数学演習(面積･体積)H２４．７．３１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}$ について

(1)　変数 x の変域を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 連立不等式 $0 \leqq x \leqq \pi$，$\sin x \leqq y \leqq \sin 2x$ の表す領域の面積を求めよ。

$\boxed{3}$ 2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=2y^2-y$ によって囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x}{3x^2+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $C : y=f(x)$ に接する直線のうち，y 切片が最大となるものを ℓ とする。曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ $1\leqq a\leqq e$ とする。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=e^x-a$ と x 軸で挟まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を求めよ。

(2) $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{6}$ 曲線 $y=\log x$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=a+1$ $(0<a<1)$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。

(1) $S(a)$ を a の式で表せ。

(2) $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{7}$ 曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積が曲線 $y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ によって 2 等分されている。a の値を求めよ。

$\boxed{8}$ t を実数として，平面上の直線 $\ell_t : tx+(1-t)y=t(1-t)$ を考える。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$x>0$，$y>0$ の範囲で ℓ_t が通過する部分を図示し，その面積を求めよ。

$\boxed{9}$ 曲線 $(x-y)^2=2x$ の概形をかき，この曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{10}$ 2つの楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\dfrac{y^2}{3}=1$ で囲まれる共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{11}$ 曲線 $C : y=\sin x \ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点 P における C の法線を ℓ とする。

(1) 法線 ℓ が点 Q $(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) (1) の条件を満たす点 P に対し，直線 ℓ，曲線 C，直線 $y=1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 ℓ，曲線 C，x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を比較せよ。

$\boxed{12}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$$y=x+\cos x,\quad x \text{軸},\quad y \text{軸},\quad \text{直線 } x=\frac{\pi}{2}$$

$\boxed{13}$ 放物線 $y=x^2-4$ ……① と，直線 $y=3x$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1) ① と ② の交点を求めよ。

(2) ① と ② で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{14}$ 曲線 $y=x^2-ax$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とする。このとき，$V_1=V_2$ となるように定数 a の値を定めよ。

$\boxed{15}$ xy 平面上の $x\geqq 0$ の範囲で，直線 $y=x$ と曲線 $y=x^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ により囲まれる部分を D とする。D を直線 $y=x$ の周りに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) V_n を求めよ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$ $f(x)=\sin x$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0 \leqq x \leqq \pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{17}$ xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$, $\mathrm{Q}\left(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2}\right)$ を考える。u が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)\ (0 \leqq u \leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

1　関数 $f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}$ について

(1)　変数 x の変域を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　(1)　$x\geqq -2$　　(2)　$\dfrac{12\sqrt{3}}{5}$

解説

$f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}$

(1)　$x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)\geqq 0$ から，x の変域は　　$x\geqq -2$

(2)　x 軸との共有点の x 座標は -2，1 で，それ以外では　　$y=f(x)>0$

よって，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{1}(1-x)\sqrt{x+2}\,dx$$

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと　　$x=t^2-2$，　$dx=2t\,dt$

x	$-2\ \longrightarrow\ 1$
t	$0\ \longrightarrow\ \sqrt{3}$

ゆえに　　$S=\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}(3-t^2)t\cdot 2t\,dt=\left[2t^3-\frac{2}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{3}}=\frac{12\sqrt{3}}{5}$

参考　$y=f(x)$ は $x=1$ のとき極小値 0 をとる。

2　連立不等式 $0\leqq x\leqq\pi$，$\sin x\leqq y\leqq\sin 2x$ の表す領域の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{4}$

解説

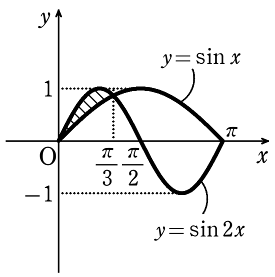
$y=\sin x$ ……①，　$y=\sin 2x$ ……②

①，② の $0\leqq x\leqq\pi$ における共有点の x 座標を求める。

$\sin x=\sin 2x$ とおくと　$\sin x(2\cos x-1)=0$

よって　$\sin x=0$，$\cos x=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$x=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，π



よって，不等式 $\sin x\leqq y\leqq\sin 2x$ の表す領域は図の斜線部分(境界線を含む)。

ゆえに，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$$

3　2 つの放物線 $y=x^2$ と $x=2y^2-y$ によって囲まれる図形の面積を求めよ。

解答　$\dfrac{1}{2}$

解説

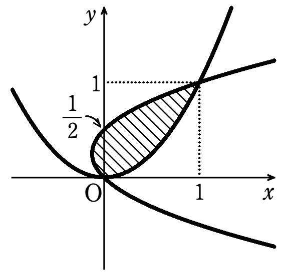
$y=x^2$　　　……①

$x=2y^2-y$　……②

①，② から y を消去して因数分解すると

$x(x-1)(2x^2+2x+1)=0$　……③

ここで　　$2x^2+2x+1=2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}>0$



よって，③ の実数解は　　$x=0$，1

ゆえに，交点の座標は　　$(0,\ 0)$，$(1,\ 1)$

したがって，求める面積は

$$\int_0^1\{\sqrt{y}-(2y^2-y)\}dy=\left[\frac{2}{3}y\sqrt{y}-\frac{2}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

4　関数 $f(x)=\dfrac{x}{3x^2+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $C：y=f(x)$ に接する直線のうち，y 切片が最大となるものを ℓ とする。曲線 C と直線 ℓ の接点の座標を求めよ。

(2)　曲線 C と直線 ℓ および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

解答　(1)　$\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$　　(2)　$\dfrac{5}{16}-\dfrac{1}{3}\log 2$

解説

(1)　$y=\dfrac{x}{3x^2+1}$ から　　$y'=\dfrac{1-3x^2}{(3x^2+1)^2}$

点 $\left(t,\ \dfrac{t}{3t^2+1}\right)$ における接線の方程式は　　$y=\dfrac{1-3t^2}{(3t^2+1)^2}(x-t)+\dfrac{t}{3t^2+1}$

よって　　$y=\dfrac{1-3t^2}{(3t^2+1)^2}x+\dfrac{6t^3}{(3t^2+1)^2}$

y 切片を $g(t)=\dfrac{6t^3}{(3t^2+1)^2}$ とおくと

$$g'(t)=\frac{18t^2(3t^2+1)^2-6t^3\cdot 2(3t^2+1)\cdot 6t}{(3t^2+1)^4}=\frac{18t^2(3t^2+1-4t^2)}{(3t^2+1)^3}=\frac{18t^2(1-t^2)}{(3t^2+1)^3}$$

$g'(t)=0$ とすると　　$t=0$，± 1

$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	…	-1	…	0	…	1	…
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	極小	↗	0	↗	極大	↘

ここで　$\displaystyle\lim_{t\to -\infty}g(t)=0$，　$g(1)=\dfrac{3}{8}$

よって，$t=1$ のとき y 切片 $g(t)$ は最大となる。

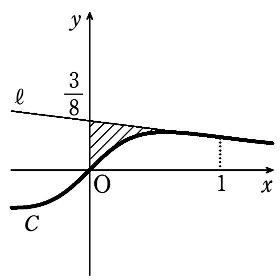
このとき，接点の座標は　　$(1,\ f(1))$　すなわち　$\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$

(2)　(1) から ℓ の方程式は

$$y=-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}$$

$x<1$ のとき

$$-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}-\frac{x}{3x^2+1}=\frac{-3(x-1)^3}{8(3x^2+1)}>0$$



であるから　　$-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{3}{8}>\dfrac{x}{3x^2+1}$

よって，求める面積は

$$\int_0^1\left(-\frac{1}{8}x+\frac{3}{8}-\frac{x}{3x^2+1}\right)dx=\left[-\frac{1}{16}x^2+\frac{3}{8}x-\frac{1}{6}\log(3x^2+1)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{16}+\frac{3}{8}-\frac{1}{6}\log 4=\frac{5}{16}-\frac{1}{3}\log 2$$

5　$1\leqq a\leqq e$ とする。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=e^x-a$ と x 軸で挟まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を求めよ。

(2)　$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答　(1)　$S(a)=2a\log a-3a+1+e$　　(2)　$a=\sqrt{e}$ のとき最小値 $1+e-2\sqrt{e}$

解説

(1)　曲線 $y=e^x-a$ と x 軸の交点の x 座標は，

$e^x-a=0$ を解いて　　$x=\log a$

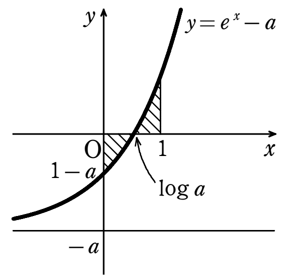
また，$1\leqq a\leqq e$ より　　$0\leqq\log a\leqq 1$

したがって

$$S(a)=\int_0^{\log a}(a-e^x)dx+\int_{\log a}^1(e^x-a)dx$$

$$=\Big[ax-e^x\Big]_0^{\log a}+\Big[e^x-ax\Big]_{\log a}^1$$

$$=2a\log a-3a+1+e$$



(2)　$S'(a)=2\log a-1$

$S'(a)=0$ とすると　　$a=\sqrt{e}$

$S(a)$ の増減表は右のようになる。

a	1	…	$\sqrt{e}$	…	e
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，$S(a)$ は $a=\sqrt{e}$ で最小値をとり，

その値は　　$S(\sqrt{e})=1+e-2\sqrt{e}$

6　曲線 $y=\log x$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=a+1$ $(0<a<1)$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

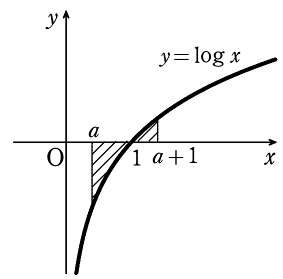
解答　(1)　$S(a)=(a+1)\log(a+1)+a\log a-2a+1$　　(2)　$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

解説

(1)　$S(a)=\displaystyle\int_a^1(-\log x)dx+\int_1^{a+1}\log x\,dx$

$$=-\Big[x\log x-x\Big]_a^1+\Big[x\log x-x\Big]_1^{a+1}$$

$$=(a+1)\log(a+1)+a\log a-2a+1$$



(2)　$S'(a)=\log(a+1)+\log a=\log a(a+1)$

$0<a<1$ において，$S'(a)=0$ とすると　$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	…	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	…	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

したがって，$S(a)$ は $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき極小かつ最小となる。

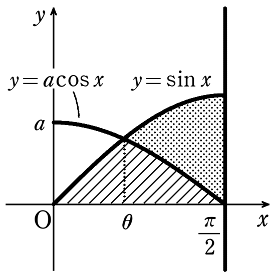
7　曲線 $y=\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸および直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた部分の面積が曲線

$y=a\cos x\ \left(0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2}\right)$ によって2等分されている。a の値を求めよ。

解答 $a=\frac{3}{4}$

解説

2曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で交わるから $a>0$ である。

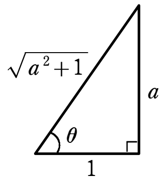


その交点の x 座標を θ とすると

$$\sin\theta=a\cos\theta \quad \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

よって　$\tan\theta=a$

したがって，右の図から



$$\sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

面積の条件から　$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\int_\theta^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-a\cos x)dx$　……①

(①の左辺)$=\frac{1}{2}\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

(①の右辺)$=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_\theta^{\frac{\pi}{2}}=-a+\cos\theta+a\sin\theta$

$=-a+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}=-a+\sqrt{a^2+1}$

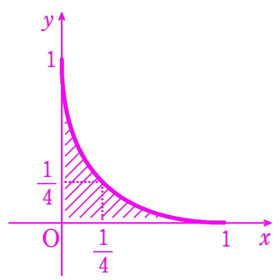
よって　$\frac{1}{2}=-a+\sqrt{a^2+1}$　　すなわち　$a+\frac{1}{2}=\sqrt{a^2+1}$

両辺を2乗して　$a^2+a+\frac{1}{4}=a^2+1$

したがって　$a=\frac{3}{4}$　($a>0$ を満たす)

8　t を実数として，平面上の直線 $\ell_t: tx+(1-t)y=t(1-t)$ を考える。t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$x>0$，$y>0$ の範囲で ℓ_t が通過する部分を図示し，その面積を求めよ。

解答　[図]　ただし，境界線は座標軸を含まず，他は含む；面積 $\frac{1}{6}$



解説

ℓ_t の方程式から　$(1-t)y=t(1-x-t)$

$0<t<1$，$y>0$ から　$1-x-t>0$

よって　$0<x<1-t<1$　　また　$0<t<1-x$

ℓ_t 上の点 $(x,\ y)$ について　$y=\frac{t}{t-1}x+t\quad(0<x<1)$

この右辺を $g(t)$ とおき，x を固定して $0<t<1-x$ の範囲で $g(t)$ のとりうる値の範囲を考える。

$$g'(t)=\frac{(t-1)-t}{(t-1)^2}x+1$$

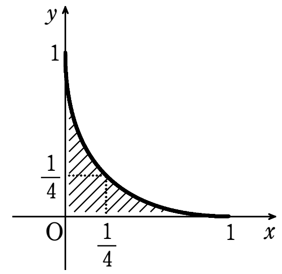
$$=\frac{\{t-(1+\sqrt{x})\}\{t-(1-\sqrt{x})\}}{(t-1)^2}$$

t	0	…	$1-\sqrt{x}$	…	$1-x$
$g'(t)$		+	0	−	
$g(t)$	(0)	↗	$(\sqrt{x}-1)^2$ 極大	↘	(0)

$0<t<1-x$ における $g(t)$ の増減表は右のようになる。

よって　$0<g(t)=y\leqq(\sqrt{x}-1)^2$

したがって，$x>0$，$y>0$ の範囲で ℓ_t が通過する部分は，区間 $(0,\ 1)$ において，曲線 $y=(\sqrt{x}-1)^2$ と座標軸で囲まれる部分で，右の図のようになる。ただし，境界線は座標軸を含まず，他は含む。



よって，その面積は

$$\int_0^1(\sqrt{x}-1)^2dx=\int_0^1(x-2\sqrt{x}+1)dx$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

注意　面積については，求める部分が境界線を含むものとして計算した。

別解　ℓ_t の方程式を変形して　$t^2+(x-y-1)t+y=0$

この方程式が $0<t<1$ に解をもつ条件を求めればよい。

$f(t)=t^2+(x-y-1)t+y$ とおくと，$f(0)=y>0$，$f(1)=x>0$ であるから，その条件は　$D=(x-y-1)^2-4y\geqq0$　……①

かつ　$0<-\frac{x-y-1}{2}<1$　……②

②より　$x-1<y<x+1$

①より　$(x-y-1-2\sqrt{y})(x-y-1+2\sqrt{y})\geqq0$

ここで，②より $x-y-1<0$ であるから

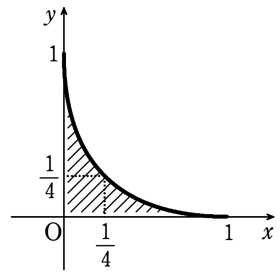
$x-y-1-2\sqrt{y}<0$

よって　$x-y-1+2\sqrt{y}\leqq0$

ゆえに　$x\leqq(\sqrt{y}-1)^2$

したがって，求める領域は右の図のようになる。

ただし，境界線は座標軸を含まず，他は含む。

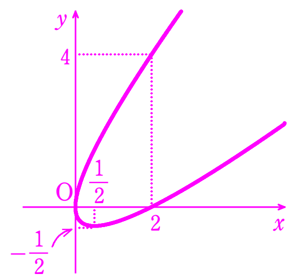


よって，その面積は

$$\int_0^1(\sqrt{y}-1)^2dy=\int_0^1(y-2\sqrt{y}+1)dy=\left[\frac{y^2}{2}-\frac{4}{3}y\sqrt{y}+y\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

9　曲線 $(x-y)^2=2x$ の概形をかき，この曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

解答　[図]，$\frac{2}{3}$



解説

$(x-y)^2=2x\geqq0$ から　$x\geqq0$　　y について解くと　$y=x\pm\sqrt{2x}$

[1]　$y=x+\sqrt{2x}$ について

$y\geqq0$，$y'=1+\frac{1}{\sqrt{2x}}>0$ から，y は単調に増加する。

また，$x=0$ のとき　$y=0$

[2]　$y=x-\sqrt{2x}$ について　　$y'=1-\frac{1}{\sqrt{2x}}$

x	0	…	$\frac{1}{2}$	…
y'	／	−	0	+
y	0	↘	極小	↗

$y'=0$ とすると　$x=\frac{1}{2}$

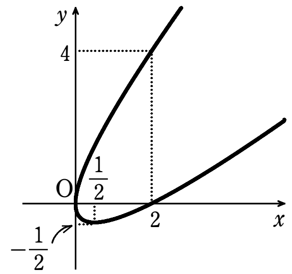
y の増減表は右のようになる。

よって，y は $x=\frac{1}{2}$ のとき極小値 $-\frac{1}{2}$ をとる。

また，$y=0$ とすると

$x=0,\ 2$

[1]，[2] から，曲線の概形は右の図のようになる。



よって，求める面積は

$$-\int_0^2(x-\sqrt{2x})dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2=\frac{2}{3}$$

参考　グラフの凹凸を調べると，次のようになる。

[1]　$y=x+\sqrt{2x}$ について　　$y''=-\frac{1}{2\sqrt{2}}x^{-\frac{3}{2}}<0$ からグラフは上に凸。

[2]　$y=x-\sqrt{2x}$ について　　$y''=\frac{1}{2\sqrt{2}}x^{-\frac{3}{2}}>0$ からグラフは下に凸。

10　2つの楕円 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$，$x^2+\frac{y^2}{3}=1$ で囲まれる共通部分の面積を求めよ。

解答　$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

解説

$\frac{x^2}{3}+y^2=1$ ……①，$x^2+\frac{y^2}{3}=1$ ……② とする。

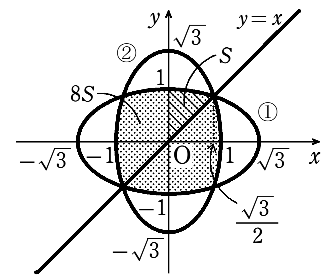
楕円①と②は，x 軸，y 軸，原点のそれぞれに関して対称である。

①から　　$y^2=1-\frac{x^2}{3}$　……③

これを②に代入して　　$x^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{x^2}{3}\right)=1$

これを解くと　　$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

③から　　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (複号任意)



よって，第1象限において，①と②の交点は点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ である。

右の図の斜線部分の面積を S とすると，求める面積は $8S$ である。

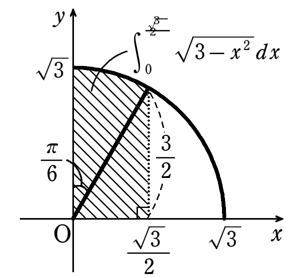
③において，$y\geqq0$ とすると　　$y=\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}$

よって　$S=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sqrt{3-x^2}\,dx-\frac{3}{8}$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}\right\}-\frac{3}{8}$

$=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$



したがって，求める面積は　　$8S=8\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}\pi=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

$\boxed{11}$ 曲線 C : $y=\sin x$ $\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点 P における C の法線を ℓ とする。

(1) 法線 ℓ が点 Q$(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) (1) の条件を満たす点 P に対し，直線 ℓ ，曲線 C，直線 $y=1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 ℓ ，曲線 C，x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を比較せよ。

解答 (1) 略 (2) $S_1>S_2$

解説

(1) 点 P$(t,\ \sin t)$ における法線 ℓ の方程式は $\quad y-\sin t=-\dfrac{1}{\cos t}(x-t)$

これが点 Q$(0,\ 1)$ を通るとき $\quad 1-\sin t=-\dfrac{1}{\cos t}(0-t)$

よって $\quad t+\sin t\cos t-\cos t=0$ ……①

$f(t)=t+\sin t\cos t-\cos t$ とおくと

$$f'(t)=1+\cos^2 t-\sin^2 t+\sin t=2\cos^2 t+\sin t$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\quad f'(t)>0$

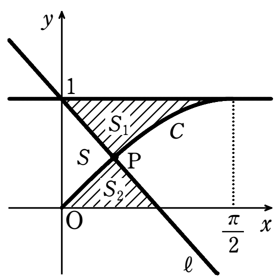
したがって，$f(t)$ は単調に増加する。

$f(0)=-1<0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0$ であり，$f(t)$ は $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で連続である。

したがって，$f(t)=0$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす t はただ 1 つ存在する。

すなわち，法線 ℓ が点 Q$(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在する。

(2) 直線 ℓ と曲線 C と y 軸で囲まれた部分の面積を S とすると



$$S_1-S_2=(S_1+S)-(S_2+S)$$

$$S_1+S=\frac{\pi}{2}\times 1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1$$

ℓ : $y=-\dfrac{1}{\cos t}(x-t)+\sin t$ において $y=0$ とおくと

$$x=t+\sin t\cos t$$

よって，① から $\quad x=\cos t$

ゆえに $\quad S_2+S=\dfrac{1}{2}\cdot\cos t\cdot 1=\dfrac{1}{2}\cos t$

よって $\quad S_1-S_2=\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{1}{2}\cos t>\dfrac{\pi}{2}-1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi-3}{2}>0$

したがって $\quad S_1>S_2$

$\boxed{12}$ 次の曲線と直線で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

$$y=x+\cos x,\quad x\text{ 軸},\quad y\text{ 軸},\quad \text{直線 } x=\frac{\pi}{2}$$

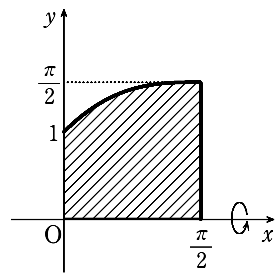
解答 $\dfrac{\pi}{24}(\pi^3+30\pi-48)$

解説

$y=x+\cos x \qquad y'=1-\sin x\geqq 0$

よって，y は単調に増加する。

$x=0$ のとき $y=1$ で，右の図の斜線部分を x 軸の周りに回転させることになる。



したがって，求める回転体の体積を V とすると

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\cos x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2+2x\cos x+\cos^2 x)dx$$

ここで $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^3}{24}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

ゆえに $\quad V=\pi\left(\dfrac{\pi^3}{24}+\pi-2+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{24}(\pi^3+30\pi-48)$

$\boxed{13}$ 放物線 $y=x^2-4$ ……① と，直線 $y=3x$ ……② について，次の問いに答えよ。

(1) ① と ② の交点を求めよ。

(2) ① と ② で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

解答 (1) 点 $(-1,\ -3)$, $(4,\ 12)$ (2) 132π

解説

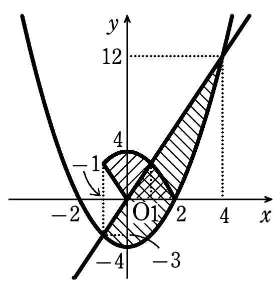
(1) ① と ② の交点の x 座標は，$x^2-4=3x$ を解いて $\quad x=-1,\ 4$

$x=-1$ のとき $y=-3$, $\quad x=4$ のとき $y=12$

よって，求める交点は $\quad$ 点 $(-1,\ -3)$, $(4,\ 12)$

(2) 位置関係を考えると，右の図のように $y<0$ の部分を折り返して考えればよい。

放物線 $y=-x^2+4$ と直線 $y=3x$ の交点は，放物線 $y=-x^2+4$ が原点に関して ① と対称であることから 点 $(1,\ 3)$, $(-4,\ -12)$



よって，求める体積を V とすると

$$V=\pi\int_{-1}^{1}(4-x^2)^2dx+\pi\int_1^4(3x)^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1+\pi\Big[3x^3\Big]_1^4-\pi\Big[3x^3\Big]_{-1}^0-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4$$

$$=\pi\left(\frac{2}{5}-\frac{16}{3}+32\right)+189\pi-3\pi-\pi\left(\frac{992}{5}-\frac{448}{3}+32\right)$$

$$=\pi(-198+144+186)=132\pi$$

$\boxed{14}$ 曲線 $y=x^2-ax$ $(a>0)$ と x 軸で囲まれた図形を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_1，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を V_2 とする。このとき，$V_1=V_2$ となるように定数 a の値を定めよ。

解答 $a=5$

解説

$y=x^2-ax=x(x-a)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}$ $(a>0)$

$$V_1=\pi\int_0^a x^2(x-a)^2dx=\pi\int_0^a(x^4-2ax^3+a^2x^2)dx=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{a}{2}x^4+\frac{a^2}{3}x^3\right]_0^a=\frac{\pi}{30}a^5$$

$y=x^2-ax$ から $\quad x=\dfrac{1}{2}(a\pm\sqrt{a^2+4y})$

$$V_2=\pi\int_{-\frac{a^2}{4}}^0\frac{1}{4}\{(a+\sqrt{a^2+4y})^2-(a-\sqrt{a^2+4y})^2\}dy$$

$$=\pi\int_{-\frac{a^2}{4}}^0 a\sqrt{a^2+4y}\,dy=\pi a\left[\frac{1}{6}\sqrt{(a^2+4y)^3}\right]_{-\frac{a^2}{4}}^0=\frac{\pi}{6}a^4$$

よって，$V_1=V_2$ とすると $\quad \dfrac{\pi}{30}a^5=\dfrac{\pi}{6}a^4$

$a>0$ から $\quad a=5$

別解 $x_1=\dfrac{1}{2}(a+\sqrt{a^2+4y})$, $\quad x_2=\dfrac{1}{2}(a-\sqrt{a^2+4y})$ とすると

$$V_2=\pi\int_{-\frac{a^2}{4}}^0 x_1^2dy-\pi\int_{-\frac{a^2}{4}}^0 x_2^2dy$$

ここで，$dy=(2x-a)dx$ であるから

$$V_2=\pi\int_{\frac{a}{2}}^a x^2(2x-a)dx-\pi\int_{\frac{a}{2}}^0 x^2(2x-a)dx$$

$$=\pi\int_0^a x^2(2x-a)dx=\pi\int_0^a(2x^3-ax^2)dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{a}{3}x^3\right]_0^a=\frac{\pi}{6}a^4$$

以下略。

y	$-\dfrac{a^2}{4}\ \to\ 0$
x_1	$\dfrac{a}{2}\ \to\ a$
x_2	$\dfrac{a}{2}\ \to\ 0$

$\boxed{15}$ xy 平面上の $x\geqq 0$ の範囲で，直線 $y=x$ と曲線 $y=x^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ により囲まれる部分を D とする。D を直線 $y=x$ の周りに回転してできる回転体の体積を V_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1) V_n を求めよ。 (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ。

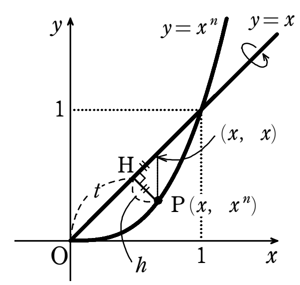
解答 (1) $\dfrac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$ (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$

解説

(1) 右の図のように，曲線 $y=x^n$ 上の点 P$(x,\ x^n)$ $(0\leqq x\leqq 1)$ から直線 $y=x$ に垂線 PH を引き，

PH$=h$, OH$=t$ $(0\leqq t\leqq\sqrt{2})$

とする。このとき



$$h=\frac{|x-x^n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}$$

$$t=\sqrt{2}x-h=\sqrt{2}x-\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}=\frac{x+x^n}{\sqrt{2}}$$

ゆえに $\quad dt=\dfrac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}}dx$

t と x の対応は右のようになる。

t	$0\ \to\ \sqrt{2}$
x	$0\ \to\ 1$

よって，求める体積 V_n は

$$V_n=\pi\int_0^{\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_0^1\frac{(x-x^n)^2}{2}\cdot\frac{1+nx^{n-1}}{\sqrt{2}}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x^2-2x^{n+1}+x^{2n})(1+nx^{n-1})dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\{x^2+(n-2)x^{n+1}+(1-2n)x^{2n}+nx^{3n-1}\}dx$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{n-2}{n+2}x^{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}x^{2n+1}+\frac{x^{3n}}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{3}+\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}+\frac{1}{3}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{2}{3}-\frac{6n}{(n+2)(2n+1)}\right\}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{4n^2-8n+4}{3(n+2)(2n+1)}=\frac{\sqrt{2}(n-1)^2}{3(n+2)(2n+1)}\pi$$

(2)　(1) の ① を用いて

$$\lim_{n\to\infty}V_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}+\frac{n-2}{n+2}+\frac{1-2n}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}+\frac{1-\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\frac{\frac{1}{n}-2}{2+\frac{1}{n}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}+1-1\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$$

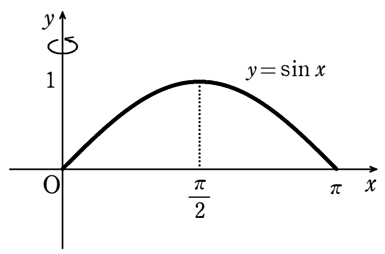
16　$f(x)=\sin x$ とする。$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq\pi$ の部分と x 軸とで囲まれた図形を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

解答　$2\pi^2$

解説

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x\cdot\sin x\cdot dx=2\pi\Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi}+2\pi\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=2\pi(\pi-0)+2\pi\times 0=2\pi^2$$



17　xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2}\right)$ を考える。u が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1)　点 $(u,\ 0,\ 0)$ $(0\leqq u\leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。

(2)　曲面 S を x 軸の周りに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

解答　(1)　$u\sqrt{1-u^2}$　　(2)　$\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$

解説

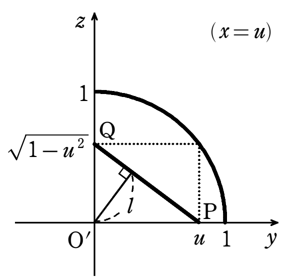
(1)　平面 $x=u$ で考えると，右の図のようになる。

点 $\mathrm{O}'(u,\ 0,\ 0)$ から線分 PQ までの距離を l とし，

$\triangle\mathrm{PQO}'$ の面積を考えると，$\mathrm{PQ}=1$ から

$$\frac{1}{2}\cdot l\cdot 1=\frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2}$$

よって　　$l=u\sqrt{1-u^2}$



(2)　曲面 S の平面 $x=u$ での切り口を考える。

$\mathrm{O}'\mathrm{Q}$ と $\mathrm{O}'\mathrm{P}$ の大小により断面積が異なる。

$\mathrm{O}'\mathrm{P}=\mathrm{O}'\mathrm{Q}$ すなわち $u=\sqrt{1-u^2}$ のとき　　$u=\frac{1}{\sqrt{2}}$

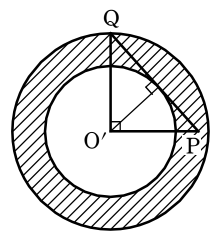
[1]　$\mathrm{O}'\mathrm{P}\leqq\mathrm{O}'\mathrm{Q}$ すなわち $0\leqq u\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

断面積は　　$\pi\{(\mathrm{O}'\mathrm{Q})^2-l^2\}=\pi\left\{\left(\sqrt{1-u^2}\right)^2-\left(u\sqrt{1-u^2}\right)^2\right\}=\pi(u^4-2u^2+1)$

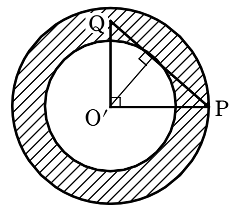
[2]　$\mathrm{O}'\mathrm{P}\geqq\mathrm{O}'\mathrm{Q}$ すなわち $\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq u\leqq 1$ のとき

断面積は　　$\pi\{(\mathrm{O}'\mathrm{P})^2-l^2\}=\pi\left\{u^2-\left(u\sqrt{1-u^2}\right)^2\right\}=\pi u^4$

[1]



[2]



[1]，[2] から，求める体積 V は

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(u^4-2u^2+1)du+\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 u^4du\ =\pi\left[\frac{u^5}{5}-\frac{2}{3}u^3+u\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{u^5}{5}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1$$

$$=\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{40}-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi\left(\frac{1}{5}-\frac{\sqrt{2}}{40}\right)=\left(\frac{1}{5}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\pi$$