数学演習(定積分)R１．９．８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2+3x}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x\,dx$　(4) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{(x^2-1)^2}{x^4}dx$　(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1-\sqrt{x})^2 dx$　(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x-1}{2x^2+5x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} (2\sin x+\cos x)^2 dx$　(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\log 7} \frac{e^x}{1+e^x}dx$

$\boxed{3}$ 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin mx\cos nx\,dx$ の値を求めよ。ただし，m，n は自然数とする。

$\boxed{4}$ 定積分 $I=\int_0^{\pi}\left|\sin x+\sqrt{3}\cos x\right|dx$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\int_0^5\sqrt{|x-4|}\,dx$　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$　(3) $\int_0^{\pi}\left|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1\right|dx$

$\boxed{6}$ (1) 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^5dx$ を求めよ。

(2) $n<\int_{10}^{100}\log_{10}x\,dx$ を満たす最大の自然数 n の値を求めよ。ただし，$0.434<\log_{10}e<0.435$ (e は自然対数の底) である。

$\boxed{7}$ (1) 関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-x$ の導関数を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx$ を求めよ。

$\boxed{8}$ (1) 整数 m，n に対して，積分 $I_{m,\ n}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

(2) 自然数 n に対して，積分 $J_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\right)^2dx$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について，$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ を求めよ。

1 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3\frac{1}{x^2+3x}dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 2x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}dx$

解答　(1) $\dfrac{9-3\sqrt[3]{4}}{10}$　(2) $\dfrac{1}{3}\log 2$　(3) $\dfrac{\pi}{16}-\dfrac{1}{8}$　(4) $\dfrac{1}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_1^2\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx=\int_1^2\left(x^{\frac{2}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}\right)dx=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_1^2$

$\displaystyle=\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{4}-\frac{3}{2}\sqrt[3]{4}\right)-\left(\frac{3}{5}-\frac{3}{2}\right)=\frac{9-3\sqrt[3]{4}}{10}$

(2) $\displaystyle\int_1^3\frac{1}{x^2+3x}dx=\int_1^3\frac{1}{x(x+3)}dx=\frac{1}{3}\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\Big[\log x-\log(x+3)\Big]_1^3=\frac{1}{3}\left[\log\frac{x}{x+3}\right]_1^3$

$\displaystyle=\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{3}\log 2$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-0=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$

(4) $\dfrac{\log x}{x}=(\log x)(\log x)'$ であるから

$\displaystyle\int_1^e\frac{\log x}{x}dx=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^e=\frac{1}{2}(1^2-0^2)=\frac{1}{2}$

2 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^3\frac{(x^2-1)^2}{x^4}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^1(x+1-\sqrt{x})^2dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^1\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi(2\sin x+\cos x)^2dx$　　(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^{\log 7}\frac{e^x}{1+e^x}dx$

解答　(1) $\dfrac{80}{81}$　(2) $\dfrac{7}{10}$　(3) $2\log 3-3\log 2$　(4) $\dfrac{5}{2}\pi$　(5) $\dfrac{\pi}{4}-1$

(6) $2\log 2$

解説

(1) (与式)$\displaystyle=\int_1^3\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\left[x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}\right]_1^3=\left(3+\frac{2}{3}-\frac{1}{81}\right)-\left(1+2-\frac{1}{3}\right)=\frac{80}{81}$

(2) (与式)$\displaystyle=\int_0^1(x^2+1+x+2x-2\sqrt{x}-2x\sqrt{x})dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}+x+\frac{3}{2}x^2-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}+1+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}-\frac{4}{5}\right)-0=\frac{7}{10}$

(3) $\dfrac{4x-1}{2x^2+5x+2}=\dfrac{4x-1}{(x+2)(2x+1)}=\dfrac{3}{x+2}-\dfrac{2}{2x+1}$ であるから

$\displaystyle\int_0^1\frac{4x-1}{2x^2+5x+2}dx=\int_0^1\left(\frac{3}{x+2}-\frac{2}{2x+1}\right)dx=\left[3\log(x+2)-2\cdot\frac{1}{2}\log(2x+1)\right]_0^1$

$\displaystyle=\left[\log\frac{(x+2)^3}{2x+1}\right]_0^1=\log 3^2-\log 2^3=2\log 3-3\log 2$

(4) (与式)$\displaystyle=\int_0^\pi(4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x)dx=\int_0^\pi(3\sin^2 x+4\sin x\cos x+1)dx$

$\displaystyle=\int_0^\pi\left(3\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+4\cdot\frac{\sin 2x}{2}+1\right)dx=\int_0^\pi\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\cos 2x+2\sin 2x\right)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{5}{2}x-\frac{3}{4}\sin 2x-\cos 2x\right]_0^\pi=\left(\frac{5}{2}\pi-1\right)-(-1)=\frac{5}{2}\pi$

(5) (与式)$\displaystyle=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(3-4\sin^2 x)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3-4\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos 2x)dx$

$\displaystyle=\Big[x+\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+1\right)=\frac{\pi}{4}-1$

(6) $\displaystyle\int_0^{\log 7}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\Big[\log(1+e^x)\Big]_0^{\log 7}=\log(1+e^{\log 7})-\log(1+e^0)$

$=\log 8-\log 2=3\log 2-\log 2=2\log 2$

3 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi\sin mx\cos nx\,dx$ の値を求めよ。ただし，m，n は自然数とする。

解答　$m+n$ が偶数のとき 0，$m+n$ が奇数のとき $\dfrac{2m}{m^2-n^2}$

解説

$\displaystyle I=\int_0^\pi\sin mx\cos nx\,dx$ とする。

$\sin mx\cos nx=\dfrac{1}{2}\{\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\}$　であるから

[1]　$m-n\neq 0$　すなわち　$m\neq n$ のとき

$\displaystyle I=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(m+n)x}{m+n}+\frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]_0^\pi$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos(m+n)\pi}{m+n}+\frac{\cos(m-n)\pi}{m-n}-\frac{2m}{m^2-n^2}\right\}$

$m+n$ が偶数のとき，$m-n$ も偶数で

$\displaystyle I=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m-n}-\frac{2m}{m^2-n^2}\right)=0$

$m+n$ が奇数のとき，$m-n$ も奇数で

$\displaystyle I=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m-n}-\frac{2m}{m^2-n^2}\right)=\frac{2m}{m^2-n^2}$

[2]　$m-n=0$　すなわち　$m=n$ のとき

$\displaystyle I=\frac{1}{2}\int_0^\pi\sin 2nx\,dx=\left[-\frac{\cos 2nx}{4n}\right]_0^\pi=0$

このとき，$m+n$ は偶数である。

以上により　　$m+n$ が偶数のとき　$I=0$，　$m+n$ が奇数のとき　$I=\dfrac{2m}{m^2-n^2}$

4 定積分 $\displaystyle I=\int_0^\pi|\sin x+\sqrt{3}\cos x|dx$ を求めよ。

解答　4

解説

$$|\sin x+\sqrt{3}\cos x|=\left|2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|=\begin{cases}2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) & \left(0\leqq x\leqq\dfrac{2}{3}\pi\right)\\[2mm] -2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) & \left(\dfrac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi\right)\end{cases}$$

よって　$\displaystyle I=\int_0^{\frac{2}{3}\pi}2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\left\{-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$

$\displaystyle=2\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx$

$\displaystyle=2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}-2\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}$

$F(x)=-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ とすると

$\displaystyle I=2\left\{F\left(\frac{2}{3}\pi\right)-F(0)\right\}-2\left\{F(\pi)-F\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=4F\left(\frac{2}{3}\pi\right)-2F(0)-2F(\pi)$

$\displaystyle=4(-\cos\pi)-2\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)-2\left(-\cos\frac{4}{3}\pi\right)=4\cdot 1-2\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot\frac{1}{2}=4$

5 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^5\sqrt{|x-4|}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^\pi|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1|dx$

解答　(1) 6　(2) $\sqrt{3}-1-\dfrac{\pi}{12}$　(3) $2\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

解説

(1) $x\leqq 4$ のとき　$|x-4|=-(x-4)=4-x$

$x\geqq 4$ のとき　$|x-4|=x-4$

よって　$\displaystyle\int_0^5\sqrt{|x-4|}\,dx=\int_0^4\sqrt{4-x}\,dx+\int_4^5\sqrt{x-4}\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4+\left[\frac{2}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_4^5=\frac{2}{3}\cdot 8+\frac{2}{3}=6$

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=\cos x-\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$\left|\cos x-\dfrac{1}{2}\right|=-\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$

よって　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos x-\frac{1}{2}\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx-\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)dx$

$\displaystyle=\left[\sin x-\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\sin x-\frac{x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\displaystyle=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)-0-\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$

$\displaystyle=\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$

(3) $|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1|=\left|2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right|$ であるから

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\left|2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right|=-\left\{2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right\}$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\left|2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1\right|=2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)-1$

よって　$\displaystyle\int_0^\pi|\sqrt{3}\sin x-\cos x-1|dx=\int_0^\pi\left|2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right|dx$

$\displaystyle=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\left\{2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-1\right\}dx$

$$=-\left[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=\left[2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$$

$$=2\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left\{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\pi\right\}$$

$$=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

$\boxed{6}$ (1)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)(\sin x+\cos x)^5dx$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle n<\int_{10}^{100}\log_{10}x\,dx$ を満たす最大の自然数 n の値を求めよ。ただし，$0.434<\log_{10}e<0.435$ (e は自然対数の底) である。

解答　(1)　$\dfrac{7}{6}$　　(2)　$n=150$

解説

(1)　(与式)$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x+\cos x)^5(\sin x+\cos x)'dx$

$$=\left[\frac{1}{6}(\sin x+\cos x)^6\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6-1^6\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\{(\sqrt{2})^6-1\}=\frac{7}{6}$$

(2)　$$\int_{10}^{100}\log_{10}x\,dx=\int_{10}^{100}\frac{\log_e x}{\log_e 10}dx=\frac{1}{\log_e 10}\Big[x\log_e x-x\Big]_{10}^{100}=\left[x\log_{10}x-\frac{x}{\log_e 10}\right]_{10}^{100}$$

$$=\left(200-\frac{100}{\log_e 10}\right)-\left(10-\frac{10}{\log_e 10}\right)=190-\frac{90}{\log_e 10}=190-90\log_{10}e$$

$0.434<\log_{10}e<0.435$ であるから　　$39.06<90\log_{10}e<39.15$

よって　　$\displaystyle 150.85<\int_{10}^{100}\log_{10}x\,dx<150.94$

したがって，求める n の値は　　$n=150$

$\boxed{7}$ (1)　関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}-x$ の導関数を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx$ を求めよ。

解答　(1)　$-\dfrac{\cos x}{1+\cos x}$　　(2)　$\log 2+1-\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1)　$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}-1$$

$$=\frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}-1=\frac{1}{1+\cos x}-1$$

$$=-\frac{\cos x}{1+\cos x}$$

(2)　(1) の結果を用いると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{1+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{\cos x}{1+\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-(1+\cos x)'}{1+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f'(x)dx$$

$$=\Big[-\log(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{\sin x}{1+\cos x}-x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\log 2+1-\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{8}$ (1)　整数 m，n に対して，積分 $\displaystyle I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

(2)　自然数 n に対して，積分 $\displaystyle J_n=\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\right)^2dx$ を求めよ。

解答　(1)　$m\neq\pm n$ のとき 0，$m=\pm n$ ($\neq 0$) のとき π，$m=n=0$ のとき 2π

(2)　$\dfrac{n(n+1)}{2}\pi$

解説

(1)　与式の右辺を変形して

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx$$

[1]　$m+n\neq 0$ かつ $m-n\neq 0$　すなわち　$m\neq\pm n$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0$$

[2]　$m+n\neq 0$ かつ $m-n=0$　すなわち　$m=n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+1\}dx=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+x\right]_0^{2\pi}=\pi$$

[3]　$m+n=0$ かつ $m-n\neq 0$　すなわち　$m=-n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{1+\cos(m-n)x\}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi}=\pi$$

[4]　$m+n=0$ かつ $m-n=0$　すなわち　$m=n=0$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+1)dx=\int_0^{2\pi}dx=\Big[x\Big]_0^{2\pi}=2\pi$$

以上から　　$m\neq\pm n$ のとき　$I_{m,\,n}=0$，　$m=\pm n$ ($\neq 0$) のとき　$I_{m,\,n}=\pi$，

$m=n=0$ のとき　$I_{m,\,n}=2\pi$

(2)　(1) [1] から

$$J_n=\int_0^{2\pi}(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\cdots\cdots+\sqrt{n}\cos nx)^2dx$$

$$=\int_0^{2\pi}(\cos^2x+2\cos^2 2x+\cdots\cdots+n\cos^2 nx)dx$$

ここで，(1) [2] から，k が自然数のとき　　$\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^2 kx\,dx=\pi$

よって　　$J_n=\pi+2\pi+\cdots\cdots+n\pi=(1+2+\cdots\cdots+n)\pi=\dfrac{n(n+1)}{2}\pi$

$\boxed{9}$ 関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について，$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ を求めよ。

解答　$\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$

解説

$$3\cos 2x+7\cos x=3(2\cos^2x-1)+7\cos x=6\cos^2x+7\cos x-3$$

$\cos x=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq\pi$ では $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$f(x)=6t^2+7t-3=(2t+3)(3t-1)$$

$-1\leqq t\leqq 1$ では $2t+3>0$ であるから

$-1\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき　$f(x)\leqq 0$，　　$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 1$ のとき　$f(x)\geqq 0$

$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とおくと，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ …… ① であり，

$0\leqq x\leqq\alpha$ のとき　$f(x)\geqq 0$，　$\alpha\leqq x\leqq\pi$ のとき　$f(x)\leqq 0$

したがって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\alpha}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}\{-f(x)\}dx$

ここで　$\displaystyle\int f(x)dx=\int(3\cos 2x+7\cos x)dx=\frac{3}{2}\sin 2x+7\sin x+C$

$=3\sin x\cos x+7\sin x+C$　(C は積分定数)

また，① から　　$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\Big[3\sin x\cos x+7\sin x\Big]_0^{\alpha}-\Big[3\sin x\cos x+7\sin x\Big]_{\alpha}^{\pi}$

$=2(3\sin\alpha\cos\alpha+7\sin\alpha)$

$=2\left(3\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+7\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\dfrac{32\sqrt{2}}{3}$