数学演習（体積）Ｈ２４．６．２８　　　　　　　　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．底からの高さが x cm の平面で切った切り口が，半径 $\sqrt[3]{x}$ cm の円である容器がある。この容器の底から 8 cm までの部分の体積 V を求めよ。

2．$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=ax^2$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2)　放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=a^3$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ。

(3)　V_1 と V_2 が等しくなるとき，定数 a の値を求めよ。

3．次の曲線と直線で囲まれた部分を，[　] 内の直線の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$，$y=0$　　[x 軸]

(2)　$y=2\sqrt{x-1}$，$x=2$，$y=0$　　[x 軸]

(3)　$y=e^x+1$，$x=0$，$x=1$，$y=0$　　[x 軸]

(4)　$y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$，$y=0$　　[x 軸]

(5)　$y=x\sqrt{x}$，$y=1$，$y=2$，$x=0$　　[y 軸]

(6)　$y=\log x$，$y=0$，$y=1$，$x=0$　　[y 軸]

4．1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とする高さが 2 の正三角柱を，底面の 1 辺を軸として 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

5．次の曲線や直線で囲まれた部分を，[　]内の直線の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=2-x^2$，$y=-7$　　[$y=-7$]

(2)　$y=2\cos x$ $\left(-\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3}\right)$，$y=1$　　[$y=1$]

6．次の曲線や直線で囲まれた部分を，[　]内の直線の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=\log x$，$x=0$，$y=0$，$y=-a$（a は正の定数）　　[x 軸]

(2)　$y=2\sin x+\cos 2x$，$x=0$，$x=\pi$，$y=0$　　[x 軸]

(3)　$y=\sqrt{x}\cos x$，$y=\sqrt{x}\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$　　[x 軸]

(4)　$y=x^2-4x+3$，$y=3$　　[y 軸]

7．次の曲線や直線で囲まれた部分を，[　]内の直線の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=2-x^2$，$y=-x$　　[x 軸]

(2)　$y=\sin x$，$y=\cos x$ $\left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$　　[x 軸]

数学演習（体積）Ｈ２４．６．２８　　　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　）

1．底からの高さが x cm の平面で切った切り口が，半径 $\sqrt[3]{x}$ cm の円である容器がある。この容器の底から 8 cm までの部分の体積 V を求めよ。

解答　$\frac{96}{5}\pi\ \mathrm{cm}^3$

解説

底からの高さが x cm の平面で切った切り口の面積は　$\pi\sqrt[3]{x^2}\ \mathrm{cm}^2$

したがって　$V=\int_0^8 \pi\sqrt[3]{x^2}\,dx=\pi\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_0^8=\frac{96}{5}\pi\,(\mathrm{cm}^3)$

2．$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　放物線 $y=ax^2$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_1 を求めよ。

(2)　放物線 $y=ax^2$ と直線 $y=a^3$ で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V_2 を求めよ。

(3)　V_1 と V_2 が等しくなるとき，定数 a の値を求めよ。

解答　(1)　$V_1=\frac{\pi}{5}a^7$　　(2)　$V_2=\frac{\pi}{2}a^5$　　(3)　$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

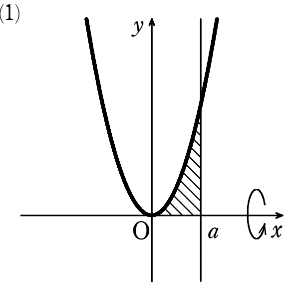
解説

(1)　$V_1=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^a(ax^2)^2dx=\pi a^2\int_0^a x^4dx=\pi a^2\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^a=\frac{\pi}{5}a^7$

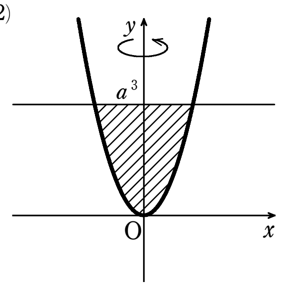
(2)　$y=ax^2$ から　$x^2=\frac{y}{a}$

$$V_2=\pi\int_0^{a^3}x^2dy=\frac{\pi}{a}\int_0^{a^3}y\,dy=\frac{\pi}{a}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{a^3}=\frac{\pi}{2}a^5$$

(1)



(2)



(3)　$V_1=V_2$ であるとき　$\frac{\pi}{5}a^7=\frac{\pi}{2}a^5$

よって　$\pi a^5(2a^2-5)=0$

$a>0$ であるから　$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

3．次の曲線と直線で囲まれた部分を，[　] 内の直線の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=x^2-4$，$y=0$　　[x 軸]
(2)　$y=2\sqrt{x-1}$，$x=2$，$y=0$　　[x 軸]
(3)　$y=e^x+1$，$x=0$，$x=1$，$y=0$　　[x 軸]
(4)　$y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$，$y=0$　　[x 軸]
(5)　$y=x\sqrt{x}$，$y=1$，$y=2$，$x=0$　　[y 軸]
(6)　$y=\log x$，$y=0$，$y=1$，$x=0$　　[y 軸]

解答　(1)　$\frac{512}{15}\pi$　　(2)　2π　　(3)　$\left(\frac{e^2}{2}+2e-\frac{3}{2}\right)\pi$　　(4)　$\frac{\pi^2}{2}$

(5)　$\frac{3(4\sqrt[3]{2}-1)}{7}\pi$　　(6)　$\frac{e^2-1}{2}\pi$

解説

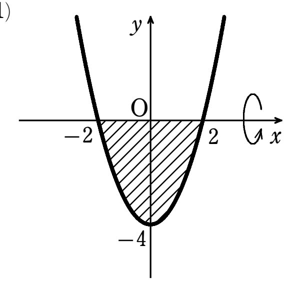
(1)　$x^2-4=0$ を解くと　$x=\pm2$

$$V=\pi\int_{-2}^2(x^2-4)^2dx=2\pi\int_0^2(x^4-8x^2+16)dx=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^2=\frac{512}{15}\pi$$

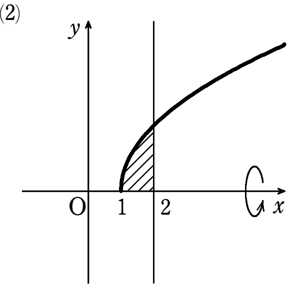
(2)　$2\sqrt{x-1}=0$ を解くと　$x=1$

$$V=\pi\int_1^2(2\sqrt{x-1})^2dx=4\pi\int_1^2(x-1)dx=4\pi\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=2\pi$$

(1)



(2)

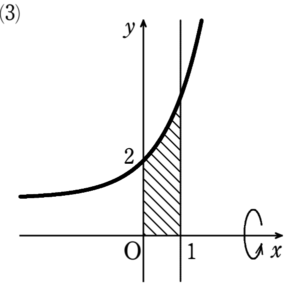


(3)　$V=\pi\int_0^1(e^x+1)^2dx=\pi\int_0^1(e^{2x}+2e^x+1)dx=\pi\left[\frac{e^{2x}}{2}+2e^x+x\right]_0^1$

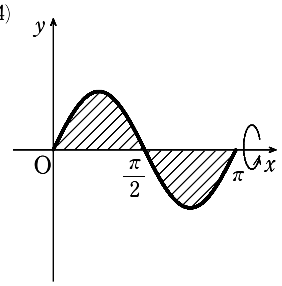
$$=\pi\left\{\left(\frac{e^2}{2}+2e+1\right)-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right\}=\left(\frac{e^2}{2}+2e-\frac{3}{2}\right)\pi$$

(4)　$V=\pi\int_0^\pi\sin^2 2x\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi(1-\cos 4x)dx=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi=\frac{\pi^2}{2}$

(3)



(4)



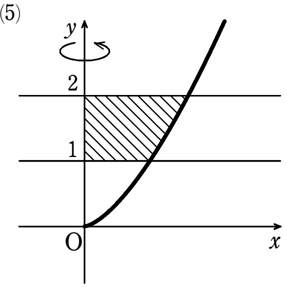
(5)　$y=x\sqrt{x}$ から　$x=y^{\frac{2}{3}}$

$$V=\pi\int_1^2\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^2dy=\pi\int_1^2 y^{\frac{4}{3}}dy=\pi\left[\frac{3}{7}y^{\frac{7}{3}}\right]_1^2=\frac{3(4\sqrt[3]{2}-1)}{7}\pi$$

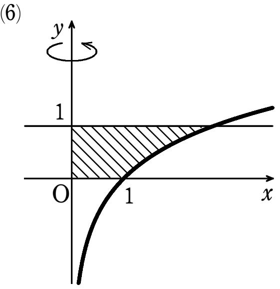
(6)　$y=\log x$ から　$x=e^y$

$$V=\pi\int_0^1(e^y)^2dy=\pi\int_0^1 e^{2y}dy=\pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^1=\frac{e^2-1}{2}\pi$$

(5)



(6)



4．1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とする高さが 2 の正三角柱を，底面の 1 辺を軸として 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

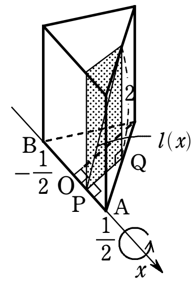
解答　$V=\frac{17}{4}\pi$

解説

右の図のように，底面の 1 辺 AB を x 軸に，辺 AB の中点を原点 O にとる。

題意の回転体を，座標が x である点 P を通り，x 軸に垂直な平面で切ったときの断面の半径を $l(x)$ とする。

このとき，図において，点Pから一番遠い場所にあるのはこの断面である長方形の対角線の端であるから



$$\mathrm{AP}=\frac{1}{2}-x,\quad \mathrm{PQ}=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

より，三平方の定理により

$$\{l(x)\}^2=\mathrm{PQ}^2+2^2=\left\{\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right\}+4$$

$$=3\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+4=3x^2-3x+\frac{19}{4}$$

よって　$V=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\{l(x)\}^2dx=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(3x^2-3x+\frac{19}{4}\right)dx$

$$=2\pi\left[x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{19}{4}x\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{17}{4}\pi$$

5．次の曲線や直線で囲まれた部分を，[　] 内の直線の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1)　$y=2-x^2$，$y=-7$　　[$y=-7$]
(2)　$y=2\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}\right)$，$y=1$　　[$y=1$]

解答　(1)　$\frac{1296}{5}\pi$　　(2)　$2\pi^2-3\sqrt{3}\pi$

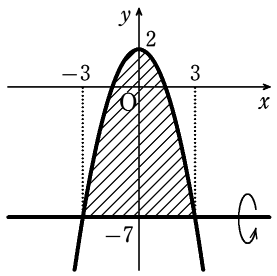
解説

(1)　$2-x^2=-7$ を解くと　$x=\pm3$

曲線 $y=2-x^2$ と直線 $y=-7$ を y 軸方向に 7 だけ平行移動すると，それぞれ

$y=9-x^2$，$y=0$ (x 軸)

に移る。



よって　$V=\pi\int_{-3}^3(9-x^2)^2dx$

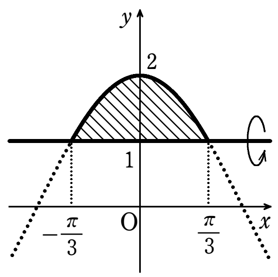
$$=\pi\int_{-3}^3(x^4-18x^2+81)dx$$

$$=2\pi\int_0^3(x^4-18x^2+81)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-6x^3+81x\right]_0^3=\frac{1296}{5}\pi$$

(2) $-\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ において，$2\cos x=1$ を解くと

$$x=-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}$$



曲線 $y=2\cos x$ と直線 $y=1$ を y 軸方向に -1 だけ平行移動すると，それぞれ

$y=2\cos x-1$，$y=0$（x 軸）

に移る。したがって

$$V=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x-1)^2dx$$

$$=\pi\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2x-4\cos x+1)dx=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2x-4\cos x+1)dx$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2x-4\cos x+3)dx=2\pi\Big[\sin 2x-4\sin x+3x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=2\pi^2-3\sqrt{3}\pi$$

6．次の曲線や直線で囲まれた部分を，[ ]内の直線の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=\log x$，$x=0$，$y=0$，$y=-a$（a は正の定数） [x 軸]

(2) $y=2\sin x+\cos 2x$，$x=0$，$x=\pi$，$y=0$ [x 軸]

(3) $y=\sqrt{x}\cos x$，$y=\sqrt{x}\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}\right)$ [x 軸]

(4) $y=x^2-4x+3$，$y=3$ [y 軸]

解答 (1) $2(1-ae^{-a}-e^{-a})\pi$ (2) $\frac{5}{2}\pi^2-\frac{8}{3}\pi$ (3) $\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{128}{3}\pi$

解説

(1) $\log x=-a$ とすると $x=e^{-a}$

$$V=\pi\int_0^{e^{-a}}(-a)^2dx+\pi\int_{e^{-a}}^1(\log x)^2dx=\pi a^2e^{-a}+\pi\int_{e^{-a}}^1(\log x)^2dx$$

ここで $\displaystyle\int_{e^{-a}}^1(\log x)^2dx=\Big[x(\log x)^2\Big]_{e^{-a}}^1-2\int_{e^{-a}}^1\log x\,dx$

$$=-a^2e^{-a}-2\Big[x\log x-x\Big]_{e^{-a}}^1$$

$$=-a^2e^{-a}+2-2ae^{-a}-2e^{-a}$$

したがって $V=\pi a^2e^{-a}+\pi(-a^2e^{-a}+2-2ae^{-a}-2e^{-a})$

$=2(1-ae^{-a}-e^{-a})\pi$

(2) $(2\sin x+\cos 2x)^2=4\sin^2x+4\sin x\cos 2x+\cos^2 2x$

$$=2(1-\cos 2x)+2(\sin 3x-\sin x)+\frac{1+\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{2}-2\sin x-2\cos 2x+2\sin 3x+\frac{\cos 4x}{2}$$

$0\leqq x\leqq\pi$ では，$2\sin x+\cos 2x=2\sin x+1-2\sin^2x$

$$=-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

で，$\sin x=0$のとき，$-2\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$の値は1になる。つまり

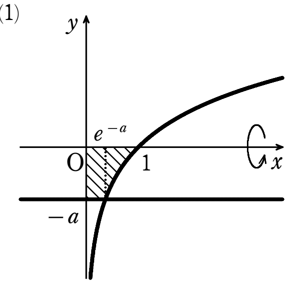
$2\sin x+\cos 2x\geqq 0$ であるから

$$V=\pi\int_0^{\pi}(2\sin x+\cos 2x)^2dx$$

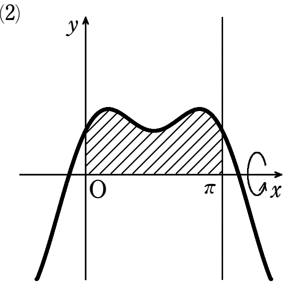
$$=\pi\left[\frac{5}{2}x+2\cos x-\sin 2x-\frac{2}{3}\cos 3x+\frac{\sin 4x}{8}\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi\left(\frac{5}{2}\pi-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\right)=\frac{5}{2}\pi^2-\frac{8}{3}\pi$$

(1)



(2)



(3) $\sqrt{x}\cos x=\sqrt{x}\sin x$ とすると $\sqrt{x}(\cos x-\sin x)=0$

ゆえに $\sqrt{2x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ であるから $x=0,\ \frac{\pi}{4}$

この範囲では，$\cos x\geqq\sin x$ より$\sqrt{x}\cos x\geqq\sqrt{x}\sin x\geqq 0$ であるから，求める体積は

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{x}\cos x)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sqrt{x}\sin x)^2dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos^2x\,dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sin^2x\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x(\cos^2x-\sin^2x)dx$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos 2x\,dx=\pi\left[x\cdot\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin 2x}{2}dx$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\pi\left[\frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}$$

(4) $y=(x-2)^2-1$ から $y+1=(x-2)^2$

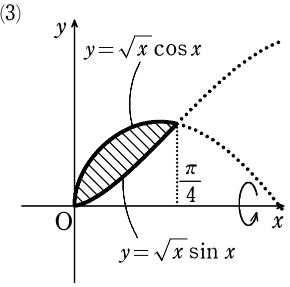
ゆえに $x=\pm\sqrt{y+1}+2$

よって $\displaystyle V=\pi\int_{-1}^3(\sqrt{y+1}+2)^2dy-\pi\int_{-1}^3(-\sqrt{y+1}+2)^2dy$

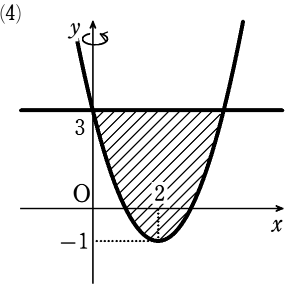
$$=\pi\int_{-1}^3(y+4\sqrt{y+1}+5)dy-\pi\int_{-1}^3(y-4\sqrt{y+1}+5)dy$$

$$=8\pi\int_{-1}^3\sqrt{y+1}\,dy=8\pi\left[\frac{2}{3}(y+1)\sqrt{y+1}\right]_{-1}^3=\frac{128}{3}\pi$$

(3)



(4)



7．次の曲線や直線で囲まれた部分を，[ ]内の直線の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(1) $y=2-x^2$，$y=-x$ [x 軸]

(2) $y=\sin x$，$y=\cos x$ $\left(\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi\right)$ [x 軸]

解答 (1) $\frac{60+32\sqrt{2}}{15}\pi$ (2) $\frac{\pi(\pi+6)}{4}$

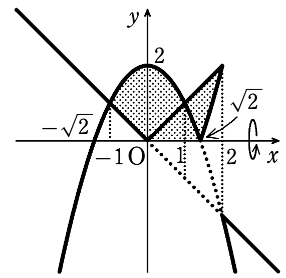
解説

(1) $2-x^2=-x$ を解くと $x=-1,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で 折り返して交点をもつ場合

つまり$2-x^2=x$ を解くと $x=1$

求める立体の体積は，図の網目の部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積に等しいから



$$V=\pi\int_{-1}^1(2-x^2)^2dx+\pi\int_1^2x^2dx$$

$$-\pi\int_{-1}^0(-x)^2dx-\pi\int_{\sqrt{2}}^2(x^2-2)^2dx$$

$$=2\pi\int_0^1(x^4-4x^2+4)dx+\pi\int_1^2x^2dx$$

$$-\pi\int_{-1}^0x^2dx-\pi\int_{\sqrt{2}}^2(x^4-4x^2+4)dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_0^1+\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_{\sqrt{2}}^2$$

$$=\frac{60+32\sqrt{2}}{15}\pi$$

(2) $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi$ の範囲で，x軸で折り返して

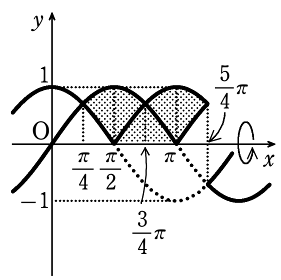
交点をもつ場合を考えるため

$\sin x=\cos x$ と$\sin x=-\cos x$を同時に考える。

つまり，両辺２乗して

$\sin^2x=\cos^2x$ を解くと

$$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi$$



求める立体の体積は，図の網目の部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積に等しく，網目の部分は，直線 $x=\frac{3}{4}\pi$ に関して対称である。

したがって

$$V=\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx\right)\times 2$$

$$=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx\right)$$

$$=\pi\left(\left[x-\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\pi(\pi+6)}{4}$$