

常に $\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$ または $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{k}}$ ではないから

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{k}}$$

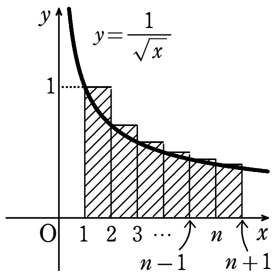
ゆえに $\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{k}}$ から $\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$

$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_1^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n+1}=2\sqrt{n+1}-2$

であるから

$2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ …①



また，$n\geqq 2$ のとき，$\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ から

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

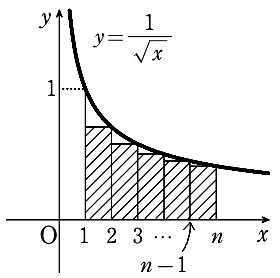
$\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_1^{n}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\left[2\sqrt{x}\right]_1^{n}=2\sqrt{n}-2$ である

から

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2$$

この不等式の両辺に1を加えて

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$$



ここで，$n=1$ のとき $\frac{1}{\sqrt{n}}=1$，$2\sqrt{n}-1=1$

よって，自然数 n について

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq 2\sqrt{n}-1$ ……②

①，②から $2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leqq 2\sqrt{n}-1$

12 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k+\sqrt{k^2+n^2})-\log n\right\}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}$

解答 (1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$ (3) $2(\sqrt{2}-1)$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan\theta$ とおくと $dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$

よって $S=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k+\sqrt{k^2+n^2})-\frac{1}{n}\cdot n\log n\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+\sqrt{k^2+n^2})-\log n\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+\sqrt{k^2+n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left\{\frac{k}{n}+\sqrt{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\right\}$

$=\int_0^1\log(x+\sqrt{x^2+1})dx=\int_0^1(x)'\log(x+\sqrt{x^2+1})dx$

$=\left[x\log(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$=\log(1+\sqrt{2})-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1$

(3) $S=\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=1\cdot\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$

$=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=2(\sqrt{2}-1)$

13 次の極限値を求めよ。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\{\sqrt{(2n)^2-1^2}+\sqrt{(2n)^2-2^2}+\sqrt{(2n)^2-3^2}+\cdots\cdots+\sqrt{(2n)^2-(2n-1)^2}\}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n}{2n^2+3nk+k^2}$

解答 (1) π (2) $\log 3-\log 2$

解説

求める極限値を S とする。

(1) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{\frac{4n^2-k^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$

$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ は，半径2の四分円の面積を表すから $S=\frac{\pi\cdot 2^2}{4}=\pi$

別解 $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{(2n)^2-k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{\sqrt{(2n)^2-k^2}}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}\sqrt{1-\left(\frac{k}{2n}\right)^2}$

$=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=4\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4}=\pi$

(2) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{n^2}{2n^2+3nk+k^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2+3\cdot\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^2\frac{1}{2+3x+x^2}dx=\int_0^2\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^2\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$=\left[\log(x+1)-\log(x+2)\right]_0^2=\log 3-\log 4-(-\log 2)$

$=\log 3-\log 2$

14 (1) すべての実数 t に対し，$1+t\leqq e^t$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$ の値を求めよ。

(3) 不等式 $\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$ を示せ。

解答 (1) 略 (2) $2-\sqrt{2}$ (3) 略

解説

(1) $f(t)=e^t-(1+t)$ とすると $f'(t)=e^t-1$

$f'(t)=0$ とすると $t=0$

$f(t)$ の増減表は右のようになる。

t	…	0	…
$f'(t)$	−	0	+
$f(t)$	↘	極小 0	↗

よって，$f(t)$ はすべての実数 t に対して $f(t)\geqq 0$

ゆえに，すべての実数 t に対して $1+t\leqq e^t$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx=\left[\tan x-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=1-\sqrt{2}+1=2-\sqrt{2}$

(3) (1)の不等式で，$t=-\sin x$ とすると $1-\sin x\leqq e^{-\sin x}$

よって $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\sin x)dx=\left[x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ であるから

$\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx$ ……①

また，(1)の不等式で，$t=\sin x$ とすると $1+\sin x\leqq e^{\sin x}$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ のとき，$1+\sin x>0$ であるから

$\frac{1}{e^{\sin x}}\leqq\frac{1}{1+\sin x}$ すなわち $e^{-\sin x}\leqq\frac{1}{1+\sin x}$

ゆえに $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin x}dx$

(2)から $\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$ ……②

①，②から $\frac{\pi}{4}-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-\sin x}dx\leqq 2-\sqrt{2}$

15 n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも1個以下のボールしか入っていない確率を p_n

とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。

解答　$\log 2-1$

解説

1 個のボールに対し，箱に入れる方法は $2n$ 通りあるから，n 個のボールを $2n$ 個の箱に入れる方法は　$(2n)^n$ 通り

どの箱にも 1 個以下のボールしか入らない場合の数は，異なる $2n$ 個のものから n 個を取り出して並べる順列の総数に等しいから　${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通り

よって　$$p_n=\frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n}=\frac{2n(2n-1)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+1)}{2^n n^n}=\frac{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}{2^n n^n}$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}{2^n}$$

ゆえに　$$\log p_n=\log\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}-\log 2^n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-n\log 2$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)-\log 2\right\}=\int_0^1\log(1+x)\,dx-\log 2$$

$$=\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1 dx-\log 2$$

$$=2\log 2-\log 1-\Big[x\Big]_0^1-\log 2=\log 2-1$$