数学演習(不定積分)Ｒ１．９．７　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{x^2-1}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+x-2}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{x}{(2x-1)^4}dx$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x}{x^2+1}dx$　(2) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2-1}dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx$　(4) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+9}+3}dx$　(2) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+3}\,dx$　(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

$\boxed{4}$ $x+\sqrt{x^2+1}=t$ のおき換えを利用して，次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$　　(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\cos^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\sin 2x\cos 3x\,dx$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sin^2 x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin^3 x\,dx$　　(3) $\displaystyle\int\cos 3x\cos 5x\,dx$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$　　(2) $\displaystyle\int \frac{\cos x+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$　　(3) $\displaystyle\int \sin^2 x\tan x\,dx$

$\boxed{9}$ $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおき，不定積分$\displaystyle\int \frac{dx}{5\sin x+3}$ を求めよ。

$\boxed{10}$ 次の不定積分を(　)内のおき換えによって求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x - 1}$ $\left(\tan\frac{x}{2} = t\right)$　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ $(\tan x = t)$

$\boxed{11}$ (1) $\displaystyle\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} - \frac{B}{x+2}$ となる定数 A，B の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}dx$ を求めよ。　　(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(x-2)(x+2)(x-3)}dx$ を求めよ。

$\boxed{12}$ $\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくことにより，不定積分 $\displaystyle\int \frac{5}{3\sin x + 4\cos x}dx$ を求めよ。

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3+x}{x^2-1}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{x}{(2x-1)^4}dx$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\dfrac{x^2}{2}+\log|x^2-1|+C$　(2) $\log\dfrac{(x-1)^2}{|x+2|}+C$

(3) $-\dfrac{6x-1}{24(2x-1)^3}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3+x}{x^2-1}dx=\int\left(x+\frac{2x}{x^2-1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\log|x^2-1|+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{x+5}{x^2+x-2}dx=\int\frac{x+5}{(x-1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$\displaystyle=2\log|x-1|-\log|x+2|+C=\log\frac{(x-1)^2}{|x+2|}+C$

(3) $2x-1=t$ とおくと　$x=\dfrac{t+1}{2}$，$dx=\dfrac12dt$

$\displaystyle\int\frac{x}{(2x-1)^4}dx=\int\frac{t+1}{2}\cdot\frac{1}{t^4}\cdot\frac12dt=\frac14\int\left(\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)dt$

$\displaystyle=\frac14\int(t^{-3}+t^{-4})dt=\frac14\left(-\frac{t^{-2}}{2}-\frac{t^{-3}}{3}\right)+C$

$\displaystyle=-\frac{1}{24t^3}(3t+2)+C=-\frac{6x-1}{24(2x-1)^3}+C$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3+2x}{x^2+1}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2-1}dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx$　(4) $\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac12\log(x^2+1)+C$　(2) $x+\dfrac12\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$

(3) $\log(x-1)^2(x^2+x+1)+C$　(4) $2\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-\dfrac{1}{x+1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{x^3+2x}{x^2+1}=\frac{(x^2+1)x+x}{x^2+1}=x+\frac{x}{x^2+1}$

よって　$\displaystyle\int\frac{x^3+2x}{x^2+1}dx=\int\left(x+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\left\{x+\frac12\cdot\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\right\}dx$

$\displaystyle=\frac{x^2}{2}+\frac12\log(x^2+1)+C$

(2) $\displaystyle\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{(x^2-1)+1}{x^2-1}=1+\frac{1}{x^2-1}=1+\frac12\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$\displaystyle=1+\frac12\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$

よって　$\displaystyle\int\frac{x^2}{x^2-1}dx=\int\left\{1+\frac12\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)\right\}dx$

$\displaystyle=x+\frac12(\log|x-1|-\log|x+1|)+C$

$\displaystyle=x+\frac12\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

(3) $\displaystyle\frac{4x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$ とおくと

$4x^2+x+1=A(x^2+x+1)+(x-1)(Bx+C)$

ゆえに　$4x^2+x+1=(A+B)x^2+(A-B+C)x+A-C$

両辺の係数を比較して

$A+B=4$，$A-B+C=1$，$A-C=1$

これを解いて　$A=2$，$B=2$，$C=1$

よって　$\displaystyle\int\frac{4x^2+x+1}{x^3-1}dx=\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)dx$

$\displaystyle=2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx$

$=2\log|x-1|+\log(x^2+x+1)+C$

$=\log(x-1)^2(x^2+x+1)+C$

(4) $\displaystyle\frac{3x+2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$ とおくと

$3x+2=A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx$

ゆえに　$3x+2=(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A$

両辺の係数を比較して　$A+B=0$，$2A+B+C=3$，$A=2$

これを解いて　$A=2$，$B=-2$，$C=1$

よって　$\displaystyle\int\frac{3x+2}{x(x+1)^2}dx=\int\left\{\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$

$\displaystyle=2\log|x|-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+C$

$\displaystyle=2\log\left|\frac{x}{x+1}\right|-\frac{1}{x+1}+C$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}dx$　(2) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+3}\,dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\dfrac23(x+9)\sqrt{x+9}-3x+C$

(2) $\dfrac{3}{28}(x+3)(4x-9)\sqrt[3]{x+3}+C$　(3) $\log\dfrac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}=\frac{x(\sqrt{x+9}-3)}{(\sqrt{x+9})^2-9}=\sqrt{x+9}-3$

よって　$\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x+9}+3}dx=\int(\sqrt{x+9}-3)dx=\frac23(x+9)^{\frac32}-3x+C$

$\displaystyle=\frac23(x+9)\sqrt{x+9}-3x+C$

(2) $\sqrt[3]{x+3}=t$ とおくと　$x=t^3-3$，$dx=3t^2dt$

よって　$\displaystyle\int x\sqrt[3]{x+3}\,dx=\int(t^3-3)t\cdot3t^2dt=3\int(t^6-3t^3)dt$

$\displaystyle=3\left(\frac{t^7}{7}-\frac34t^4\right)+C=\frac{3}{28}t^4(4t^3-21)+C$

$\displaystyle=\frac{3}{28}(x+3)\sqrt[3]{x+3}\{4(x+3)-21\}+C$

$\displaystyle=\frac{3}{28}(x+3)(4x-9)\sqrt[3]{x+3}+C$

(3) $\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$，$dx=2tdt$

よって　$\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=\int\frac{2}{t^2-1}dt$

$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\log|t-1|-\log|t+1|+C$

$\displaystyle=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\log\frac{|\sqrt{x+1}-1|}{\sqrt{x+1}+1}+C$

4 $x+\sqrt{x^2+1}=t$ のおき換えを利用して，次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$　(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$

(2) $\dfrac12\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $x+\sqrt{x^2+1}=t$ から　$\displaystyle\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=dt$

ゆえに　$\displaystyle\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}dx=dt$　すなわち　$\displaystyle\frac{t}{\sqrt{x^2+1}}dx=dt$

よって　$\displaystyle\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac1tdt$

したがって　$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\frac1tdt=\log|t|+C$

$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$

(2) $\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\int(x)'\sqrt{x^2+1}\,dx=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\displaystyle=x\sqrt{x^2+1}-\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\displaystyle=x\sqrt{x^2+1}-\int\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$

$\displaystyle=x\sqrt{x^2+1}-\int\sqrt{x^2+1}\,dx+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

ゆえに　$\displaystyle2\int\sqrt{x^2+1}\,dx=x\sqrt{x^2+1}+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

よって　$\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac12\left(x\sqrt{x^2+1}+\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx\right)$

(1) の結果から　$\displaystyle\int\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac12\{x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})\}+C$

5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\cos^2x\,dx$　(2) $\displaystyle\int\cos^3x\,dx$　(3) $\displaystyle\int\sin2x\cos3x\,dx$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac14\sin2x+C$

(2) $\dfrac{1}{12}\sin3x+\dfrac34\sin x+C$　$\left(\sin x-\dfrac13\sin^3x+C\right)$

(3) $-\dfrac{1}{10}\cos5x+\dfrac12\cos x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\cos^2x\,dx=\int\frac{1+\cos2x}{2}dx=\frac12\int(1+\cos2x)dx=\frac12\left(x+\frac12\sin2x\right)+C$

$=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(2)　$\cos 3x=-3\cos x+4\cos^3 x$ から　$\cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$

よって　$\int \cos^3 x\,dx=\frac{1}{4}\int(\cos 3x+3\cos x)dx=\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x+C$

別解　$\cos^3 x=\cos^2 x\cdot\cos x=(1-\sin^2 x)\cos x$ であるから

$\int\cos^3 x\,dx=\int(1-\sin^2 x)\cos x\,dx=\int(1-\sin^2 x)(\sin x)'dx$

$=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$

(3)　$\int \sin 2x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx=-\frac{1}{10}\cos 5x+\frac{1}{2}\cos x+C$

6　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int \sin^2 x\,dx$　(2)　$\int \sin^3 x\,dx$　(3)　$\int \cos 3x\cos 5x\,dx$

解答　C は積分定数とする。(1)　$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$　(2)　$\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+C$

(3)　$\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　(与式)$=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$

(2)　$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ から　$\sin^3 x=\frac{1}{4}(3\sin x-\sin 3x)$

よって　(与式)$=\frac{1}{4}\int(3\sin x-\sin 3x)dx=\frac{1}{4}\left(-3\cos x+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C$

$=\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+C$

別解　$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

よって　$\int\sin^3 x\,dx=\int\sin^2 x\sin x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$

$=\int(1-t^2)\cdot(-1)dt=\int(t^2-1)dt$

$=\frac{1}{3}t^3-t+C=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

$=\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x+C$

(3)　$\cos 3x\cos 5x=\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 2x)$

よって　(与式)$=\frac{1}{2}\int(\cos 8x+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$

$=\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$

7　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\cos x}dx$　(2)　$\int\frac{dx}{\sin x}$

解答　C は積分定数とする。　(1)　$-\frac{1}{2}\cos^2 x+\cos x-\log(1+\cos x)+C$

(2)　$\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$　$\left(\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C\right)$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ であるから

$\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\cos x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{1+\cos x}\cdot\sin x\,dx=-\int\frac{t^2}{1+t}dt$

$=-\int\left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt=-\frac{t^2}{2}+t-\log|1+t|+C$

$=-\frac{1}{2}\cos^2 x+\cos x-\log(1+\cos x)+C$

(2)　$\cos x=t$ とおくと，$-\sin x\,dx=dt$ であるから

$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=-\int\frac{dt}{1-t^2}$

$=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=-\frac{1}{2}(\log|1+t|-\log|1-t|)+C$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1-t}{1+t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

別解　$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}$　であるから

$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\left(\tan\frac{x}{2}\right)'}{\tan\frac{x}{2}}dx=\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

8　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int\frac{dx}{\cos x}$　(2)　$\int\frac{\cos x+\sin 2x}{\sin^2 x}dx$　(3)　$\int\sin^2 x\tan x\,dx$

解答　C は積分定数とする。(1)　$\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$

(2)　$-\frac{1}{\sin x}+2\log|\sin x|+C$　(3)　$\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1}{1-t^2}dt$

$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{2}(-\log|1-t|+\log|1+t|)+C$

$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$

(2)　$\frac{\cos x+\sin 2x}{\sin^2 x}=\frac{\cos x+2\sin x\cos x}{\sin^2 x}=\frac{1+2\sin x}{\sin^2 x}\cdot\cos x$

$\sin x=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

$\int\frac{\cos x+\sin 2x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1+2\sin x}{\sin^2 x}\cdot\cos x\,dx=\int\frac{1+2t}{t^2}dt$

$=\int\left(\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}\right)dt=-\frac{1}{t}+2\log|t|+C$

$=-\frac{1}{\sin x}+2\log|\sin x|+C$

(3)　$\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

$\int\sin^2 x\tan x\,dx=\int(1-\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int(1-t^2)\cdot\frac{-1}{t}dt$

$=\int\left(t-\frac{1}{t}\right)dt=\frac{t^2}{2}-\log|t|+C$

$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$

別解　$\tan x=t$ とおくと　$dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$\int\sin^2 x\tan x\,dx=\int\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x}\tan x\,dx=\int\frac{\tan^2 x}{\tan^2 x+1}\tan x\,dx$

$=\int\frac{t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t^3}{(t^2+1)^2}dt$

$=\int\frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{2t}{2}dt=\frac{1}{2}\int\left\{\frac{2t}{t^2+1}-\frac{2t}{(t^2+1)^2}\right\}dt$

$=\frac{1}{2}\left\{\log(t^2+1)+\frac{1}{t^2+1}\right\}+C=\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\cos^2 x}+\cos^2 x\right)+C$

$=\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2}\log\cos^2 x+C=\frac{1}{2}\cos^2 x-\log|\cos x|+C$

9　$\tan\frac{x}{2}=t$ とおき，不定積分$\int\frac{dx}{5\sin x+3}$ を求めよ。

解答　$\frac{1}{4}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|+C$（$C$ は積分定数）

解説

$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと　$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}$

$=2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$

また，$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=dt$ から

$dx=2\cos^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}dt=\frac{2}{1+t^2}dt$

ゆえに　$\int\frac{dx}{5\sin x+3}=\int\frac{1}{5\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$

$=\int\frac{2}{3t^2+10t+3}dt=2\int\frac{1}{(t+3)(3t+1)}dt$

$=\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{3t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt$

$=\frac{1}{4}(\log|3t+1|-\log|t+3|)+C$

$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{3t+1}{t+3}\right|+C=\frac{1}{4}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}+3}\right|+C$　（C は積分定数）

10　次の不定積分を（　）内のおき換えによって求めよ。

(1)　$\int\frac{dx}{\sin x-1}$　$\left(\tan\frac{x}{2}=t\right)$　(2)　$\int\frac{dx}{\sin^4 x}$　$(\tan x=t)$

解答　C は積分定数とする。(1)　$\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1}+C$　(2)　$-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1)　$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと　　$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$

また，$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=dt$ から

$$dx=2\cos^2\frac{x}{2}dt=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}dt=\frac{2}{1+t^2}dt$$

よって　$$\int\frac{dx}{\sin x-1}=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}-1}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2}{2t-(1+t^2)}dt$$

$$=-\int\frac{2}{(t-1)^2}dt=\frac{2}{t-1}+C=\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-1}+C$$

(2)　$\tan x=t$ とおくと　　$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\frac{1}{1+\tan^2 x}$

$$=\frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2}$$

また，$\frac{1}{\cos^2 x}dx=dt$ から　　$dx=\cos^2 x\,dt=\frac{1}{1+\tan^2 x}dt=\frac{1}{1+t^2}dt$

よって　$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\left(\frac{1+t^2}{t^2}\right)^2\cdot\frac{1}{1+t^2}dt=\int\frac{1+t^2}{t^4}dt=\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C$$

$\boxed{11}$ (1)　$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}-\frac{B}{x+2}$ となる定数 A，B の値を求めよ。

(2)　$\int\frac{1}{x^2-4}dx$ を求めよ。　　(3)　$\int\frac{1}{(x-2)(x+2)(x-3)}dx$ を求めよ。

解答　C は積分定数とする。(1)　$A=\frac{1}{4}$，$B=\frac{1}{4}$　　(2)　$\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C$

(3)　$\frac{1}{20}\log\left|\frac{(x+2)(x-3)^4}{(x-2)^5}\right|+C$

解説

(1)　$\frac{1}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}-\frac{B}{x+2}$ の分母を払って，x について整理すると

$$1=(A-B)x+2(A+B)$$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$$A-B=0,\ 2(A+B)=1$$

これを解いて　　$A=\frac{1}{4}$，$B=\frac{1}{4}$

(2)　$$\int\frac{1}{x^2-4}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{4}(\log|x-2|-\log|x+2|)+C$$

$$=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+C\ \text{（}C\text{ は積分定数）}$$

(3)　$\frac{1}{(x-2)(x+2)(x-3)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-3}$ とおいて，分母を払うと

$$1=a(x+2)(x-3)+b(x-2)(x-3)+c(x-2)(x+2)$$

x について整理すると

$$(a+b+c)x^2-(a+5b)x-6a+6b-4c=1$$

これが x についての恒等式であるから，両辺の係数を比較して

$$a+b+c=0,\ a+5b=0,\ -6a+6b-4c=1$$

これを解いて　　$a=-\frac{1}{4}$，$b=\frac{1}{20}$，$c=\frac{1}{5}$

よって　　$$(\text{与式})=\frac{1}{20}\int\left(-\frac{5}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{20}(-5\log|x-2|+\log|x+2|+4\log|x-3|)+C$$

$$=\frac{1}{20}\log\left|\frac{(x+2)(x-3)^4}{(x-2)^5}\right|+C\ \text{（}C\text{ は積分定数）}$$

$\boxed{12}$ $\tan\frac{x}{2}=t$ とおくことにより，不定積分 $\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx$ を求めよ。

解答　$\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C$（$C$ は積分定数）

解説

$\tan\frac{x}{2}=t$ とおくと　　$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

また，$\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}dx=dt$ から　　$dx=\frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}}dt$　すなわち　$dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

$3\sin x+4\cos x=3\cdot\frac{2t}{1+t^2}+4\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=-2\cdot\frac{2t^2-3t-2}{1+t^2}$ であるから

$$\int\frac{5}{3\sin x+4\cos x}dx=-\frac{5}{2}\int\frac{1+t^2}{2t^2-3t-2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt$$

$$=-5\int\frac{dt}{(t-2)(2t+1)}=-5\cdot\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{2}{2t+1}\right)dt$$

$$=-(\log|t-2|-\log|2t+1|)+C=\log\left|\frac{2t+1}{t-2}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-2}\right|+C\ \text{（}C\text{ は積分定数）}$$