数学演習(定積分の応用)Ｈ２４．７．３１　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=\sin^2 x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ は $f(x)=x+2\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt$ を満たすとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ $f(x)=\int_0^{x}(1-t^2)e^t\,dt$ の極値を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $F(x)=\displaystyle\int_{-x}^{x}\frac{\cos t}{1+e^t}dt$ について

(1) 導関数 $F'(x)$ を求めよ。 (2) $F(x)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 連続関数 $f(x)$ に対して $F(x)=-\dfrac{x}{2}+\displaystyle\int_x^0 tf(x-t)\,dt$ とおく。

また，$F''(x)=\cos x$ とする。

(1) $f(x)$，$F(x)$ を求めよ。

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\frac{k\pi}{4n}$$

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$\boxed{8}$ (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(4n)}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ 関数 $g(x)=\displaystyle\int_1^e|\log t-x|\,dt$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{10}$ $0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とし，$S(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-a|\sin x\,dx$ とおく。$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{11}$ a，b を実数とする。a，b の値を変化させたときの積分 $\displaystyle\int_0^1\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2dx$ の最小値，およびそのときの a，b の値を求めよ。

$\boxed{12}$ 関数 $f(x)$ は，$f(0)=0$ を満たすものとし，また，$g(x)=\displaystyle\int_0^x(e^x+e^t)f'(t)\,dt$ とおく。

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を計算せよ。

(2) $e^xf(x)=-3x^2e^x+g(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{13}$ 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して $f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$ を満たす。

(1) $f(0)$ の値を求め，更に，$f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\{e^x f(x)\}'=2xe^x$ を示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{14}$ (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，$1+x^2 \leqq \dfrac{1}{1-x^2} \leqq 1+\dfrac{9}{8}x^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 定積分を利用して，$\dfrac{56}{81} \leqq \log 2 \leqq \dfrac{25}{36}$ を示せ。

$\boxed{15}$ (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を求めよ。

(2) 不等式 $\dfrac{\pi}{4} < \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^4}\,dx < 1$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{16}$ (1)　$k>0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ が成り立つことを示せ。

(2)　不等式 $\log_e(n+1)<\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$ が成り立つことを示せ。

(3)　無限級数 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots$ の収束，発散を調べ，収束するときは和を求めよ。

$\boxed{17}$ 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。n を正の整数とし，

$\displaystyle a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{18}$ m，n を正の整数とする。定積分 $I(m,\ n)=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ に関して

(1)　$I(m,\ 1)$ を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$I(m,\ n)$ を $I(m+1,\ n-1)$ を用いて表せ。

(3)　$I(m,\ n)$ を m と n を用いて表せ。

$\boxed{19}$ (1)　$f(x)=e^{-x}\sin x$，$g(x)=e^{-x}\cos x$ とおくとき，導関数 $f'(x)$，$g'(x)$ を求めよ。

(2)　自然数 k に対して，$I_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\sin x\,dx$，$J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ とおくとき，(1)の結果を用いて I_k+J_k，I_k-J_k を求めよ。

(3)　自然数 n に対して，$S_n=\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin x|\,dx$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。

1 実数全体で定義された連続関数 $f(x)$ が等式 $f(x)=\sin^2 x+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=\sin^2 x+\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}$

解説

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=k$ (k は定数) とおくと　$f(x)=\sin^2 x+k$

ゆえに　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+k)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)+k\right\}dt$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)+kt\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$$

よって，$k=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$ から　$k=\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}$

したがって　$f(x)=\sin^2 x+\dfrac{\pi}{2(2-\pi)}$

2 関数 $f(x)$ は $f(x)=x+2\int_0^{\pi} f(t)\sin(x-t)\,dt$ を満たすとする。
このとき，$f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=x-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

解説

$$f(x)=x+2\int_0^{\pi} f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$$
$$=x+2\sin x\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt-2\cos x\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt$$

$2\int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt=A$，$-2\int_0^{\pi} f(t)\sin t\,dt=B$ (A，B は定数) とおくと，$f(x)$ は
$f(x)=x+A\sin x+B\cos x$ と表される。

よって　$A=2\int_0^{\pi}(t+A\sin t+B\cos t)\cos t\,dt$

$$=2\int_0^{\pi}(t\cos t+A\sin t\cos t+B\cos^2 t)\,dt$$

ここで　$\int_0^{\pi} t\cos t\,dt=\Big[t\sin t\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t\,dt=0+\Big[\cos t\Big]_0^{\pi}=-2$

$\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2t\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}=0$

$\int_0^{\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1+\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

であるから　$A=2\left(-2+\dfrac{\pi}{2}B\right)$　　ゆえに　$A-\pi B=-4$ …… ①

また　$B=-2\int_0^{\pi}(t+A\sin t+B\cos t)\sin t\,dt$

$$=-2\int_0^{\pi}(t\sin t+A\sin^2 t+B\sin t\cos t)\,dt$$

ここで　$\int_0^{\pi} t\sin t\,dt=\Big[-t\cos t\Big]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\,dt=\pi+\Big[\sin t\Big]_0^{\pi}=\pi$

$\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

であるから　$B=-2\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}A\right)$　　ゆえに　$\pi A+B=-2\pi$ …… ②

①，② を解くと　$A=-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}$，$B=\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}$

よって　$f(x)=x-\dfrac{2(\pi^2+2)}{\pi^2+1}\sin x+\dfrac{2\pi}{\pi^2+1}\cos x$

3 $f(x)=\int_0^x(1-t^2)e^t\,dt$ の極値を求めよ。

解答　$x=-1$ のとき極小値　$1-\dfrac{4}{e}$，$x=1$ のとき極大値　1

解説

$f'(x)=(1-x^2)e^x$ であるから　$f'(x)=0$ のとき　$x=\pm 1$
ゆえに，増減表は次のようになる。

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

また　$f(x)=\Big[(1-t^2)e^t\Big]_0^x+2\int_0^x te^t\,dt$

$$=(1-x^2)e^x-1+2\Big[te^t\Big]_0^x-2\int_0^x e^t\,dt$$
$$=(-1+2x-x^2)e^x+1$$

よって，$x=-1$ のとき極小値　$f(-1)=1-\dfrac{4}{e}$，

$x=1$ のとき　極大値　$f(1)=1$　をとる。

4 関数 $F(x)=\int_{-x}^{x}\dfrac{\cos t}{1+e^t}\,dt$ について

(1) 導関数 $F'(x)$ を求めよ。　　(2) $F(x)$ を求めよ。

解答　(1) $F'(x)=\cos x$　　(2) $F(x)=\sin x$

解説

(1) $F(x)=\int_{-x}^{x}\dfrac{\cos t}{1+e^t}\,dt=\int_0^x\dfrac{\cos t}{1+e^t}\,dt-\int_0^{-x}\dfrac{\cos t}{1+e^t}\,dt$

よって　$F'(x)=\dfrac{\cos x}{1+e^x}-\dfrac{\cos(-x)}{1+e^{-x}}\cdot(-1)=\cos x\cdot\left(\dfrac{1}{1+e^x}+\dfrac{e^x}{e^x+1}\right)=\cos x$

(2) $F'(x)=\cos x$ から　$F(x)=\int\cos x\,dx=\sin x+C$ (C は積分定数)

また，$F(0)=0$ であるから　$C=0$

したがって　$F(x)=\sin x$

5 連続関数 $f(x)$ に対して $F(x)=-\dfrac{x}{2}+\int_x^0 tf(x-t)\,dt$ とおく。
また，$F''(x)=\cos x$ とする。

(1) $f(x)$，$F(x)$ を求めよ。

(2) $-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$F(x)$ の最大値，最小値を求めよ。

解答　(1) $f(x)=-\cos x$，$F(x)=-\cos x-\dfrac{x}{2}+1$

(2) $x=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{4}+1$，$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}+1$

解説

(1) $x-t=u$ とおくと　$t=x-u$

よって　$dt=-du$

t	$x\to 0$
u	$0\to x$

ゆえに　$F(x)=-\dfrac{x}{2}+\int_0^x(x-u)f(u)\cdot(-1)\,du$

$$=-\frac{x}{2}+\int_0^x uf(u)\,du-x\int_0^x f(u)\,du$$

よって　$F'(x)=-\dfrac{1}{2}+xf(x)-\int_0^x f(u)\,du-xf(x)=-\int_0^x f(u)\,du-\dfrac{1}{2}$　…… ①

$F''(x)=-f(x)$

$F''(x)=\cos x$ であるから　$f(x)=-\cos x$

よって，① から　$F'(x)=\int_0^x\cos u\,du-\dfrac{1}{2}=\sin x-\dfrac{1}{2}$

ゆえに　$F(x)=-\cos x-\dfrac{x}{2}+C$　(C は積分定数)

ここで，$F(0)=0$ であるから，$-1+C=0$ より　$C=1$

したがって　$F(x)=-\cos x-\dfrac{x}{2}+1$

(2) (1) から，$F'(x)=0$ とすると　$\sin x=\dfrac{1}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$x=\dfrac{\pi}{6}$

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $F(x)$ の増減表は右のようになる。

x	$-\frac{\pi}{2}$	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
$F(x)$		↘	極小	↗	

ここで　$F\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}+1$，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{4}+1$

よって，$F(x)$ は　$x=-\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{4}+1$，

$x=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最小値 $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{12}+1$　をとる。

6 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\frac{k\pi}{4n}$$

解答　$\dfrac{\pi+2}{2\pi}$

解説

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos^2\frac{k\pi}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\cos^2\frac{\pi}{4}x\,dx=\int_0^1\frac{1+\cos\frac{\pi}{2}x}{2}\,dx$$

$$=\left[\frac{x}{2}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\pi}\right]_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}=\frac{\pi+2}{2\pi}$$

7 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

解答　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

$$(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right\}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$x=\tan\theta$ とおくと，$dx=\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であるから

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$(\text{与式})=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

8 (1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(4n)}$ を求めよ。

解答 (1) $4\log\frac{4}{3}-1$ (2) $\frac{256}{27e}$

解説

(1) $(\text{与式})=\displaystyle\int_0^1\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx=\int_0^1\left\{3\left(1+\frac{x}{3}\right)\right\}'\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\left[(3+x)\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\right]_0^1-\int_0^1dx=4\log\frac{4}{3}-1$$

(2) $a_n=\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(4n)}$ とおくと

$$a_n=3\sqrt[n]{\frac{3n+1}{3n}\cdot\frac{3n+2}{3n}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3n+n}{3n}}$$

$$\log a_n=\log 3+\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}$$

$=\log 3+\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=\log 3+4\log\frac{4}{3}-1=\log\left(3\cdot\frac{4^4}{3^4}\cdot\frac{1}{e}\right)=\log\frac{256}{27e}$$

$y=\log x$ は単調に増加するから $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{256}{27e}$

9 関数 $g(x)=\displaystyle\int_1^e|\log t-x|dt$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答 $x=\log\frac{e+1}{2}$ のとき最小値 $e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}$

解説

$t\geqq e^x$ のとき $|\log t-x|=\log t-x$，$t\leqq e^x$ のとき $|\log t-x|=x-\log t$

また $0\leqq x\leqq 1$ から $1\leqq e^x\leqq e$

ゆえに $g(x)=\displaystyle\int_1^{e^x}(x-\log t)dt+\int_{e^x}^{e}(\log t-x)dt$

$$=\Big[xt-t\log t+t\Big]_1^{e^x}+\Big[t\log t-t-xt\Big]_{e^x}^{e}$$

$$=2e^x-(e+1)x-1$$

$g'(x)=2e^x-(e+1)$ $g'(x)=0$ とすると $x=\log\frac{e+1}{2}$

よって，右の増減表を得る。

x	0	$\cdots$	$\log\frac{e+1}{2}$	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘	極小	↗	

$g\left(\log\frac{e+1}{2}\right)$

$=2\cdot\frac{e+1}{2}-(e+1)\log\frac{e+1}{2}-1$

$=e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}$

ゆえに，$g(x)$ は $x=\log\frac{e+1}{2}$ のとき最小値 $e-(e+1)\log\frac{e+1}{2}$ をとる。

10 $0<a<\frac{\pi}{2}$ とし，$S(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|x-a|\sin x\,dx$ とおく。$S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

解答 $a=\frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$

解説

$0<a<\frac{\pi}{2}$ であるから，

$0\leqq x\leqq a$ のとき $|x-a|=-(x-a)$

$a\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $|x-a|=x-a$

よって $S(a)=-\displaystyle\int_0^a(x-a)\sin x\,dx+\int_a^{\frac{\pi}{2}}(x-a)\sin x\,dx$

$$=\Big[(x-a)\cos x\Big]_0^a-\int_0^a\cos x\,dx-\Big[(x-a)\cos x\Big]_a^{\frac{\pi}{2}}+\int_a^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$$

$$=a-\Big[\sin x\Big]_0^a+\Big[\sin x\Big]_a^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=a-\sin a+1-\sin a=a+1-2\sin a$$

$S'(a)=1-2\cos a$

$S'(a)=0$ とすると，

$0<a<\frac{\pi}{2}$ であるから $a=\frac{\pi}{3}$

よって，$a=\frac{\pi}{3}$ のとき

a	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

$S(a)$ は極小かつ最小となり，最小値 $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$ をとる。

11 a，b を実数とする。a，b の値を変化させたときの積分 $\displaystyle\int_0^1\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2dx$ の最小値，およびそのときの a，b の値を求めよ。

解答 $a=-\frac{24}{\pi^2}$，$b=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小値 $-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$

解説

$\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2=\cos^2\pi x+(ax+b)^2-2(ax+b)\cos\pi x$

$$=\frac{1}{2}\cos 2\pi x+a^2x^2+2abx+b^2+\frac{1}{2}-2(ax+b)\cos\pi x$$

ここで $\displaystyle\int_0^1\cos 2\pi x\,dx=\left[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^1=0$，

$\displaystyle\int_0^1\left(a^2x^2+2abx+b^2+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{a^2}{3}+ab+b^2+\frac{1}{2}$，

$\displaystyle-2\int_0^1(ax+b)\cos\pi x\,dx=-2\left[(ax+b)\frac{\sin\pi x}{\pi}\right]_0^1+2\int_0^1\frac{a}{\pi}\sin\pi x\,dx$

$$=\frac{2a}{\pi}\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1=\frac{4a}{\pi^2}$$

ゆえに $\displaystyle\int_0^1\{\cos\pi x-(ax+b)\}^2dx=b^2+ab+\frac{a^2}{3}+\frac{4a}{\pi^2}+\frac{1}{2}$

$$=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(a^2+\frac{48}{\pi^2}a\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2+\frac{1}{12}\left(a+\frac{24}{\pi^2}\right)^2-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$$

よって，$a=-\frac{24}{\pi^2}$，$b=\frac{12}{\pi^2}$ のとき最小値 $-\frac{48}{\pi^4}+\frac{1}{2}$ をとる。

12 関数 $f(x)$ は，$f(0)=0$ を満たすものとし，また，$g(x)=\displaystyle\int_0^x(e^x+e^t)f'(t)dt$ とおく。

(1) $g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を計算せよ。

(2) $e^xf(x)=-3x^2e^x+g(x)$ が成り立つとき，$f(x)$ を求めよ。

解答 (1) $g'(x)=e^xf(x)+2e^xf'(x)$ (2) $f(x)=x^3+3x^2$

解説

(1) $g(x)=e^x\displaystyle\int_0^xf'(t)dt+\int_0^xe^tf'(t)dt$ であるから

$$g'(x)=e^x\int_0^xf'(t)dt+e^xf'(x)+e^xf'(x)=e^x\{f(x)-f(0)\}+2e^xf'(x)$$

$$=e^xf(x)+2e^xf'(x)$$

(2) $e^xf(x)=-3x^2e^x+g(x)$ の両辺を微分して

$e^xf(x)+e^xf'(x)=-(3x^2+6x)e^x+e^xf(x)+2e^xf'(x)$ を得る。

これより $e^xf'(x)=(3x^2+6x)e^x$ であるから $f'(x)=3x^2+6x$

よって $f(x)=\displaystyle\int(3x^2+6x)dx=x^3+3x^2+C$ （C は積分定数）

ここで，条件 $f(0)=0$ から $C=0$ よって $f(x)=x^3+3x^2$

13 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して $f(x)=x^2-\displaystyle\int_0^x(x-t)f'(t)dt$ を満たす。

(1) $f(0)$ の値を求め，更に，$f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\{e^xf(x)\}'=2xe^x$ を示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

解答 (1) $f(0)=0$，証明略 (2) 略 (3) $f(x)=2(x-1+e^{-x})$

解説

(1) 与えられた等式から $f(x)=x^2-x\displaystyle\int_0^xf'(t)dt+\int_0^xtf'(t)dt$ …… ①

① の両辺に $x=0$ を代入すると $f(0)=0^2-0\cdot\displaystyle\int_0^0f'(t)dt+\int_0^0tf'(t)dt=0$

また，① の両辺を x について微分すると

$$f'(x)=2x-\int_0^xf'(t)dt-xf'(x)+xf'(x)$$

$$=2x-\int_0^xf'(t)dt=2x-\Big[f(t)\Big]_0^x=2x-f(x)+f(0)$$

$f(0)=0$ であるから，$f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つ。

(2) $\{e^xf(x)\}'=e^xf(x)+e^xf'(x)=e^x\{f(x)+f'(x)\}$

(1) より，$f'(x)=2x-f(x)$ であるから $\{e^xf(x)\}'=e^x\{f(x)+2x-f(x)\}=2xe^x$

(3) $e^xf(x)=\displaystyle\int\{e^xf(x)\}'dx=\int 2xe^xdx=2xe^x-\int 2e^xdx$

$=2xe^x-2e^x+C=2(x-1)e^x+C$ （C は積分定数）

$x=0$ を代入すると $e^0f(0)=2(0-1)e^0+C$

すなわち $f(0)=-2+C$ $f(0)=0$ であるから $C=2$

よって $e^xf(x)=2(x-1)e^x+2$

したがって $f(x)=2(x-1+e^{-x})$

14 (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq \frac{1}{3}$ のとき，$1+x^2\leqq \dfrac{1}{1-x^2}\leqq 1+\dfrac{9}{8}x^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 定積分を利用して，$\dfrac{56}{81}\leqq \log 2\leqq \dfrac{25}{36}$ を示せ。

解答 (1) $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|+C$（$C$ は積分定数） (2) 略 (3) 略

解説

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$ （C は積分定数）

(2) $0\leqq x\leqq \frac{1}{3}$ のとき，$1-x^2>0$ であるから $(1+x^2)(1-x^2)\leqq 1\leqq\left(1+\dfrac{9}{8}x^2\right)(1-x^2)$ を示せばよい。

$x\geqq 0$ であるから $(1+x^2)(1-x^2)=1-x^4\leqq 1$

また $\left(1+\dfrac{9}{8}x^2\right)(1-x^2)-1=\dfrac{x^2}{8}(1-3x)(1+3x)\geqq 0$

よって $1+x^2\leqq\dfrac{1}{1-x^2}\leqq 1+\dfrac{9}{8}x^2$

(3) (2) から $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}(1+x^2)dx\leqq\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{1-x^2}\leqq\int_0^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{9}{8}x^2\right)dx$

ゆえに $\dfrac{28}{81}\leqq\dfrac{1}{2}\log 2\leqq\dfrac{25}{72}$ よって $\dfrac{56}{81}\leqq\log 2\leqq\dfrac{25}{36}$

15 (1) 定積分 $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$ を求めよ。

(2) 不等式 $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<1$ が成り立つことを示せ。

解答 (1) $\dfrac{\pi}{4}$ (2) 略

解説

(1) $x=\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0 \longrightarrow 1$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{4}$

よって $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$1\leqq 1+x^4\leqq 1+x^2$ が成り立つ。

ゆえに $\dfrac{1}{1+x^2}\leqq\dfrac{1}{1+x^4}\leqq 1$

よって $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<\int_0^1 dx$

$\displaystyle\int_0^1 dx=\Big[x\Big]_0^1=1$ であるから $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{1}{1+x^4}dx<1$

16 (1) $k>0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$ が成り立つことを示せ。

(2) 不等式 $\log_e(n+1)<\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$ が成り立つことを示せ。

(3) 無限級数 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots$ の収束，発散を調べ，収束するときは和を求めよ。

解答 (1) 略 (2) 略 (3) 正の無限大に発散

解説

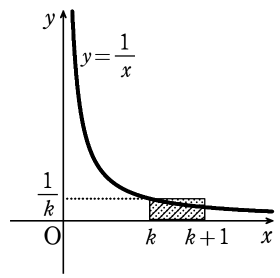
(1) $k\leqq x\leqq k+1$ $(k>0)$ のとき $\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{k}$

ただし，等号が成り立つのは $x=k$ のときだけである。

ゆえに $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx$

この式で $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k}dx=\left[\frac{x}{k}\right]_k^{k+1}=\frac{1}{k}$

したがって $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{k}$



(2) (1) で示した不等式において，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ とおき，辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log_e x\Big]_1^{n+1}=\log_e(n+1)$

したがって $\log_e(n+1)<\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log_e(n+1)=+\infty$ であるから，(2) で示した不等式により

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\right)=+\infty$$

よって，級数 $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots$ は正の無限大に発散する。

17 実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。n を正の整数とし，$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

解答 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$

解説

実数 x に対して $x-1<[x]\leqq x$ が成り立つから

$$\sqrt{2n^2-k^2}-1<[\sqrt{2n^2-k^2}]\leqq\sqrt{2n^2-k^2}$$

各辺を n^2 で割ると

$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}\leqq\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\sum_{k=1}^{n}\frac{[\sqrt{2n^2-k^2}]}{n^2}=a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$

ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{n}{n^2}\right\}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

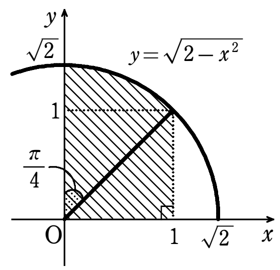
同様に $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$

はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$

この定積分は右の図の斜線部分の面積を表すから

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi(\sqrt{2})^2}{8}+\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$



18 $m,\ n$ を正の整数とする。定積分 $I(m,\ n)=\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n dx$ に関して

(1) $I(m,\ 1)$ を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，$I(m,\ n)$ を $I(m+1,\ n-1)$ を用いて表せ。

(3) $I(m,\ n)$ を m と n を用いて表せ。

解答 (1) $\dfrac{1}{(m+1)(m+2)}$ (2) $I(m,\ n)=\dfrac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$

(3) $\dfrac{m!n!}{(m+n+1)!}$

解説

(1) $\displaystyle I(m,\ 1)=\int_0^1 x^m(1-x)dx=\int_0^1(x^m-x^{m+1})dx=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}-\frac{1}{m+2}x^{m+2}\right]_0^1$

$\displaystyle=\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}$

(2) $\displaystyle I(m,\ n)=\int_0^1 x^m(1-x)^n dx=\left[\frac{1}{m+1}x^{m+1}(1-x)^n\right]_0^1+\int_0^1\frac{x^{m+1}}{m+1}\cdot n(1-x)^{n-1}dx$

$\displaystyle=\frac{n}{m+1}I(m+1,\ n-1)$

(3) (2) から，$n\geqq 2$ のとき

$\displaystyle I(m,\ n)=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{2}{m+n-1}I(m+n-1,\ 1)$

$\displaystyle=\frac{m!n!}{(m+n-1)!}\cdot\frac{1}{\{(m+n-1)+1\}\{(m+n-1)+2\}}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$

これは $n=1$ のときも成り立つ。

19 (1) $f(x)=e^{-x}\sin x,\ g(x)=e^{-x}\cos x$ とおくとき，導関数 $f'(x),\ g'(x)$ を求めよ。

(2) 自然数 k に対して，$I_k=\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x\,dx,\ J_k=\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\cos x\,dx$ とおくとき，(1) の結果を用いて $I_k+J_k,\ I_k-J_k$ を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$S_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-x}|\sin x|dx$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ。

解答 (1) $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x,\ g'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

(2) $I_k+J_k=-(-e^{-\pi})^k(1+e^\pi),\ I_k-J_k=0$ (3) $\dfrac{e^\pi+1}{2(e^\pi-1)}$

解説

(1) $f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$ …… ①

$g'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$ …… ②

(2) ① から $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}f'(x)dx=-\left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x\,dx-\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\cos x\,dx\right)$

よって $f(k\pi)-f((k-1)\pi)=-(I_k-J_k)$

ゆえに $I_k-J_k=-e^{-k\pi}\sin k\pi+e^{-(k-1)\pi}\sin(k-1)\pi=0$

② から $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}g'(x)dx=-\left(\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\cos x\,dx+\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}\sin x\,dx\right)$

よって $g(k\pi)-g((k-1)\pi)=-(I_k+J_k)$

ゆえに $I_k+J_k=-e^{-k\pi}\cos k\pi+e^{-(k-1)\pi}\cos(k-1)\pi$

$=-(-1)^k e^{-k\pi}+(-1)^{k-1}e^{-k\pi+\pi}$

$=-(-e^{-\pi})^k(1+e^\pi)$

(3) (2) から $I_k=-\dfrac{1}{2}(-e^{-\pi})^k(1+e^\pi)$

よって $\displaystyle S_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}e^{-x}|\sin x|dx=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(e^{-\pi})^k(1+e^{\pi}) = \frac{\frac{1}{2}e^{-\pi}(1+e^{\pi})\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}}$$

$$= \frac{(e^{\pi}+1)\{1-(e^{-\pi})^n\}}{2(e^{\pi}-1)}$$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}$