数学演習(定積分)R１．９．９　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5-x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{(2-x)^2}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin^3\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{2-\sin^2\theta}\,d\theta$　　(5) $\displaystyle\int_{\log\pi}^{\log 2\pi} e^x \sin e^x\,dx$

$\boxed{3}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$　　(2) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+4}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

$\boxed{5}$ 次の定積分を求めよ。(2) では a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (2\sin t+3\cos t)^2 dt$　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a} x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos x+x^2\sin x)dx$

$\boxed{6}$ $f(x)$ は連続な関数，a は正の定数とする。

(1) 等式 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ を証明せよ。

(2) (1) の等式を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^a \frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$ を求めよ。

$\boxed{7}$ (1)　連続な関数 $f(x)$ について，等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx$ を証明せよ。

(2)　定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ を求めよ。

$\boxed{8}$ (1)　連続な関数 $f(x)$ について，等式 $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ を示せ。

(2)　(1) の等式を利用して，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}\,dx$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 連続な関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たすものとする。

(1)　等式 $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^{-x}}\,dx=\int_0^{a} f(x)\,dx$ を証明せよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x}{1+e^{-x}}\,dx$ を求めよ。

$\boxed{10}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|dx$

$\boxed{11}$ 次の定積分を求めよ。(4) では a, b は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} xe^{3x}dx$ (2) $\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx$ (3) $\displaystyle\int_1^e (\log x)^2dx$

(4) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^2(x-b)dx$ (5) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \left|x\cos\frac{x}{3}\right|dx$

$\boxed{12}$ a は 0 でない定数とし，$A=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-ax}\sin 2x\,dx$，$B=\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-ax}\cos 2x\,dx$ とする。このとき，A，B の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{13}$ $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ (n は 0 以上の整数) とするとき，関係式 $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq 2)$ と，次の [1]，[2] が成り立つことを証明せよ。ただし，$\sin^0 x=\cos^0 x=1$ である。

[1]　$I_0=\dfrac{\pi}{2}$，$n\geqq 1$ のとき　$I_{2n}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}$

[2]　$I_1=1$，$n\geqq 2$ のとき　$I_{2n-1}=1\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{5}\cdot\cdots\cdots\cdot\dfrac{2n-2}{2n-1}$

$\boxed{14}$ (1)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$，$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$ (n は 0 以上の整数) とすると，$I_n=J_n$ $(n\geqq 0)$ が成り立つことを示せ。ただし，$\sin^0 x=\cos^0 x=1$ である。

(2)　$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$ (n は自然数) とする。$n\geqq 3$ のときの I_n を，n，I_{n-2} を用いて表せ。また，I_3，I_4 を求めよ。

$\boxed{15}$ m，n を 0 以上の整数として，$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ とする。次の等式を証明せよ。ただし，$\sin^0 x=\cos^0 x=1$ である。

(1)　$I_{m,n}=I_{n,m}$

(2)　$I_{m,n}=\dfrac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$ $(n\geqq 2)$

$\boxed{16}$ m, n は 0 以上の整数で $I_{m,\ n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\,dx$ とするとき，$I_{m,\ n}=I_{n,\ m}$，

$I_{m,\ n}=\dfrac{n-1}{m+n} I_{m,\ n-2}$ $(n \geqq 2)$ が成り立つ。この等式を利用して，次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^7 x\,dx$

$\boxed{17}$ a を正の定数とする。任意の実数 x に対して，$x=a\tan y$ を満たす y $\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を対応させる関数を $y=f(x)$ とするとき，$\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx$ を求めよ。

$\boxed{18}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx$ $(a>0)$

$\boxed{19}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^3+1}dx$ を求めよ。

$\boxed{20}$ 整式 $f(x)$ は 3 次以下で，以下の条件を満たしているという。$f(x)$ を求めよ。

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^{1} f(x)e^x dx=1,\ f(1)=f(-1)=0$$

$\boxed{21}$ (1) 不定積分 $\displaystyle\int e^{2x+e^x}dx$ を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \{x(1-x)\}^{\frac{3}{2}}dx$ を求めよ。

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5-x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx$

解答　(1) $\dfrac{16}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}\log 2$

解説

(1) $\sqrt{5-x}=t$ とおくと，$x=5-t^2$ から　$dx=-2tdt$
x と t の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow 4$
t	$2 \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5-x}}dx=\int_2^1 \frac{5-t^2}{t}\cdot(-2t)dt=2\int_1^2(5-t^2)dt$

$$=2\left[5t-\frac{t^3}{3}\right]_1^2=2\left\{\left(10-\frac{8}{3}\right)-\left(5-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

$$=\frac{16}{3}$$

(2) $1+\sin^2 x=t$ とおくと　$2\sin x\cos x\,dx=dt$
x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 2$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx=\int_1^2\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\Big[\log t\Big]_1^2$

$$=\frac{1}{2}(\log 2-0)=\frac{1}{2}\log 2$$

別解　$\displaystyle(与式)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+\sin^2 x)'}{1+\sin^2 x}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{(2-x)^2}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^3\theta\,d\theta$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{2-\sin^2\theta}d\theta$　　(5) $\displaystyle\int_{\log\pi}^{\log 2\pi} e^x\sin e^x\,dx$

解答　(1) $\dfrac{16\sqrt{2}}{15}$　(2) $\dfrac{1}{2}-\log 2$　(3) $\dfrac{9}{8}$　(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$　(5) -2

解説

(1) $\sqrt{2-x}=t$ とおくと　$2-x=t^2$，$dx=-2tdt$
x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2$
t	$\sqrt{2} \longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx=\int_{\sqrt{2}}^0(2-t^2)t(-2t)dt$

$$=2\int_0^{\sqrt{2}}(2t^2-t^4)dt=2\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{t^5}{5}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\left(\frac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2}-\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{15}$$

(2) $2-x=t$ とおくと　$x-1=-t+1$，$dx=-dt$
x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 1$
t	$2 \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{x-1}{(2-x)^2}dx=\int_2^1\frac{-t+1}{t^2}\cdot(-1)dt=\int_1^2\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\right)dt$

$$=\left[-\frac{1}{t}-\log t\right]_1^2=\left(-\frac{1}{2}-\log 2\right)-(-1)$$

$$=\frac{1}{2}-\log 2$$

(3) $\cos\theta=t$ とおくと　$\sin\theta\,d\theta=-dt$
θ と t の対応は右のようになる。

θ	$0 \longrightarrow \frac{2}{3}\pi$
t	$1 \longrightarrow -\frac{1}{2}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin^3\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta$

$$=\int_1^{-\frac{1}{2}}(1-t^2)\cdot(-1)dt=\int_{-\frac{1}{2}}^1(1-t^2)dt$$

$$=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{1}{2}}^1=\left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right)=\frac{9}{8}$$

(4) $\sin\theta=t$ とおくと　$\cos\theta\,d\theta=dt$
θ と t の対応は右のようになる。

θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$0 \longrightarrow 1$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{2-\sin^2\theta}d\theta=\int_0^1\frac{dt}{2-t^2}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\left(\frac{1}{\sqrt{2}-t}+\frac{1}{\sqrt{2}+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[-\log(\sqrt{2}-t)+\log(\sqrt{2}+t)\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right]_0^1=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)^2=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$$

(5) $e^x=t$ とおくと　$x=\log t$

よって　$dx=\dfrac{1}{t}dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$\log\pi \longrightarrow \log 2\pi$
t	$\pi \longrightarrow 2\pi$

ゆえに　$\displaystyle\int_{\log\pi}^{\log 2\pi}e^x\sin e^x\,dx=\int_\pi^{2\pi}t\sin t\cdot\frac{1}{t}dt=\int_\pi^{2\pi}\sin t\,dt$

$$=\Big[-\cos t\Big]_\pi^{2\pi}=-2$$

3 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

解答　(1) $\dfrac{9}{4}\pi$　(2) $\dfrac{\pi}{6}$　(3) $\dfrac{2}{3}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

(1) $x=3\sin\theta$ とおくと　$dx=3\cos\theta\,d\theta$
x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{9\cos^2\theta}=3\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3\cos\theta)\cdot 3\cos\theta\,d\theta=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\frac{9}{2}\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{4}\pi$$

(2) $x=4\sin\theta$ とおくと　$dx=4\cos\theta\,d\theta$
x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 2$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{16\cos^2\theta}=4\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$

(3) $x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$
x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{4\cos^2\theta}=2\cos\theta$$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\sin^2\theta}{2\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\theta\,d\theta$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta=2\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}$　　(2) $\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}$

解答　(1) $\dfrac{\pi}{3}$　(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$　(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

解説

(1) $x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{3}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$

$$=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{3}$$

(2) $x^2-2x+4=(x-1)^2+3$ と変形できる。

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$1 \longrightarrow 4$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

(3) $x=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \sqrt{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{(x^2+2)\sqrt{x^2+2}}=\int_0^{\sqrt{2}}\frac{dx}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}(\tan^2\theta+1)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

5 次の定積分を求めよ。(2) では a は定数とする。

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+3\cos t)^2dt$　　(2) $\displaystyle\int_{-a}^{a}x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(\cos x+x^2\sin x)dx$

解答 (1) 13π　(2) 0　(3) $\sqrt{3}$

解説

(1) $\displaystyle(\text{与式})=\int_{-\pi}^{\pi}(4\sin^2t+12\sin t\cos t+9\cos^2t)dt$

$\sin^2t$, $\cos^2t$ は偶関数, $\sin t\cos t$ は奇関数であるから

$$(\text{与式})=2\int_0^{\pi}(4\sin^2t+9\cos^2t)dt=2\int_0^{\pi}\left\{4(\sin^2t+\cos^2t)+5\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}\right\}dt$$

$$=2\int_0^{\pi}\left\{4+\frac{5}{2}(1+\cos 2t)\right\}dt=\int_0^{\pi}(13+5\cos 2t)dt$$

$$=\left[13t+\frac{5}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=13\pi$$

(2) $f(x)=x\sqrt{a^2-x^2}$ とすると　$f(-x)=-x\sqrt{a^2-x^2}=-f(x)$

よって, $f(x)$ は奇関数であるから　(与式)$=0$

(3) $\cos x$ は偶関数であり, $(-x)^2\sin(-x)=-x^2\sin x$ であるから, $x^2\sin x$ は奇関数である。

よって　$\displaystyle(\text{与式})=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

6 $f(x)$ は連続な関数, a は正の定数とする。

(1) 等式 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ を証明せよ。

(2) (1) の等式を利用して, 定積分 $\displaystyle\int_0^a\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$ を求めよ。

解答 (1) 略　(2) $\dfrac{a}{2}$

解説

(1) $a-x=t$ とおくと　$x=a-t$

ゆえに　$dx=-dt$　　x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow a$
t	$a\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle(\text{右辺})=\int_0^a f(a-x)dx=\int_a^0 f(t)(-dt)=\int_0^a f(t)dt$

$\displaystyle=\int_0^a f(x)dx=(\text{左辺})$

(2) $\displaystyle I=\int_0^a\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}dx$ とし, $\displaystyle f(x)=\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}$ とする。

(1) の等式 $\displaystyle\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$ から　$\displaystyle I=\int_0^a f(a-x)dx$

また　$\displaystyle f(x)+f(a-x)=\frac{e^x}{e^x+e^{a-x}}+\frac{e^{a-x}}{e^{a-x}+e^x}$

ゆえに　$f(x)+f(a-x)=1$

よって　$\displaystyle\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(a-x)dx=\int_0^a dx$

ゆえに　$I+I=a$　　したがって　$I=\dfrac{a}{2}$

7 (1) 連続な関数 $f(x)$ について, 等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$ を証明せよ。

(2) 定積分 $\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ を求めよ。

解答 (1) 略　(2) $\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　$dx=-dt$,

$\sin x=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-t\right)=\cos t$

x と t の対応は右のようになるから

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t)\cdot(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos t)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$$

(2) $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow 0$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cdot(-1)dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

最後の式を J とおくと

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

$I=J$ であるから, $2I=\dfrac{\pi}{2}$ より　$I=\dfrac{\pi}{4}$

8 (1) 連続な関数 $f(x)$ について, 等式 $\displaystyle\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$ を示せ。

(2) (1) の等式を利用して, 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2x}dx$ を求めよ。

解答 (1) 略　(2) $\dfrac{\pi}{4}\log 3$

解説

(1) $x=\pi-t$ とおくと　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
t	$\pi\longrightarrow 0$

証明する等式の左辺を I とすると

$$I=\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_{\pi}^0(\pi-t)f(\sin(\pi-t))\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)dt=\pi\int_0^{\pi}f(\sin t)dt-\int_0^{\pi}tf(\sin t)dt$$

$$=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}f(\sin x)dx-I$$

よって　$\displaystyle I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$

(2) $\displaystyle J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2x}dx$ とすると, (1) から

$$J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{3+\sin^2x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{4-\cos^2x}dx$$

$\cos x=u$ とおくと　$-\sin x\,dx=du$

x と u の対応は右のようになる。

x	$0\longrightarrow\pi$
u	$1\longrightarrow -1$

よって　$\displaystyle J=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{-1}{4-u^2}du=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4-u^2}du$

$$=\pi\int_0^1\frac{1}{4-u^2}du=\frac{\pi}{4}\int_0^1\left(\frac{1}{2+u}+\frac{1}{2-u}\right)du$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[\log(2+u)-\log(2-u)\Big]_0^1=\frac{\pi}{4}\log 3$$

9 連続な関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たすものとする。

(1) 等式 $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^a f(x)dx$ を証明せよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を求めよ。

解答 (1) 略　(2) 1

解説

(1) $x=-t$ とおくと　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$-a\longrightarrow 0$
t	$a\longrightarrow 0$

よって　$\displaystyle\int_{-a}^0\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_a^0\frac{f(-t)}{1+e^t}\cdot(-1)dt$

$$=\int_0^a\frac{f(t)}{1+e^t}dt=\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^x}dx$$

ゆえに　$\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{-a}^0\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx+\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$

$$=\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^x}dx+\int_0^a\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$$

$$=\int_0^a\left\{\frac{f(x)}{1+e^x}+\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\right\}dx$$

$$=\int_0^a\frac{(1+e^x)f(x)}{1+e^x}dx$$

$$=\int_0^a f(x)dx$$

(2) $f(x)=x\sin x$ とすると, 常に $f(x)=f(-x)$ が成り立つ。

よって, (1) により

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cdot(-\cos x)'dx$$

$$=\Big[x\cdot(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)dx$$

$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

10 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{\log x}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi}x^2|\sin x|dx$

解答 (1) $-\dfrac{\log 2}{2}+\dfrac{1}{2}$　(2) $6\pi^2-8$

解説

(1) $\int_1^2 \frac{\log x}{x^2}dx = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x}\right)'\log x\,dx = \left[-\frac{1}{x}\log x\right]_1^2 - \int_1^2\left(-\frac{1}{x}\right)\cdot(\log x)'dx$

$$= -\frac{\log 2}{2} + \int_1^2 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\log 2}{2} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$= -\frac{\log 2}{2} + \left\{-\frac{1}{2}-(-1)\right\} = -\frac{\log 2}{2}+\frac{1}{2}$$

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ のとき　$|\sin x| = \sin x$

$\pi \leqq x \leqq 2\pi$ のとき　$|\sin x| = -\sin x$ であるから

$$\int_0^{2\pi} x^2|\sin x|dx = \int_0^\pi x^2\sin x\,dx - \int_\pi^{2\pi} x^2 \sin x\,dx$$

ここで, $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

(C は積分定数) から

$$\int_0^{2\pi}x^2|\sin x|dx = \left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_0^\pi - \left[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\right]_\pi^{2\pi}$$

$$=(\pi^2-2-2)-(-4\pi^2+2-\pi^2+2) = 6\pi^2-8$$

11 次の定積分を求めよ。(4) では a, b は定数とする。

(1) $\int_0^{\frac13} xe^{3x}dx$　(2) $\int_1^e x^2\log x\,dx$　(3) $\int_1^e(\log x)^2dx$

(4) $\int_a^b (x-a)^2(x-b)dx$　(5) $\int_0^{2\pi}\left|x\cos\frac{x}{3}\right|dx$

解答　(1) $\frac19$　(2) $\frac{2e^3+1}{9}$　(3) $e-2$　(4) $-\frac{1}{12}(b-a)^4$

(5) $(9-3\sqrt3)\pi-\frac92$

解説

(1) (与式)$=\int_0^{\frac13} x\left(\frac13 e^{3x}\right)'dx = \left[\frac13 xe^{3x}\right]_0^{\frac13} - \int_0^{\frac13}\frac13 e^{3x}dx$

$$=\frac19 e - \left[\frac19 e^{3x}\right]_0^{\frac13} = \frac19 e - \frac19(e-1) = \frac19$$

(2) (与式)$=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx$

$$=\frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{e^3}{3}-\frac{e^3-1}{9} = \frac{2e^3+1}{9}$$

(3) (与式)$=\int_1^e (x)'(\log x)^2dx = \left[x(\log x)^2\right]_1^e - 2\int_1^e \log x\,dx$

$$= e - 2\int_1^e (x)'\log x\,dx = e - 2\left(\left[x\log x\right]_1^e - \left[x\right]_1^e\right)$$

$$= e-2\{e-(e-1)\} = e-2$$

(4) (与式)$=\int_a^b\left\{\frac13(x-a)^3\right\}'(x-b)dx = \frac13\left[(x-a)^3(x-b)\right]_a^b - \frac13\int_a^b(x-a)^3dx$

$$=-\frac{1}{12}\left[(x-a)^4\right]_a^b = -\frac{1}{12}(b-a)^4$$

(5) $0\leqq x\leqq \frac32\pi$ のとき, $0\leqq\frac{x}{3}\leqq\frac{\pi}{2}$ から　$\left|\cos\frac x3\right| = \cos\frac x3$

$\frac32\pi\leqq x\leqq 2\pi$ のとき, $\frac{\pi}{2}\leqq\frac x3\leqq\frac23\pi$ から　$\left|\cos\frac x3\right| = -\cos\frac x3$

よって　$\int_0^{2\pi}\left|x\cos\frac x3\right|dx = \int_0^{\frac32\pi}x\cos\frac x3\,dx - \int_{\frac32\pi}^{2\pi}x\cos\frac x3\,dx$

ここで　$\int x\cos\frac x3\,dx = x\cdot3\sin\frac x3 - \int 3\sin\frac x3\,dx = 3x\sin\frac x3 + 9\cos\frac x3 + C$

(C は積分定数)

ゆえに　$\int_0^{2\pi}\left|x\cos\frac x3\right|dx = \left[3x\sin\frac x3+9\cos\frac x3\right]_0^{\frac32\pi} - \left[3x\sin\frac x3+9\cos\frac x3\right]_{\frac32\pi}^{2\pi}$

$$=2\cdot\frac92\pi - 9 - \left(3\sqrt3\pi - \frac92\right) = (9-3\sqrt3)\pi - \frac92$$

12 a は 0 でない定数とし, $A=\int_0^\pi e^{-ax}\sin 2x\,dx$, $B=\int_0^\pi e^{-ax}\cos 2x\,dx$ とする。このとき, A, B の値をそれぞれ求めよ。

解答　$A=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$,　$B=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

解説

$$A=\int_0^\pi\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)'\sin 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\sin 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi\frac{e^{-ax}}{-a}\cdot 2\cos 2x\,dx = \frac2a B \quad \cdots\cdots ①$$

$$B=\int_0^\pi\left(\frac{e^{-ax}}{-a}\right)'\cos 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{e^{-ax}}{-a}\cos 2x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{e^{-ax}}{-a}(-2\sin 2x)dx$$

$$=\frac1a(1-e^{-a\pi}) - \frac2a A \quad \cdots\cdots ②$$

① から　$B=\frac a2 A$　　これを ② に代入して　$\frac a2 A = \frac1a(1-e^{-a\pi}) - \frac2a A$

したがって　$A=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$,　$B=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

別解　$(e^{-ax}\sin 2x)' = -ae^{-ax}\sin 2x + 2e^{-ax}\cos 2x$

$(e^{-ax}\cos 2x)' = -ae^{-ax}\cos 2x - 2e^{-ax}\sin 2x$ であるから

$$\left[e^{-ax}\sin 2x\right]_0^\pi = -aA+2B,\quad \left[e^{-ax}\cos 2x\right]_0^\pi = -aB-2A$$

よって　$-aA+2B=0$,　$-aB-2A=e^{-a\pi}-1$

この 2 式を連立して解くと　$A=\frac{2}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$,　$B=\frac{a}{a^2+4}(1-e^{-a\pi})$

13 $I_n=\int_0^{\frac\pi2}\sin^n x\,dx$ (n は 0 以上の整数) とするとき, 関係式 $I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$ $(n\geqq2)$ と, 次の [1], [2] が成り立つことを証明せよ。ただし, $\sin^0 x=\cos^0 x = 1$ である。

[1] $I_0=\frac\pi2$, $n\geqq1$ のとき　$I_{2n}=\frac\pi2\cdot\frac12\cdot\frac34\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$

[2] $I_1=1$, $n\geqq2$ のとき　$I_{2n-1}=1\cdot\frac23\cdot\frac45\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$

解答　略

解説

$n\geqq2$ のとき　$I_n=\int_0^{\frac\pi2}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx = \int_0^{\frac\pi2}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx$

$$=\left[-\sin^{n-1}x\cdot\cos x\right]_0^{\frac\pi2} + \int_0^{\frac\pi2}(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\cdot\cos x\,dx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac\pi2}\sin^{n-2}x(1-\sin^2x)dx = (n-1)\int_0^{\frac\pi2}(\sin^{n-2}x-\sin^n x)dx$$

よって　$I_n=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$　　ゆえに　$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$　…… ①

[1], [2]　$I_0=\int_0^{\frac\pi2}dx = \left[x\right]_0^{\frac\pi2}=\frac\pi2$,　$I_1=\int_0^{\frac\pi2}\sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{\frac\pi2} = 1$

① で n を $2n$ におき換えて　$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2}$　$(n\geqq1)$

よって　$I_{2n}=\frac{2n-1}{2n}I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}I_{2n-4} = \cdots\cdots$

$$=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac34\cdot\frac12\cdot I_0 \quad \cdots\cdots ②$$

① で n を $2n-1$ におき換えて　$I_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}$　$(n\geqq2)$

ゆえに　$I_{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1}I_{2n-3}=\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}I_{2n-5}=\cdots\cdots$

$$=\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac45\cdot\frac23 I_1 \quad \cdots\cdots ③$$

②, ③ に $I_0=\frac\pi2$, $I_1=1$ を代入すると, [1], [2] それぞれ後半の等式が成り立つことが導かれる。

14 (1) $I_n=\int_0^{\frac\pi2}\sin^n x\,dx$,　$J_n=\int_0^{\frac\pi2}\cos^n x\,dx$ (n は 0 以上の整数) とすると, $I_n=J_n$ $(n\geqq0)$ が成り立つことを示せ。ただし, $\sin^0 x=\cos^0 x=1$ である。

(2) $I_n=\int_0^{\frac\pi4}\tan^n x\,dx$ (n は自然数) とする。$n\geqq3$ のときの I_n を, n, I_{n-2} を用いて表せ。また, I_3, I_4 を求めよ。

解答　(1) 略　(2) $I_n=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$; $I_3=\frac12-\frac12\log 2$,　$I_4=\frac\pi4-\frac23$

解説

(1) $x=\frac\pi2-t$ とおくと

$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

よって, $n\geqq1$ のとき

$$\int_0^{\frac\pi2}\sin^n x\,dx = \int_{\frac\pi2}^0\sin^n\left(\frac\pi2-t\right)\cdot(-1)dt = \int_0^{\frac\pi2}\cos^n t\,dt = \int_0^{\frac\pi2}\cos^n x\,dx$$

また　$I_0=J_0=\int_0^{\frac\pi2}dx$　　よって　$I_n=J_n$ $(n\geqq0)$

(2) $n\geqq3$ のとき

$$I_n=\int_0^{\frac\pi4}\tan^{n-2}x\tan^2x\,dx = \int_0^{\frac\pi4}\tan^{n-2}x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac\pi4}\tan^{n-2}x(\tan x)'dx - \int_0^{\frac\pi4}\tan^{n-2}x\,dx = \left[\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x\right]_0^{\frac\pi4} - I_{n-2}$$

$$=\frac{1}{n-1}-I_{n-2}$$

また　$I_1=\int_0^{\frac\pi4}\frac{\sin x}{\cos x}dx = \left[-\log(\cos x)\right]_0^{\frac\pi4} = -\log\frac{1}{\sqrt2} = \frac12\log 2$

よって　$I_3=\frac12-I_1=\frac12-\frac12\log 2$

更に　$I_2=\int_0^{\frac\pi4}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx = \left[\tan x - x\right]_0^{\frac\pi4} = 1-\frac\pi4$

ゆえに　$I_4=\frac{1}{3}-I_2=\frac{1}{3}-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$

15 m, n を0以上の整数として, $I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ とする。次の等式を証明せよ。ただし, $\sin^0 x=\cos^0 x=1$ である。

(1) $I_{m,n}=I_{n,m}$　　(2) $I_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$ $(n\geqq 2)$

解答　(1) 略　(2) 略

解説

(1) $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと　$dx=-dt$

x と t の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2} \longrightarrow 0$

よって　$I_{m,n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^m\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos^m x\,dx=I_{n,m}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき

$$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\int(\sin^m x\cos x)\cos^{n-1}x\,dx=\int\left(\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\right)'\cos^{n-1}x\,dx$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}-\int\frac{\sin^{m+1}x}{m+1}\cdot(n-1)\cos^{n-2}x(-\sin x)dx$$

$$=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+1}+\frac{n-1}{m+1}\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx \quad \cdots\cdots ①$$

また　$\int\sin^{m+2}x\cos^{n-2}x\,dx=\int\sin^m x\cos^{n-2}x(1-\cos^2 x)dx$

$$=\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx-\int\sin^m x\cos^n x\,dx \quad \cdots\cdots ②$$

①, ② から　$\int\sin^m x\cos^n x\,dx=\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}+\frac{n-1}{m+n}\int\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$

ゆえに　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx=\left[\frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$

したがって　$I_{m,n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,n-2}$

16 m, n は0以上の整数で $I_{m,\ n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ とするとき, $I_{m,\ n}=I_{n,\ m}$, $I_{m,\ n}=\frac{n-1}{m+n}I_{m,\ n-2}$ $(n\geqq 2)$ が成り立つ。この等式を利用して, 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^3 x\,dx$　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^7 x\,dx$

解答　(1) $\frac{2}{63}$　(2) $\frac{1}{120}$

解説

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^3 x\,dx=I_{6,\ 3}=\frac{2}{9}I_{6,\ 1}$

$$I_{6,\ 1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos x\,dx=\left[\frac{1}{7}\sin^7 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{7}$$

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^3 x\,dx=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{7}=\frac{2}{63}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^7 x\,dx=I_{5,\ 7}=\frac{6}{12}I_{5,\ 5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}I_{5,\ 3}=\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{8}I_{5,\ 1}=\frac{1}{20}I_{5,\ 1}$

$$I_{5,\ 1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos x\,dx=\left[\frac{1}{6}\sin^6 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{6}$$

よって　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\cos^7 x\,dx=\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{120}$

17 a を正の定数とする。任意の実数 x に対して, $x=a\tan y$ を満たす y $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$ を対応させる関数を $y=f(x)$ とするとき, $\int_0^a f(x)dx$ を求めよ。

解答　$\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)a$

解説

$x=a\tan y$ $\left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right)$, $y=f(x)$ …… ① とする。

$x=a\tan y$ の両辺を x で微分して　$1=\frac{a}{\cos^2 y}\cdot\frac{dy}{dx}$

ゆえに　$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2 y}{a}=\frac{1}{a(1+\tan^2 y)}=\frac{a}{a^2+x^2}$

① で $x=a$ とおくと　$a=a\tan y$, $y=f(a)$

$a=a\tan y$ から　$\tan y=1$　$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ であるから　$y=f(a)=\frac{\pi}{4}$

したがって　$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a(x)'f(x)dx=\Big[xf(x)\Big]_0^a-\int_0^a xf'(x)dx$

$$=af(a)-\int_0^a\frac{ax}{x^2+a^2}dx=a\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\int_0^a\frac{(x^2+a^2)'}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{\pi}{4}a-\frac{a}{2}\Big[\log(x^2+a^2)\Big]_0^a=\frac{\pi}{4}a-\frac{a}{2}(\log 2a^2-\log a^2)$$

$$=\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\right)a$$

18 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^2\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$　　(2) $\int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx$　$(a>0)$

解答　(1) $4\sqrt{2}-4+\log(1+\sqrt{2})$　(2) $a\left(\log\frac{2\sqrt{3}+3}{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

解説

(1) $\int_0^2\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^2\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx+\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

$$\int_0^2\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^2\frac{(x^2+4)'}{\sqrt{x^2+4}}dx=\Big[2\sqrt{x^2+4}\Big]_0^2=4\sqrt{2}-4$$

次に, $x+\sqrt{x^2+4}=t$ とおくと　$\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx=dt$

ゆえに　$\frac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}dx=dt$

よって　$\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\frac{1}{t}dt$

x と t の対応は右のようになるから

x	$0 \longrightarrow 2$
t	$2 \longrightarrow 2+2\sqrt{2}$

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\int_2^{2+2\sqrt{2}}\frac{dt}{t}=\Big[\log t\Big]_2^{2+2\sqrt{2}}=\log(2+2\sqrt{2})-\log 2$$

$$=\log\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=\log(1+\sqrt{2})$$

したがって　$\int_0^2\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx=4\sqrt{2}-4+\log(1+\sqrt{2})$

注意　$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ は, 次のようにして求めることもできるが, 置換積分法による計算が2回必要になる。

$x=2\tan\theta$ とおくと　$dx=\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \to 2$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{4\tan^2\theta+4}}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta \quad \cdots\cdots ①$$

ここで, $\sin\theta=u$ とおくと　$\cos\theta d\theta=du$

θ と u の対応は右のようになる。よって, ① は

θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$
u	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{1-u^2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{(1+u)(1-u)}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\log(1-u)+\log(1+u)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\log(\sqrt{2}+1)$$

(2) $x=a\sin\theta$ とおくと　$dx=a\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$\frac{1}{2}a \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}a$
θ	$\frac{\pi}{6} \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

$a>0$ であり, $\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ のとき　$\cos\theta>0$

よって　$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}$

$$=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$$

ゆえに　$\int_{\frac{1}{2}a}^{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{a\cos\theta}{a\sin\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta=a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta$

$$=a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}d\theta=a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)d\theta$$

ここで, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta$ について

$$\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$\cos\theta=t$ とおくと　$-\sin\theta\,d\theta=dt$

θ と t の対応は右のようになる。

θ	$\frac{\pi}{6} \to \frac{\pi}{3}$
t	$\frac{\sqrt{3}}{2} \to \frac{1}{2}$

よって　$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin\theta}d\theta=-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log(1+t)-\log(1-t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2}\left[\log\frac{1+t}{1-t}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}-\log 3\right)=\frac{1}{2}\{\log(2+\sqrt{3})^2-\log 3\}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2=\log\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\log\frac{2\sqrt{3}+3}{3}\ \cdots\cdots\ ①$$

また　$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\,d\theta=\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ …… ②

①，② から　$\displaystyle a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin\theta}-\sin\theta\right)d\theta=a\left(\log\frac{2\sqrt{3}+3}{3}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$\boxed{19}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx$ を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{3}\log 2+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

解説

$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから，$\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ とおいて，分母を払うと　$1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)$

整理して　$(a+b)x^2+(b+c-a)x+a+c=1$

これが x の恒等式であるから　$a+b=0$，$b+c-a=0$，$a+c=1$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-\dfrac{1}{3}$，$c=\dfrac{2}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$

ここで　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\Big[\log(x+1)\Big]_0^1=\log 2$

次に，$\displaystyle I=\int_0^1\frac{x-2}{x^2-x+1}dx$ とすると　$\displaystyle I=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx-\frac{3}{2}\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$

I の第 1 項の積分について

$$\int_0^1\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\int_0^1\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx=\Big[\log(x^2-x+1)\Big]_0^1=0$$

I の第 2 項について，$\displaystyle J=\int_0^1\frac{dx}{x^2-x+1}$ とする。

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ であるから，$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと

$$dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

x	$0\ \longrightarrow\ 1$
θ	$-\frac{\pi}{6}\ \longrightarrow\ \frac{\pi}{6}$

x と θ の対応は右のようになる。

ゆえに　$\displaystyle J=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta=2\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$$

よって　$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\log 2-\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi\right)=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

$\boxed{20}$ 整式 $f(x)$ は 3 次以下で，以下の条件を満たしているという。$f(x)$ を求めよ。

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=0,\ \int_{-1}^1 f(x)e^x dx=1,\ f(1)=f(-1)=0$$

解答　$f(x)=-\dfrac{e}{4}(x^2-1)$

解説

$f(1)=f(-1)=0$ から，$f(x)$ は $(x-1)(x+1)=x^2-1$ で割り切れる。

また，$f(x)$ は 3 次以下であるから，

$f(x)=(x^2-1)(ax+b)=ax^3+bx^2-ax-b$　とおける。

よって　$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1(ax^4+bx^3-ax^2-bx)dx=2a\int_0^1(x^4-x^2)dx$

$$=2a\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=-\frac{4}{15}a$$

$\displaystyle\int_{-1}^1 xf(x)dx=0$ から　$-\dfrac{4}{15}a=0$　ゆえに　$a=0$

よって　$f(x)=b(x^2-1)$

ゆえに　$\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)e^x dx=b\int_{-1}^1(x^2-1)e^x dx=b\left\{\Big[(x^2-1)e^x\Big]_{-1}^1-\int_{-1}^1 2x\cdot e^x dx\right\}$

$$=-2b\left(\Big[xe^x\Big]_{-1}^1-\int_{-1}^1 1\cdot e^x dx\right)$$

$$=-2b\left\{\left(e+\frac{1}{e}\right)-\Big[e^x\Big]_{-1}^1\right\}=-\frac{4}{e}b$$

$\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)e^x dx=1$ から　$-\dfrac{4}{e}b=1$　よって　$b=-\dfrac{e}{4}$

したがって　$f(x)=-\dfrac{e}{4}(x^2-1)$

$\boxed{21}$ (1)　不定積分 $\displaystyle\int e^{2x+e^x}dx$ を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1\{x(1-x)\}^{\frac{3}{2}}dx$ を求めよ。

解答　(1)　$e^{e^x}(e^x-1)+C$　(C は積分定数)　(2)　$\dfrac{3}{128}\pi$

解説

(1)　$\displaystyle\int e^{2x+e^x}dx=\int e^x\cdot(e^x\cdot e^{e^x})dx=\int e^x\cdot(e^{e^x})'dx=e^x\cdot e^{e^x}-\int e^x\cdot e^{e^x}dx$

$$=e^x\cdot e^{e^x}-e^{e^x}+C=e^{e^x}(e^x-1)+C\quad(C\text{ は積分定数})$$

(2)　$x(1-x)=-x^2+x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2$ と変形できるから，

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\sin\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになるから，求める定積分を I とすると

x	$0\ \longrightarrow\ 1$
θ	$-\frac{\pi}{2}\ \longrightarrow\ \frac{\pi}{2}$

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left\{\left(\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{16}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$$

$y=\cos^4\theta$ は偶関数であるから　$\displaystyle I=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta$

$$\cos^4\theta=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$$

$=\dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\dfrac{1+\cos 4\theta}{2}\right)=\dfrac{1}{8}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$ であるから

$$I=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{64}\left[3\theta+2\sin 2\theta+\frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{64}\cdot\frac{3}{2}\pi=\frac{3}{128}\pi$$