数学演習(不定積分)Ｒ１．９．５　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{x-\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan^2 x}dx$　　(4) $\displaystyle\int (2e^t-3\cdot 2^t)dt$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+1}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x}dx$　　(3) $\displaystyle\int (\tan x+2)\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$　　(5) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$　　(6) $\displaystyle\int (3e^t-10^t)dt$

$\boxed{3}$ (1)　次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x)=e^x-\frac{1}{\sin^2 x},\ F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

(2)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における法線の傾きが 3^x であり，かつ，この曲線が原点を通るとき，微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x)=\left|e^x-1\right|$ を満たし，$f(1)=e$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，次の条件 [1]，[2] が成り立つ。このとき，$f'(x)$，$f(x)$ を求めよ。ただし，$x>0$ とする。

[1] $F(x)=xf(x)-\dfrac{1}{x}$

[2] $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

$\boxed{6}$ 次の条件 (A)，(B) を同時に満たす 5 次式 $f(x)$ を求めよ。

(A) $f(x)+8$ は $(x+1)^3$ で割り切れる。

(B) $f(x)-8$ は $(x-1)^3$ で割り切れる。

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x-\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 x}dx$　　(4) $\displaystyle\int(2e^t-3\cdot 2^t)dt$

解答　C は積分定数とする。　(1) $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+8\sqrt{x}+C$　　(2) $\tan x-\log|x|+C$

(3) $-\dfrac{1}{\tan x}-x+C$　　(4) $2e^t-\dfrac{3\cdot 2^t}{\log 2}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\sqrt{x}-4+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$\displaystyle=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x+4\cdot 2x^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+8\sqrt{x}+C$

(2) $\displaystyle\int\frac{x-\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{x}\right)dx=\tan x-\log|x|+C$

(3) $\displaystyle\int\frac{1}{\tan^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$

$\displaystyle=-\frac{1}{\tan x}-x+C$

(4) $\displaystyle\int(2e^t-3\cdot 2^t)dt=2e^t-\frac{3\cdot 2^t}{\log 2}+C$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^3-2x+1}{x^2}dx$　　(2) $\displaystyle\int\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^3}{x}dx$　　(3) $\displaystyle\int(\tan x+2)\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$　　(5) $\displaystyle\int\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$　　(6) $\displaystyle\int(3e^t-10^t)dt$

解答　C は積分定数とする。(1) $\dfrac{x^2}{2}-2\log|x|-\dfrac{1}{x}+C$

(2) $x-\dfrac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}-\log|x|+C$　　(3) $-\cos x+2\sin x+C$

(4) $3\tan x-2x+C$　　(5) $-\dfrac{1}{2}\cos x+C$　　(6) $3e^t-\dfrac{10^t}{\log 10}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) (与式)$\displaystyle=\int\left(x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-2\log|x|-\frac{1}{x}+C$

(2) (与式)$\displaystyle=\int\frac{x-3x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-1}{x}dx=\int\left(1-3x^{-\frac{1}{3}}+3x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{x}\right)dx$

$\displaystyle=x-3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+3\cdot 3x^{\frac{1}{3}}-\log|x|+C=x-\frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2}+9\sqrt[3]{x}-\log|x|+C$

(3) (与式)$\displaystyle=\int(\tan x\cos x+2\cos x)dx=\int(\sin x+2\cos x)dx=-\cos x+2\sin x+C$

(4) (与式)$\displaystyle=\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-2\right)dx=3\tan x-2x+C$

(5) (与式)$\displaystyle=\int\frac{1}{2}\sin x\,dx=-\frac{1}{2}\cos x+C$

(6) (与式)$\displaystyle=3e^t-\frac{10^t}{\log 10}+C$

$\boxed{3}$ (1) 次の条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$$F'(x)=e^x-\frac{1}{\sin^2 x},\quad F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$$

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における法線の傾きが 3^x であり，かつ，この曲線が原点を通るとき，微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　(1) $F(x)=e^x+\dfrac{1}{\tan x}-e^{\frac{\pi}{4}}-1$　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{\log 3}(3^{-x}-1)$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle F(x)=\int F'(x)dx=\int\left(e^x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=e^x+\frac{1}{\tan x}+C$

$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ であるから　$e^{\frac{\pi}{4}}+1+C=0$　　これを解いて　$C=-e^{\frac{\pi}{4}}-1$

したがって　$F(x)=e^x+\dfrac{1}{\tan x}-e^{\frac{\pi}{4}}-1$

(2) 条件から　$-\dfrac{1}{f'(x)}=3^x$　　ゆえに　$f'(x)=-\dfrac{1}{3^x}=-3^{-x}$

よって　$\displaystyle f(x)=\int(-3^{-x})dx=\frac{3^{-x}}{\log 3}+C$

曲線 $y=f(x)$ は原点を通るから　$0=f(0)$　　ゆえに　$0=\dfrac{1}{\log 3}+C$

よって　$C=-\dfrac{1}{\log 3}$　　したがって　$f(x)=\dfrac{1}{\log 3}(3^{-x}-1)$

$\boxed{4}$ 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(x)=|e^x-1|$ を満たし，$f(1)=e$ であるとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=\begin{cases}e^x-x+1 & (x\geqq 0)\\ -e^x+x+3 & (x<0)\end{cases}$

解説

$x>0$ のとき，$e^x-1>0$ であるから　$f'(x)=e^x-1$

よって　$\displaystyle f(x)=\int(e^x-1)dx=e^x-x+C$ (C は積分定数)

$f(1)=e$ であるから　$e=e-1+C$

ゆえに　$C=1$　　したがって　$f(x)=e^x-x+1$　…… ①

$x<0$ のとき，$e^x-1<0$ であるから　$f'(x)=-e^x+1$

よって　$\displaystyle f(x)=\int(-e^x+1)dx=-e^x+x+D$ (D は積分定数)　…… ②

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能であるから，$x=0$ で連続である。

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to-0}f(x)=f(0)$

① から　$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}(e^x-x+1)=2$

② から　$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\lim_{x\to-0}(-e^x+x+D)=-1+D$

よって　$2=-1+D=f(0)$　　ゆえに　$D=3$

したがって　$f(x)=-e^x+x+3$

このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ から

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{e^h-h-1}{h}=0,$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-e^h+h+1}{h}=0$$

よって，$f'(0)$ が存在し，$f(x)$ は $x=0$ で微分可能である。

以上から　$f(x)=\begin{cases}e^x-x+1 & (x\geqq 0)\\ -e^x+x+3 & (x<0)\end{cases}$

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とするとき，次の条件 [1]，[2] が成り立つ。このとき，$f'(x)$，$f(x)$ を求めよ。ただし，$x>0$ とする。

[1] $F(x)=xf(x)-\dfrac{1}{x}$　　[2] $F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$

解答　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^3}$，$f(x)=\dfrac{1}{2x^2}+3$

解説

[1] の両辺を x で微分すると　$f(x)=f(x)+xf'(x)+\dfrac{1}{x^2}$

ゆえに　$xf'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$　　よって　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^3}$

この両辺を x で積分すると　$\displaystyle f(x)=\int\left(-\frac{1}{x^3}\right)dx$

すなわち　$f(x)=\dfrac{1}{2x^2}+C$ (C は積分定数)　…… ①

[1] で $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと　$F\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}$

[2] から　$\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}$　　よって　$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=4$

① で $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと　$4=1+C$　　ゆえに　$C=3$

よって　$f(x)=\dfrac{1}{2x^2}+3$

$\boxed{6}$ 次の条件 (A)，(B) を同時に満たす 5 次式 $f(x)$ を求めよ。

(A) $f(x)+8$ は $(x+1)^3$ で割り切れる。

(B) $f(x)-8$ は $(x-1)^3$ で割り切れる。

解答　$f(x)=3x^5-10x^3+15x$

解説

$p(x)$，$q(x)$ を 2 次式とすると

条件 (A) から　$f(x)+8=(x+1)^3p(x)$　…… ①

条件 (B) から　$f(x)-8=(x-1)^3q(x)$　…… ②

と表される。

よって，それぞれの両辺を x で微分して

$f'(x)=3(x+1)^2p(x)+(x+1)^3p'(x)$

$f'(x)=3(x-1)^2q(x)+(x-1)^3q'(x)$

すなわち，$f'(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れ，かつ，$(x-1)^2$ で割り切れる 4 次式である。

ゆえに，$a\neq 0$ として

$f'(x)=a(x+1)^2(x-1)^2=a(x^2-1)^2=a(x^4-2x^2+1)$

と表される。

よって　$\dfrac{1}{a}f'(x)=x^4-2x^2+1$

この両辺を x で積分すると　$\dfrac{1}{a}f(x)=\displaystyle\int(x^4-2x^2+1)dx$

すなわち　$\dfrac{f(x)}{a}=\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+x+C$ (C は積分定数)　…… ③

次に，①，② から　$f(-1)=-8$，$f(1)=8$　…… ④

③ の両辺に $x=-1$，1 をそれぞれ代入すると，④ により

$$-\frac{8}{a}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{3}-1+C,\quad \frac{8}{a}=\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1+C \quad \cdots\cdots ⑤$$

2 式の辺々を加えて　$C=0$　⑤ から　$\dfrac{8}{a}=\dfrac{8}{15}$　ゆえに　$a=15$

したがって　$f(x)=15\left(\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+x\right)=3x^5-10x^3+15x$