数学演習(定積分で表された関数)R１．９．９　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の関数を x について微分せよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\log t}{e^t+1}dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\cos 3t\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_x^2 (t+1)\log t\,dt$ $(x>0)$

$\boxed{2}$ 次の関数を微分せよ。

(1) $\displaystyle f(x)=\int_0^x (t-x)\sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt$ $(x>0)$

$\boxed{3}$ 次の関数を微分せよ。ただし，(3) では $x>0$ とする。

(1) $\displaystyle y=\int_0^x (x-t)^2 e^t\,dt$　　(2) $\displaystyle y=\int_x^{x+1}\sin \pi t\,dt$　　(3) $\displaystyle y=\int_x^{x^2}\log t\,dt$

$\boxed{4}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。(2) では，定数 a の値も求めよ。

(1) $f(x)=3x+\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$

(2) $\int_a^x (x-t)f(t)\,dt=\log x-x+1$

$\boxed{5}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $f(x)=\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$

(2) $f(x)=e^x\int_0^1 \frac{1}{e^t+1}\,dt+\int_0^1 \frac{f(t)}{e^t+1}\,dt$

(3) $f(x)=\frac{1}{2}x+\int_0^x (t-x)\sin t\,dt$

$\boxed{6}$ $-2 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $f(x)=\int_0^x (1-t^2)e^t\,dt$ の最大値・最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{7}$ (1) 定積分 $I(a)=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-ax\right)^2dx$ を求めよ。

(2) $I(a)$ の値を最小にする a の値を求め，そのときの積分の値 I を求めよ。

$\boxed{8}$ 実数 t が $1\leqq t\leqq e$ の範囲を動くとき，$S(t)=\int_0^1|e^x-t|dx$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{9}$ 関係式 $f(x)+\int_0^x f(t)e^{x-t}dt=\sin x$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると，$f'(x)=$ ア $\boxed{}$ である。また，$f(0)=$ イ $\boxed{}$ であるから，$f(x)=$ ウ $\boxed{}$ である。

$\boxed{10}$ $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin(x-t)\,dt$，$g(x)=x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

$\boxed{11}$ a，b を実数とする。a，b の値を変化させたときの積分 $\int_0^1 \{\cos\pi x-(ax+b)\}^2 dx$ の最小値，およびそのときの a，b の値を求めよ。

$\boxed{12}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}\,dt$ と定める。$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

数学演習(定積分で表された関数)R１．９．９　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 次の関数を x について微分せよ。

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\log t}{e^t+1}dt$　　(2) $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\cos 3t\,dt$　　(3) $\displaystyle\int_x^2 (t+1)\log t\,dt\ (x>0)$

解答　(1) 0　(2) $e^{x^2}\cos 3x$　(3) $-(x+1)\log x$

解説

(1) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_2^3 \frac{\log t}{e^t+1}dt=0$　　(2) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^x e^{t^2}\cos 3t\,dt=e^{x^2}\cos 3x$

(3) $\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^2 (t+1)\log t\,dt=-\frac{d}{dx}\int_2^x (t+1)\log t\,dt=-(x+1)\log x$

2 次の関数を微分せよ。

(1) $\displaystyle f(x)=\int_0^x (t-x)\sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle f(x)=\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt\ (x>0)$

解答　(1) $\cos x-1$　(2) $\dfrac{x^2-x}{\log x}$

解説

(1) $\displaystyle f(x)=\int_0^x (t-x)\sin t\,dt=\int_0^x t\sin t\,dt-x\int_0^x \sin t\,dt$

よって　$\displaystyle f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x t\sin t\,dt-\left\{(x)'\int_0^x \sin t\,dt+x\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt\right)\right\}$

$\displaystyle =x\sin x-\left(\int_0^x \sin t\,dt+x\sin x\right)=\Big[\cos t\Big]_0^x=\cos x-1$

(2) $\dfrac{1}{\log t}$ の原始関数を $F(t)$ とすると

$$\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt=F(x^3)-F(x^2),\qquad F'(t)=\frac{1}{\log t}$$

よって　$\displaystyle f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3}\frac{1}{\log t}dt=F'(x^3)(x^3)'-F'(x^2)(x^2)'$

$\displaystyle =\frac{3x^2}{\log x^3}-\frac{2x}{\log x^2}=\frac{x^2}{\log x}-\frac{x}{\log x}=\frac{x^2-x}{\log x}$

別解　$\displaystyle f'(x)=\frac{1}{\log x^3}\cdot(x^3)'-\frac{1}{\log x^2}\cdot(x^2)'=\frac{3x^2}{3\log x}-\frac{2x}{2\log x}=\frac{x^2-x}{\log x}$

3 次の関数を微分せよ。ただし，(3) では $x>0$ とする。

(1) $\displaystyle y=\int_0^x (x-t)^2e^t\,dt$　　(2) $\displaystyle y=\int_x^{x+1}\sin \pi t\,dt$　　(3) $\displaystyle y=\int_x^{x^2}\log t\,dt$

解答　(1) $2e^x-2x-2$　(2) $-2\sin \pi x$　(3) $(4x-1)\log x$

解説

(1) $\displaystyle y=\int_0^x (x^2-2tx+t^2)e^t\,dt=x^2\int_0^x e^t\,dt-2x\int_0^x te^t\,dt+\int_0^x t^2e^t\,dt$

ゆえに　$\displaystyle y'=2x\int_0^x e^t\,dt+x^2e^x-\left(2\int_0^x te^t\,dt+2x\cdot xe^x\right)+x^2e^x$

$\displaystyle =2x\int_0^x e^t\,dt-2\int_0^x te^t\,dt$

ここで　$\displaystyle \int_0^x e^t\,dt=\Big[e^t\Big]_0^x=e^x-1,$

$\displaystyle \int_0^x te^t\,dt=\Big[te^t\Big]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=xe^x-\Big[e^t\Big]_0^x=xe^x-e^x+1$

よって　$y'=2x(e^x-1)-2(xe^x-e^x+1)=2e^x-2x-2$

(2) $\sin \pi t$ の原始関数を $F(t)$ とすると

$$\int_x^{x+1}\sin \pi t\,dt=F(x+1)-F(x),\qquad F'(t)=\sin \pi t$$

よって　$y'=F'(x+1)(x+1)'-F'(x)(x)'=\sin \pi(x+1)-\sin \pi x$

$=\sin(\pi x+\pi)-\sin \pi x=-\sin \pi x-\sin \pi x$

$=-2\sin \pi x$

別解　$y'=\sin \pi(x+1)\cdot(x+1)'-\sin \pi x\cdot(x)'=\sin \pi(x+1)-\sin \pi x=-2\sin \pi x$

(3) $\log t$ の原始関数を $F(t)$ とすると

$$\int_x^{x^2}\log t\,dt=F(x^2)-F(x),\qquad F'(t)=\log t$$

よって　$y'=F'(x^2)(x^2)'-F'(x)(x)'=\log x^2\cdot(2x)-\log x$

$=2x\cdot 2\log x-\log x=(4x-1)\log x$

別解　$y'=\log x^2\cdot(x^2)'-\log x\cdot(x)'=2x\cdot 2\log x-\log x=(4x-1)\log x$

4 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。(2) では，定数 a の値も求めよ。

(1) $\displaystyle f(x)=3x+\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt$　　(2) $\displaystyle \int_a^x (x-t)f(t)\,dt=\log x-x+1$

解答　(1) $f(x)=3x-3\pi$　(2) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$a=1$

解説

(1) $\displaystyle \int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=k$ とおくと　$f(x)=3x+k$

したがって　$\displaystyle \int_0^\pi f(t)\sin t\,dt=\int_0^\pi (3t+k)\sin t\,dt=\int_0^\pi (3t+k)(-\cos t)'dt$

$\displaystyle =\Big[(3t+k)(-\cos t)\Big]_0^\pi-\int_0^\pi (3t+k)'(-\cos t)\,dt$

$\displaystyle =3\pi+k-(-k)+3\int_0^\pi \cos t\,dt=3\pi+2k+3\Big[\sin t\Big]_0^\pi$

$=3\pi+2k$

ゆえに　$k=3\pi+2k$　　よって　$k=-3\pi$

したがって　$f(x)=3x-3\pi$

(2) 等式から　$\displaystyle x\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x tf(t)\,dt=\log x-x+1$

両辺を x で微分すると　$\displaystyle 1\cdot\int_a^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\frac{1}{x}-1$

ゆえに　$\displaystyle \int_a^x f(t)\,dt=\frac{1}{x}-1$　……①

① の両辺を x で微分すると　$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

① の両辺に $x=a$ を代入して　$0=\dfrac{1}{a}-1$

これを解くと　$a=1$　　よって　$f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$a=1$

5 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(1) $\displaystyle f(x)=\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$　　(2) $\displaystyle f(x)=e^x\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt+\int_0^1\frac{f(t)}{e^t+1}dt$

(3) $\displaystyle f(x)=\frac{1}{2}x+\int_0^x (t-x)\sin t\,dt$

解答　(1) $f(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi-2}$　(2) $f(x)=(e^x+1)\log\dfrac{2e}{e+1}$

(3) $f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$

解説

(1) $\displaystyle \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt=k$ とおくと　$f(x)=\cos x+k$

ゆえに　$\displaystyle k=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t+k)\,dt=\Big[\sin t+kt\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1+\frac{\pi}{2}k$　　よって　$\dfrac{2-\pi}{2}k=1$

ゆえに　$k=-\dfrac{2}{\pi-2}$　　したがって　$f(x)=\cos x-\dfrac{2}{\pi-2}$

(2) $\displaystyle \int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt=a$，$\displaystyle \int_0^1\frac{f(t)}{e^t+1}dt=b$ とおくと　$f(x)=ae^x+b$

ゆえに　$\displaystyle a=\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt=\int_0^1\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}dt=\int_0^1(-1)\cdot\frac{(1+e^{-t})'}{1+e^{-t}}dt$

$\displaystyle =\Big[-\log(1+e^{-t})\Big]_0^1=\log\frac{2}{1+e^{-1}}=\log\frac{2e}{e+1},$

$\displaystyle b=\int_0^1\frac{ae^t+b}{e^t+1}dt=\int_0^1\left(a+\frac{b-a}{e^t+1}\right)dt=\Big[at\Big]_0^1+(b-a)\int_0^1\frac{1}{e^t+1}dt$

$=a+(b-a)a$

よって　$b-a=(b-a)a$　　ゆえに　$(b-a)(1-a)=0$

$a=\log\dfrac{2e}{e+1}\neq 1$ であるから　$b-a=0$　　よって　$b=a=\log\dfrac{2e}{e+1}$

したがって　$f(x)=(e^x+1)\log\dfrac{2e}{e+1}$

(3) 与えられた等式を ① とすると，① は

$$f(x)=\frac{1}{2}x+\int_0^x t\sin t\,dt-x\int_0^x \sin t\,dt$$

この両辺を x で微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{2}+x\sin x-\int_0^x \sin t\,dt-x\sin x=\frac{1}{2}-\Big[-\cos t\Big]_0^x=\cos x-\frac{1}{2}$$

よって　$\displaystyle f(x)=\int\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx=\sin x-\frac{1}{2}x+C$　(C は積分定数)　……②

ここで，等式 ① の両辺に $x=0$ を代入して　$f(0)=0$　　② から　$C=0$

したがって　$f(x)=\sin x-\dfrac{1}{2}x$

6 $-2\leqq x\leqq 2$ のとき，関数 $\displaystyle f(x)=\int_0^x(1-t^2)e^t\,dt$ の最大値・最小値と，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=1$ で最大値 1，$x=2$ で最小値 $1-e^2$

解説

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x(1-t^2)e^t\,dt=(1-x^2)e^x$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=\pm 1$

よって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	

また　$\displaystyle f(x)=\int_0^x(1-t^2)(e^t)'dt$

$\displaystyle =\Big[(1-t^2)e^t\Big]_0^x+2\int_0^x te^t\,dt$

$=(1-x^2)e^x-1+2\left(\left[te^t\right]_0^x-\int_0^x e^t dt\right)$

$=(1-x^2)e^x-1+2xe^x-2(e^x-1)$

$=(-x^2+2x-1)e^x+1=1-(x-1)^2e^x$

よって　$f(-2)=1-\frac{9}{e^2}$，$f(-1)=1-\frac{4}{e}$，$f(1)=1$，$f(2)=1-e^2$

ここで，$f(-2)<f(1)$ であり，$f(-1)$ と $f(2)$ の値を比較すると

$f(-1)-f(2)=\frac{e^3-4}{e}>0$　　ゆえに　$f(-1)>f(2)$

したがって　$x=1$ で最大値 1，$x=2$ で最小値 $1-e^2$

$\boxed{7}$ (1)　定積分 $I(a)=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-ax\right)^2dx$ を求めよ。

(2)　$I(a)$ の値を最小にする a の値を求め，そのときの積分の値 I を求めよ。

解答　(1)　$\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}$　　(2)　$a=\frac{12}{\pi^2}$，$I=\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}$

解説

(1)　$I(a)=\int_0^1\left(\sin\frac{\pi}{2}x-ax\right)^2dx=a^2\int_0^1x^2dx-2a\int_0^1x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx+\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{2}x\,dx$

ここで　$\int_0^1x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$，

$\int_0^1x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=\int_0^1x\left(-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right)'dx=\left[-\frac{2}{\pi}x\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{4}{\pi^2}$，

$\int_0^1\sin^2\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(1-\cos\pi x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=\frac{1}{2}$

したがって　$I(a)=\frac{1}{3}a^2-\frac{8}{\pi^2}a+\frac{1}{2}$

(2)　(1) から　$I(a)=\frac{1}{3}\left(a-\frac{12}{\pi^2}\right)^2+\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}$

ゆえに，$I(a)$ は $a=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小となり　$I=I\left(\frac{12}{\pi^2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{48}{\pi^4}$

$\boxed{8}$ 実数 t が $1\leqq t\leqq e$ の範囲を動くとき，$S(t)=\int_0^1|e^x-t|dx$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$t=e$ のとき最大値 1，$t=\sqrt{e}$ のとき最小値 $e-2\sqrt{e}+1$

解説

$e^x-t=0$ とすると　$x=\log t$

$1\leqq t\leqq e$ であるから　$0\leqq\log t\leqq 1$

ゆえに　$0\leqq x\leqq\log t$ のとき　$|e^x-t|=-(e^x-t)$，

$\log t\leqq x\leqq 1$ のとき　$|e^x-t|=e^x-t$

よって　$S(t)=\int_0^{\log t}\{-(e^x-t)\}dx+\int_{\log t}^1(e^x-t)dx=-\left[e^x-tx\right]_0^{\log t}+\left[e^x-tx\right]_{\log t}^1$

$=-2(e^{\log t}-t\log t)+1+e-t$

$=-2t+2t\log t+1+e-t$

$=2t\log t-3t+e+1$

ゆえに　$S'(t)=2\log t+2t\cdot\frac{1}{t}-3=2\log t-1$

$S'(t)=0$ とすると　$\log t=\frac{1}{2}$

よって　$t=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$1\leqq t\leqq e$ における $S(t)$ の増減表は右のようになる。

t	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$e-2$	↘	極小	↗	1

ここで　$e-2<1$，

$S(\sqrt{e})=2\sqrt{e}\log\sqrt{e}-3\sqrt{e}+e+1=e-2\sqrt{e}+1$

したがって，$S(t)$ は $t=e$ のとき最大値 1，

$t=\sqrt{e}$ のとき最小値 $e-2\sqrt{e}+1$ をとる。

$\boxed{9}$ 関係式 $f(x)+\int_0^xf(t)e^{x-t}dt=\sin x$ を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を考える。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めると，$f'(x)=$ ア $\boxed{}$ である。また，$f(0)=$ イ $\boxed{}$ であるから，$f(x)=$ ウ $\boxed{}$ である。

解答　(ア)　$\cos x-\sin x$　　(イ)　0　　(ウ)　$\sin x+\cos x-1$

解説

与えられた関係式を変形すると

$f(x)+e^x\int_0^xf(t)e^{-t}dt=\sin x$　…… ①

この両辺を x で微分すると

$f'(x)+e^x\int_0^xf(t)e^{-t}dt+e^x\cdot f(x)e^{-x}=\cos x$

すなわち　$f'(x)+f(x)+e^x\int_0^xf(t)e^{-t}dt=\cos x$

① を代入すると　$f'(x)+\sin x=\cos x$

よって　$f'(x)=$ ア $\cos x-\sin x$

また，① の両辺に $x=0$ を代入すると　$f(0)=$ イ 0

更に　$f(x)=\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$　(C は積分定数)

$f(0)=0$ であるから　$1+C=0$　　ゆえに　$C=-1$

したがって　$f(x)=$ ウ $\sin x+\cos x-1$

$\boxed{10}$ $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin(x-t)dt$，$g(x)=x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos x$，$g(x)=x+\frac{\pi}{2}-2$

解説

$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)dt=\sin x\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt-\cos x\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin t\,dt$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\cos t\,dt=a$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}g(t)\sin t\,dt=b$ とおくと　$f(x)=a\sin x-b\cos x$

また，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt=c$ とおくと　$g(x)=x+c$

ゆえに　$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+c)\cos t\,dt=\left[(t+c)\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,dt$

$=\frac{\pi}{2}+c-\left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+c-1$

よって　$a=c+\frac{\pi}{2}-1$　…… ①

また　$b=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t+c)\sin t\,dt=\left[-(t+c)\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=c+\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=c+1$

よって　$b=c+1$　…… ②

更に　$c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t-b\cos t)dt=\left[-a\cos t-b\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=-b+a$

よって　$c=a-b$　…… ③

①，②，③ から　$a=\pi-3$，$b=\frac{\pi}{2}-1$，$c=\frac{\pi}{2}-2$

したがって　$f(x)=(\pi-3)\sin x-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cos x$，$g(x)=x+\frac{\pi}{2}-2$

$\boxed{11}$ a，b を実数とする。a，b の値を変化させたときの積分 $\int_0^1\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2dx$ の最小値，およびそのときの a，b の値を求めよ。

解答　$a=-\frac{24}{\pi^2}$，$b=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小値 $-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$

解説

$\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2=\cos^2\pi x+(ax+b)^2-2(ax+b)\cos\pi x$

$=\frac{1}{2}\cos2\pi x+a^2x^2+2abx+b^2+\frac{1}{2}-2(ax+b)\cos\pi x$

ここで　$\int_0^1\cos2\pi x\,dx=\left[\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1=0$，

$\int_0^1\left(a^2x^2+2abx+b^2+\frac{1}{2}\right)dx=\left[\frac{a^2}{3}x^3+abx^2+\left(b^2+\frac{1}{2}\right)x\right]_0^1$

$=\frac{a^2}{3}+ab+b^2+\frac{1}{2}$，

$\int_0^1(ax+b)\cos\pi x\,dx=\left[(ax+b)\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1-\int_0^1\frac{a}{\pi}\sin\pi x\,dx$

$=-\frac{a}{\pi}\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1=-\frac{2a}{\pi^2}$

ゆえに　$\int_0^1\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2dx=\frac{a^2}{3}+ab+b^2+\frac{1}{2}-2\cdot\left(-\frac{2a}{\pi^2}\right)$

$=b^2+ab+\frac{a^2}{3}+\frac{4a}{\pi^2}+\frac{1}{2}$

$=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(a^2+\frac{48}{\pi^2}a\right)+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{12}\left(a+\frac{24}{\pi^2}\right)^2+\left(b+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$

よって，$a=-\frac{24}{\pi^2}$，$b=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小値 $-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$ をとる。

$\boxed{12}$ $0\leqq x\leqq\pi$ に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定める。$f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。

解答　$x=\frac{\pi}{4}$ で最大値 $\log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$，$x=\pi$ で最小値 $-\log 2$

解説

[1]　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき，$0\leqq t\leqq x$ において　$|t-x|=-(t-x)$，

$x \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　　$|t-x|=t-x$

よって　　$f(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt$

$=\displaystyle\int_0^x \left[-\frac{\{1-\sin(t-x)\}'}{1-\sin(t-x)}\right]dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\{1+\sin(t-x)\}'}{1+\sin(t-x)}dt$

$=\Big[-\log|1-\sin(t-x)|\Big]_0^x+\Big[\log|1+\sin(t-x)|\Big]_x^{\frac{\pi}{2}}$

$=\log(1+\sin x)+\log(1+\cos x)$

ゆえに　　$f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$

$=\dfrac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$

$=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)(1+\sin x+\cos x)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$

$f'(x)=0$ とすると，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より

$\dfrac{3}{4}\pi \leqq x+\dfrac{3}{4}\pi \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ であるから

$x+\dfrac{3}{4}\pi=\pi$　　よって　$x=\dfrac{\pi}{4}$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\log 2$	$\nearrow$	$\log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$\log 2$

[2]　$\dfrac{\pi}{2}<x \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において　　$|t-x|=-(t-x)$

よって　　$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt=\Big[-\log|1-\sin(t-x)|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\log(1-\cos x)+\log(1+\sin x)$

ゆえに　　$f'(x)=-\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{-\sin x(1+\sin x)+\cos x(1-\cos x)}{(1-\cos x)(1+\sin x)}$

$=\dfrac{-(\sin x-\cos x+1)}{(1-\cos x)(1+\sin x)}<0$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<x \leqq \pi$ のとき $f(x)$ は単調に減少する。　また　　$f(\pi)=-\log 2$

[1]，[2] から，$f(x)$ は　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値 $\log\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$，$x=\pi$ で最小値 $-\log 2$　をとる。