数学演習(不定積分)R１．９．６　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{1}{4x^2-12x+9}dx$　(2) $\int \sqrt[3]{3x+2}\,dx$　(3) $\int e^{-2x+1}dx$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}dx$　(5) $\int \sin(3x-2)\,dx$　(6) $\int 7^{2x-3}dx$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x+2)\sqrt{1-x}\,dx$　(2) $\int \frac{x}{(x+3)^2}dx$　(3) $\int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

(4) $\int \frac{e^{2x}}{e^x+2}dx$　(5) $\int \left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)dx$　(6) $\int \frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\,dx$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx$　(2) $\int \sin x\cos^2 x\,dx$　(3) $\int \frac{1}{x\log x}dx$

4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^{2x}dx$　(2) $\int \log(x+1)dx$　(3) $\int x\cos 2x\,dx$

5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^{-x}dx$　(2) $\int x\sin x\,dx$　(3) $\int x^2\log x\,dx$

(4) $\int x\cdot 3^x dx$　(5) $\int \frac{\log(\log x)}{x}dx$

6 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x^2\cos x$　(2) x^2e^{-x}　(3) $x\tan^2 x$

$\boxed{7}$ 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x^2\sin x$　　(2) $(\log x)^2$　　(3) x^2e^{2x}

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int \sin(\log x)\,dx$

$\boxed{9}$ n は整数とする。次の等式が成り立つことを証明せよ。ただし，$\cos^0 x=1$，$(\log x)^0=1$ である。

(1) $\displaystyle\int \cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\left\{\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx\right\}$ $(n\geqq 2)$

(2) $\displaystyle\int (\log x)^n dx=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx$ $(n\geqq 1)$

(3) $\displaystyle\int x^n\sin x\,dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx$ $(n\geqq 1)$

$\boxed{10}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}dx$　　(3) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}dx$

$\boxed{11}$ 不定積分 $\displaystyle\int(\sin x+x\cos x)dx$ を求めよ。また，この結果を用いて，不定積分 $\displaystyle\int(\sin x+x\cos x)\log x\,dx$ を求めよ。

$\boxed{12}$ n を 0 以上の整数とする。次の不定積分を求めよ。

$$\int\left\{-\frac{(\log x)^n}{x^2}\right\}dx=\sum_{k=0}^{n}\boxed{}$$

ただし，積分定数は書かなくてよい。

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{4x^2-12x+9}dx$　(2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x+2}\,dx$　(3) $\displaystyle\int e^{-2x+1}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}dx$　(5) $\displaystyle\int \sin(3x-2)\,dx$　(6) $\displaystyle\int 7^{2x-3}dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $-\dfrac{1}{2(2x-3)}+C$　(2) $\dfrac{1}{4}(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}+C$

(3) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x+1}+C$　(4) $-\sqrt[3]{1-3x}+C$　(5) $-\dfrac{1}{3}\cos(3x-2)+C$

(6) $\dfrac{7^{2x-3}}{2\log 7}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-12x+9}=\int\frac{dx}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2x-3}\right)+C=-\frac{1}{2(2x-3)}+C$

(2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{3x+2}\,dx=\int(3x+2)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(3x+2)^{\frac{4}{3}}+C$

$\displaystyle=\frac{1}{4}(3x+2)\sqrt[3]{3x+2}+C$

(3) $\displaystyle\int e^{-2x+1}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x+1}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}dx=\int(1-3x)^{-\frac{2}{3}}dx=-\frac{1}{3}\cdot 3(1-3x)^{\frac{1}{3}}+C=-\sqrt[3]{1-3x}+C$

(5) $\displaystyle\int\sin(3x-2)\,dx=\frac{1}{3}\{-\cos(3x-2)\}+C=-\frac{1}{3}\cos(3x-2)+C$

(6) $\displaystyle\int 7^{2x-3}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{7^{2x-3}}{\log 7}+C=\frac{7^{2x-3}}{2\log 7}+C$

2 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(x+2)\sqrt{1-x}\,dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(x+3)^2}dx$　(3) $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx$　(5) $\displaystyle\int\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)dx$　(6) $\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\,dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $-\dfrac{2}{5}(x+4)(1-x)\sqrt{1-x}+C$

(2) $\log|x+3|+\dfrac{3}{x+3}+C$　(3) $\dfrac{2}{3}(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}+C$

(4) $e^x-2\log(e^x+2)+C$　(5) $\log|\tan x|+C$　(6) $\dfrac{1}{4}\{\log(1+x^2)\}^2+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{1-x}=t$ とおくと，$x=1-t^2$ から　$dx=-2tdt$

よって　$\displaystyle\int(x+2)\sqrt{1-x}\,dx=\int(3-t^2)t(-2t)dt=2\int(t^4-3t^2)dt$

$\displaystyle=2\left(\frac{t^5}{5}-t^3\right)+C=-\frac{2}{5}t^3(5-t^2)+C$

$\displaystyle=-\frac{2}{5}(x+4)(1-x)\sqrt{1-x}+C$

(2) $x+3=t$ とおくと，$x=t-3$ から　$dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{x}{(x+3)^2}dx=\int\frac{t-3}{t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{t^2}\right)dt=\log|t|+\frac{3}{t}+C$

$\displaystyle=\log|x+3|+\frac{3}{x+3}+C$

(3) $x^2+x+1=t$ とおくと　$(2x+1)dx=dt$

よって　$\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}+C$

別解　$\sqrt{x^2+x+1}=t$ とおくと，$\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}dx=dt$ から

$(2x+1)dx=2\sqrt{x^2+x+1}\,dt$　すなわち　$(2x+1)dx=2tdt$

よって　$\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx=\int 2t^2dt=\frac{2}{3}t^3+C$

$\displaystyle=\frac{2}{3}(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}+C$

(4) $e^x+2=t$ とおくと　$e^x=t-2$，$e^xdx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx=\int\frac{e^x}{e^x+2}e^xdx=\int\frac{t-2}{t}dt=\int\left(1-\frac{2}{t}\right)dt$

$=t-2\log t+C'=e^x+2-2\log(e^x+2)+C'$　(C' は積分定数)

$2+C'$ を C とおいて　$\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+2}dx=e^x-2\log(e^x+2)+C$

(5) $\tan x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{\cos^2x}dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)dx=\int\frac{\tan^2x+1}{\tan x}dx=\int\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx=\int\frac{dt}{t}$

$=\log|t|+C=\log|\tan x|+C$

(6) $1+x^2=t$ とおくと　$2xdx=dt$

$\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\log(1+x^2)\cdot 2xdx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{t}\cdot\log t\,dt$

$\log t=u$ とおくと　$\dfrac{1}{t}dt=du$

よって　$\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}\log(1+x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int u\,du=\frac{1}{4}u^2+C=\frac{1}{4}(\log t)^2+C$

$\displaystyle=\frac{1}{4}\{\log(1+x^2)\}^2+C$

別解　$\log(1+x^2)=t$ とおくと　$\dfrac{2x}{1+x^2}dx=dt$

よって　(与式)$\displaystyle=\frac{1}{2}\int t\,dt=\frac{1}{4}t^2+C=\frac{1}{4}\{\log(1+x^2)\}^2+C$

3 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx$　(2) $\displaystyle\int\sin x\cos^2x\,dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $2\sqrt{x^2+x}+C$　(2) $-\dfrac{1}{3}\cos^3x+C$

(3) $\log|\log x|+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $x^2+x=u$ とおくと　$(x^2+x)'=2x+1$

よって　$\displaystyle\int\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}}dx=\int(x^2+x)^{-\frac{1}{2}}(x^2+x)'dx$

$\displaystyle=\int u^{-\frac{1}{2}}du=2u^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{x^2+x}+C$

(2) $(\cos x)'=-\sin x$ であるから

$\displaystyle\int\sin x\cos^2x\,dx=-\int\cos^2x(\cos x)'dx=-\frac{1}{3}\cos^3x+C$

(3) $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ であるから　$\displaystyle\int\frac{1}{x\log x}dx=\int\frac{(\log x)'}{\log x}dx=\log|\log x|+C$

4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$　(2) $\displaystyle\int\log(x+1)\,dx$　(3) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\dfrac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

(2) $(x+1)\log(x+1)-x+C$　(3) $\dfrac{1}{2}x\sin 2x+\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int xe^{2x}dx=\int x\cdot\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=x\cdot\frac{e^{2x}}{2}-\int 1\cdot\frac{e^{2x}}{2}dx$

$\displaystyle=\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}+C=\frac{1}{4}(2x-1)e^{2x}+C$

(2) $\displaystyle\int\log(x+1)\,dx=\int 1\cdot\log(x+1)\,dx=\int(x+1)'\cdot\log(x+1)\,dx$

$\displaystyle=(x+1)\cdot\log(x+1)-\int(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx$

$=(x+1)\log(x+1)-x+C$

(3) $\displaystyle\int x\cos 2x\,dx=\int x\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)'dx=x\cdot\frac{\sin 2x}{2}-\int 1\cdot\frac{\sin 2x}{2}dx$

$\displaystyle=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

5 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$　(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$　(3) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(4) $\displaystyle\int x\cdot 3^xdx$　(5) $\displaystyle\int\frac{\log(\log x)}{x}dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $-xe^{-x}-e^{-x}+C$　(2) $-x\cos x+\sin x+C$

(3) $\dfrac{x^3}{3}\log x-\dfrac{x^3}{9}+C$　(4) $\dfrac{x\cdot 3^x}{\log 3}-\dfrac{3^x}{(\log 3)^2}+C$

(5) $\log x\{\log(\log x)-1\}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int xe^{-x}dx=\int x(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}-\int 1\cdot(-e^{-x})dx$

$\displaystyle=-xe^{-x}+\int e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}+C$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx=\int x(-\cos x)'dx=-x\cos x-\int 1\cdot(-\cos x)dx$

$\displaystyle=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$

(3) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx=\int\left(\frac{x^3}{3}\right)'\log x\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{1}{3}\int x^2dx$

$$=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C$$

(4) $\displaystyle\int x\cdot 3^x dx=\int x\left(\frac{3^x}{\log 3}\right)'dx=x\cdot\frac{3^x}{\log 3}-\int\frac{3^x}{\log 3}dx=\frac{x\cdot 3^x}{\log 3}-\frac{3^x}{(\log 3)^2}+C$

(5) $\log x=y$ とおくと，$\dfrac{1}{x}dx=dy$ であるから

$$\int\frac{\log(\log x)}{x}dx=\int\log y\,dy=\int(y)'\cdot\log y\,dy=y\log y-\int y\cdot\frac{1}{y}dy=y\log y-y+C$$

$$=y(\log y-1)+C=\log x\{\log(\log x)-1\}+C$$

6 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x^2\cos x$　　(2) x^2e^{-x}　　(3) $x\tan^2 x$

解答　C は積分定数とする。(1) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$

(2) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$　　(3) $x\tan x+\log|\cos x|-\dfrac{x^2}{2}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx=\int x^2(\sin x)'dx=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx$

$$=x^2\sin x+2\int x(\cos x)'dx=x^2\sin x+2\left(x\cos x-\int\cos x\,dx\right)$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

(2) $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx=\int x^2(-e^{-x})'dx=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx$

$$=-x^2e^{-x}+2\int x(-e^{-x})'dx=-x^2e^{-x}+2\left(-xe^{-x}+\int e^{-x}dx\right)$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-2e^{-x}+C=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

(3) $\displaystyle\int x\tan^2 x\,dx=\int x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\int x(\tan x-x)'dx$

$$=x(\tan x-x)-\int(\tan x-x)dx$$

$$=x\tan x-x^2+\log|\cos x|+\frac{1}{2}x^2+C$$

$$=x\tan x+\log|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C$$

7 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $x^2\sin x$　　(2) $(\log x)^2$　　(3) x^2e^{2x}

解答　C は積分定数とする。　(1) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

(2) $x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$　　(3) $\dfrac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx=\int x^2(-\cos x)'dx=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$

$$=-x^2\cos x+2\int x(\sin x)'dx=-x^2\cos x+2\left(x\sin x-\int\sin x\,dx\right)$$

$$=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$$

(2) $\displaystyle\int(\log x)^2dx=\int 1\cdot(\log x)^2dx=\int(x)'(\log x)^2dx$

$$=x(\log x)^2-\int x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x(\log x)^2-2\int\log x\,dx=x(\log x)^2-2\int(x)'(\log x)dx$$

$$=x(\log x)^2-2\left(x\log x-\int dx\right)=x(\log x)^2-2x\log x+2x+C$$

(3) $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx=\int x^2\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\int xe^{2x}dx=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\int x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'dx$

$$=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\left(\frac{xe^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)=\frac{x^2e^{2x}}{2}-\frac{xe^{2x}}{2}+\frac{e^{2x}}{4}+C$$

$$=\frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1)+C$$

8 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\sin(\log x)dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$　　(2) $\dfrac{1}{2}x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $I=\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$ とする。

$$I=\int(-e^{-x})'\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos x+\int(e^{-x})'\sin x\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos x+\left(e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx\right)$$

$$=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-I$$

よって　$2I=e^{-x}(\sin x-\cos x)$

積分定数を考えて　$I=\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$

別解　$I=\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$，$J=\displaystyle\int e^{-x}\sin x\,dx$ とする。

$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$，$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$

であるから，2 つの式の両辺を積分して

$e^{-x}\cos x=-I-J$，$e^{-x}\sin x=-J+I$

辺々を引いて　$e^{-x}(\sin x-\cos x)=2I$

積分定数を考えて　$I=\dfrac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$

(2) $I=\displaystyle\int\sin(\log x)dx$ とする。

$$I=\int(x)'\sin(\log x)dx=x\sin(\log x)-\int x\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=x\sin(\log x)-\int\cos(\log x)dx$$

$$=x\sin(\log x)-\int(x)'\cos(\log x)dx$$

$$=x\sin(\log x)-\left\{x\cos(\log x)+\int x\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}dx\right\}$$

$$=x\sin(\log x)-x\cos(\log x)-\int\sin(\log x)dx$$

$$=x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}-I$$

よって　$2I=x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}$

積分定数を考えて　$I=\dfrac{1}{2}x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C$

別解　$I=\displaystyle\int\sin(\log x)dx$，$J=\displaystyle\int\cos(\log x)dx$ とする。

$\{\sin(\log x)\}'=\cos(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$，$\{\cos(\log x)\}'=-\sin(\log x)\cdot\dfrac{1}{x}$

から　$\{x\sin(\log x)\}'=\sin(\log x)+\cos(\log x)$

$\{x\cos(\log x)\}'=\cos(\log x)-\sin(\log x)$

両辺を積分して　$x\sin(\log x)=I+J$，$x\cos(\log x)=J-I$

辺々を引いて　$2I=x\sin(\log x)-x\cos(\log x)$

積分定数を考えて　$I=\dfrac{1}{2}x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}+C$

9 n は整数とする。次の等式が成り立つことを証明せよ。ただし，$\cos^0 x=1$，$(\log x)^0=1$ である。

(1) $\displaystyle\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\left\{\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx\right\}$ $(n\geqq 2)$

(2) $\displaystyle\int(\log x)^n dx=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx$ $(n\geqq 1)$

(3) $\displaystyle\int x^n\sin x\,dx=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx$ $(n\geqq 1)$

解答　(1) 略　(2) 略　(3) 略

解説

(1) $n\geqq 2$ のとき

$$\int\cos^n x\,dx=\int\cos x\cos^{n-1}x\,dx=\int(\sin x)'\cos^{n-1}x\,dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x-\int\sin x\cdot(n-1)\cos^{n-2}x\cdot(-\sin x)dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\sin^2 x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int(1-\cos^2 x)\cos^{n-2}x\,dx$$

$$=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\left(\int\cos^{n-2}x\,dx-\int\cos^n x\,dx\right)$$

よって，$I_n=\displaystyle\int\cos^n x\,dx$ とすると

$$I_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)(I_{n-2}-I_n)$$

整理すると　$nI_n=\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}$

したがって　$\displaystyle\int\cos^n x\,dx=\frac{1}{n}\left\{\sin x\cos^{n-1}x+(n-1)\int\cos^{n-2}x\,dx\right\}$

(2) $\displaystyle\int(\log x)^n dx=\int(x)'(\log x)^n dx=x(\log x)^n-\int x\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=x(\log x)^n-n\int(\log x)^{n-1}dx$$

(3) $\displaystyle\int x^n\sin x\,dx=\int x^n(-\cos x)'dx=-x^n\cos x-\int(-\cos x)nx^{n-1}dx$

$$=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\,dx$$

10 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}dx$　　(3) $\displaystyle\int x^3e^{x^2}dx$

解答　C は積分定数とする。(1) $\dfrac{4}{15}(3\sqrt{x}-2)(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$

(2) $\dfrac{1}{\sin x-1}+C$　　(3) $\dfrac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{1+\sqrt{x}}=t$ とおくと，$1+\sqrt{x}=t^2$ から　$x=(t^2-1)^2$，$dx=2(t^2-1)\cdot 2t\,dt$

よって　$\displaystyle\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx=\int t\cdot 2(t^2-1)\cdot 2t\,dt=4\int(t^4-t^2)dt$

$$=4\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)+C=\frac{4}{15}t^3(3t^2-5)+C$$

$$=\frac{4}{15}(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}\{3(1+\sqrt{x})-5\}+C$$

$$=\frac{4}{15}(3\sqrt{x}-2)(1+\sqrt{x})\sqrt{1+\sqrt{x}}+C$$

(2) $$\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}=\frac{\cos x}{(1-\sin^2 x)+2\sin x-2}=\frac{\cos x}{-\sin^2 x+2\sin x-1}$$

$$=-\frac{\cos x}{(\sin x-1)^2}$$

$\sin x-1=t$ とおくと　$\cos x\,dx=dt$

よって　$\displaystyle\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}dx=-\int\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{t}+C=\frac{1}{\sin x-1}+C$

別解　$(\sin x-1)'=\cos x$ であるから

$$\int\frac{\cos x}{\cos^2 x+2\sin x-2}dx=-\int\frac{\cos x}{(\sin x-1)^2}dx=-\int\frac{(\sin x-1)'}{(\sin x-1)^2}dx$$

$$=\frac{1}{\sin x-1}+C$$

(3) $x^2=t$ とおくと，$2x\,dx=dt$ から　$x\,dx=\frac{1}{2}dt$

よって　$\displaystyle\int x^3e^{x^2}dx=\int x^2e^{x^2}\cdot x\,dx=\int te^t\cdot\frac{1}{2}dt$

$$=\frac{1}{2}\int t(e^t)'dt=\frac{1}{2}\left(te^t-\int e^t dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}(te^t-e^t)+C=\frac{1}{2}(t-1)e^t+C$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2}+C$$

$\boxed{11}$ 不定積分 $\displaystyle\int(\sin x+x\cos x)dx$ を求めよ。また，この結果を用いて，不定積分 $\displaystyle\int(\sin x+x\cos x)\log x\,dx$ を求めよ。

解答　C は積分定数とする。順に $x\sin x+C$，$x(\sin x)\log x+\cos x+C$

解説

C は積分定数とする。

$$\int(\sin x+x\cos x)dx=\int\sin x\,dx+\int x\cos x\,dx$$

$$=-\cos x+x\sin x-\int\sin x\,dx$$

$$=-\cos x+x\sin x+\cos x+C$$

$$=x\sin x+C$$

この結果を用いると

$$\int(\sin x+x\cos x)\log x\,dx=\int(x\sin x)'\log x\,dx$$

$$=(x\sin x)\log x-\int(x\sin x)\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=(x\sin x)\log x-\int\sin x\,dx$$

$$=x(\sin x)\log x+\cos x+C$$

$\boxed{12}$ n を 0 以上の整数とする。次の不定積分を求めよ。

$$\int\left\{-\frac{(\log x)^n}{x^2}\right\}dx=\sum_{k=0}^{n}\boxed{}$$

ただし，積分定数は書かなくてよい。

解答　$\dfrac{n!(\log x)^k}{k!x}$

解説

$I_n=\displaystyle\int\left\{-\frac{(\log x)^n}{x^2}\right\}dx$ とおくと　$I_0=\displaystyle\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{x}$

また，$n\geqq1$ のとき

$$I_n=\int\left(\frac{1}{x}\right)'(\log x)^n dx=\frac{(\log x)^n}{x}-\int\frac{1}{x}\cdot n(\log x)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{(\log x)^n}{x}+n\int\left\{-\frac{(\log x)^{n-1}}{x^2}\right\}dx$$

よって　$I_n=\dfrac{(\log x)^n}{x}+nI_{n-1}$

両辺を $n!$ で割ると　$\dfrac{I_n}{n!}=\dfrac{I_{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(\log x)^n}{n!x}$

$J_n=\dfrac{I_n}{n!}$ とおくと　$J_n=J_{n-1}+\dfrac{(\log x)^n}{n!x}$

ゆえに，$n\geqq1$ のとき

$$J_n=J_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{(\log x)^k}{k!x}=\frac{1}{x}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(\log x)^k}{k!x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\log x)^k}{k!x}$$

これは $n=0$ のときも成り立つ。

したがって　$I_n=n!J_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!(\log x)^k}{k!x}$