数学演習（定積分のいろいろな問題）Ｈ２４．６．１　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　）

１．等式 $f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

２．次の関数を $x$ について微分せよ。

(1) $\int_1^x (x-t)\log t\,dt$　(2) $\int_1^{2x} \cos^2 t\,dt$

(3) $\int_x^{x^2} e^t \sin t\,dt$　(4) $\int_{-x}^x t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt$

３．次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 $a$ の値を求めよ。

(1) $\int_0^x f(t)\,dt=a\cos^2 x+ax+1$

(2) $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\sin x-ax$

４．等式 $x+\int_a^x (x-t)f(t)\,dt=e^x-1$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 $a$ の値を求めよ。

５．次の関数の最大値，最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(1) $f(x)=\int_0^x t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$　$(0\leqq x\leqq \pi)$

(2) $f(x)=\int_0^x (\cos t+\sin 2t)\,dt$　$\left(0\leqq x\leqq \frac{3}{2}\pi\right)$

6．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^4}{n^4}+\frac{2^4}{n^4}+\frac{3^4}{n^4}+\cdots\cdots+\frac{n^4}{n^4}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n^2-k^2}}{n^2}$

7．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}\log\frac{n+k}{n}$ を求めよ。

8．極限値 $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ を求めよ。

9．次の [A] を証明し，それを用いて不等式 [B] を証明せよ。

(1) [A] $1\leqq x\leqq 3$ のとき　$1\leqq 28-x^3\leqq 27$

[B] $\displaystyle 2<\int_1^3\sqrt[3]{28-x^3}\,dx<6$

(2) [A] $n>2$，$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$\displaystyle\frac{1}{1+x^2}\leqq\frac{1}{1+x^n}\leqq 1$

[B] $\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}<1$ $(n>2)$

1．等式 $f(x)=\sin x+3\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解答　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

解説

$a=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$ とおくと　$f(x)=\sin x+3a$

ゆえに　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+3a)\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin 2t}{2}+3a\cos t\right)dt$

$=\left[-\frac{\cos 2t}{4}+3a\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+3a$

よって　$a=\frac{1}{2}+3a$　これを解いて　$a=-\frac{1}{4}$

したがって　$f(x)=\sin x-\frac{3}{4}$

2．次の関数を $x$ について微分せよ。

(1) $\int_1^x (x-t)\log t\,dt$　(2) $\int_1^{2x}\cos^2 t\,dt$

(3) $\int_x^{x^2} e^t\sin t\,dt$　(4) $\int_{-x}^x t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt$

解答　(1) $x\log x-x+1$　(2) $2\cos^2 2x$　(3) $2xe^{x^2}\sin x^2-e^x\sin x$
(4) $\sqrt{2}\,x\sin x$

解説

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x(x-t)\log t\,dt=\frac{d}{dx}\left(x\int_1^x\log t\,dt-\int_1^x t\log t\,dt\right)$

$=\int_1^x\log t\,dt+x\log x-x\log x=\int_1^x(t)'\log t\,dt$

$=\left[t\log t\right]_1^x-\int_1^x t\cdot\frac{1}{t}\,dt=x\log x-\left[t\right]_1^x=x\log x-x+1$

(2) $\cos^2 t$ の不定積分の１つを $F(t)$ とする。

$\int_1^{2x}\cos^2 t\,dt=F(2x)-F(1)$，$F'(t)=\cos^2 t$

よって　$\frac{d}{dx}\int_1^{2x}\cos^2 t\,dt=2F'(2x)-0=2\cos^2 2x$

(3) $e^t\sin t$ の不定積分の１つを $F(t)$ とする。

$\int_x^{x^2}e^t\sin t\,dt=F(x^2)-F(x)$，$F'(t)=e^t\sin t$

よって　$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}e^t\sin t\,dt=2xF'(x^2)-F'(x)=2xe^{x^2}\sin x^2-e^x\sin x$

(4) $t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$ の不定積分の１つを $F(t)$ とする。

$\int_{-x}^x t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt=F(x)-F(-x)$，$F'(t)=t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)$

よって　$\frac{d}{dx}\int_{-x}^x t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt=F'(x)-F'(-x)\cdot(-1)$

$=x\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-x\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

$=x\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right\}$

$=-2x\sin\frac{\pi}{4}\sin(-x)=\sqrt{2}\,x\sin x$　（和積公式）

別解　$\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t+\sin t)$

ゆえに　$\int_{-x}^x t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-x}^x t(\sin t+\cos t)dt=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^x t\sin t\,dt$

（$x\sin x$は奇×奇なので偶関数，$x\cos x$は奇×偶なので奇関数）

よって　$\frac{d}{dx}\int_{-x}^x t\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)dt=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2}\int_0^x t\sin t\,dt\right)=\sqrt{2}\,x\sin x$

3．次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 $a$ の値を求めよ。

(1) $\int_0^x f(t)\,dt=a\cos^2 x+ax+1$

(2) $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt=\sin x-ax$

解答　(1) $f(x)=\sin 2x-1$，$a=-1$　(2) $f(x)=-\sin x$，$a=1$

解説

(1) 両辺を $x$ で微分すると　$f(x)=2a\cos x(-\sin x)+a$

$=-2a\sin x\cos x+a=a(-\sin 2x+1)$

また，与えられた等式で $x=0$ とおくと，左辺は０になるから　$0=a+1$

ゆえに　$a=-1$

よって　$f(x)=\sin 2x-1$

(2) $x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=\sin x-ax$

両辺を $x$ で微分すると　$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\cos x-a$

ゆえに　$\int_0^x f(t)\,dt=\cos x-a$

また，この等式で $x=0$ とおくと，左辺は０になるから　$0=1-a$

ゆえに　$a=1$

よって　$\int_0^x f(t)\,dt=\cos x-1$

更に両辺を $x$ で微分すると　$f(x)=-\sin x$

4．等式 $x+\int_a^x (x-t)f(t)\,dt=e^x-1$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 $a$ の値を求めよ。

解答　$f(x)=e^x$，$a=0$

解説

等式から　$x+x\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x tf(t)\,dt=e^x-1$

両辺を $x$ で微分すると　$1+\int_a^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=e^x$

ゆえに　$\int_a^x f(t)\,dt=e^x-1$　……①

更に両辺を $x$ で微分すると　$f(x)=e^x$

また，① で $x=a$ とおくと，左辺は０になるから　$0=e^a-1$

よって　$a=0$

5．次の関数の最大値，最小値，およびそのときの $x$ の値を求めよ。

(1) $f(x)=\int_0^x t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

(2) $f(x)=\int_0^x(\cos t+\sin 2t)\,dt$　$\left(0\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi\right)$

解答　(1) $x=\frac{3}{4}\pi$ のとき最大値 $\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=0$ のとき最小値 0

(2) $x=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

解説

(1) $f'(x)=x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ で $f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ \frac{3}{4}\pi$

よって，$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | 極大 | ↘ | |

また　$f(x)=\int_0^x t\left\{-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right\}'dt=\left[-t\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x+\int_0^x\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$

$=-x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\left[\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x$

$=-x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ゆえに　$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$f(\pi)=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi-\sqrt{2}$

よって　$x=\frac{3}{4}\pi$ のとき最大値 $\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$x=0$ のとき最小値 0

(2) $f'(x)=\cos x+\sin 2x=\cos x+2\sin x\cos x=\cos x(1+2\sin x)$

$0\leqq x\leqq\frac{3}{2}\pi$ で，$f'(x)=0$ とすると

$\cos x=0$ から　$x=\frac{\pi}{2}$，　$1+2\sin x=0$ から　$x=\frac{7}{6}\pi$

$f(x)$ の増減表は次のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{7}{6}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | 極大 | ↘ | 極小 | ↗ | |

また　$f(x)=\left[\sin t-\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^x=\sin x-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}$

ゆえに　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$，$f\left(\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{1}{4}$，$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$

よって　$x=\frac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，$x=\frac{7}{6}\pi$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

6．次の極限値を求めよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^4}{n^4}+\frac{2^4}{n^4}+\frac{3^4}{n^4}+\cdots\cdots+\frac{n^4}{n^4}\right)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi}{2n}+\cos\frac{2\pi}{2n}+\cos\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\cos\frac{n\pi}{2n}\right)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n^2-k^2}}{n^2}$

解答 (1) $\dfrac{1}{5}$　(2) $\dfrac{2}{\pi}$　(3) $2\sqrt{2}-2$　(4) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解説

求める極限値を $S$ とする。

(1) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4}{n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^4=\int_0^1 x^4dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{1}{5}$

(2) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$

(3) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n+k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}dx=\left[2\sqrt{1+x}\right]_0^1=2\sqrt{2}-2$

(4) $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2\left(4-\frac{k^2}{n^2}\right)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$

ここで　$x=2\sin\theta$ とおくと　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

| $x$ | $0\longrightarrow 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0\longrightarrow\frac{\pi}{6}$ |

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき　$\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\cos\theta$

よって　$\displaystyle S=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos\theta)\cdot2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$

$\displaystyle=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos2\theta)d\theta=2\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

7．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)^2}\log\frac{n+k}{n}$ を求めよ。

解答 $\dfrac{1-\log2}{2}$

解説

$\displaystyle(\text{与式})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{(n+k)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$

$\displaystyle=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\log(1+x)dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{1+x}\right)'\log(1+x)\,dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{1+x}\log(1+x)\right]_0^1+\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}dx=-\frac{\log2}{2}+\left[-\frac{1}{1+x}\right]_0^1=\frac{1-\log2}{2}$

8．極限値 $\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ を求めよ。

解答 $\dfrac{1}{2}\log2$

解説

$\displaystyle S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2\left\{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

よって　$\displaystyle S=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\Big[\log(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{1}{2}\log2$

9．次の[A]を証明し，それを用いて不等式[B]を証明せよ。

(1) [A]　$1\leqq x\leqq3$ のとき　$1\leqq28-x^3\leqq27$

[B]　$\displaystyle2<\int_1^3\sqrt[3]{28-x^3}\,dx<6$

(2) [A]　$n>2$，$0\leqq x\leqq1$ のとき　$\dfrac{1}{1+x^2}\leqq\dfrac{1}{1+x^n}\leqq1$

[B]　$\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}<1$ $(n>2)$

解答 (1) 略　(2) 略

解説

(1) [A]　$1\leqq x\leqq3$ のとき　$1^3\leqq x^3\leqq3^3$

すなわち　$1\leqq x^3\leqq27$

ゆえに　$-27\leqq-x^3\leqq-1$

よって　$1\leqq28-x^3\leqq27$

[B]　[A]の結果から，$1\leqq x\leqq3$ のとき　$\sqrt[3]{1}\leqq\sqrt[3]{28-x^3}\leqq\sqrt[3]{27}$

すなわち　$1\leqq\sqrt[3]{28-x^3}\leqq3$

等号は常には成り立たないから　$\displaystyle\int_1^3dx<\int_1^3\sqrt[3]{28-x^3}\,dx<\int_1^3 3\,dx$

ゆえに　$\displaystyle2<\int_1^3\sqrt[3]{28-x^3}\,dx<6$

よって，与えられた不等式は成り立つ。

(2) [A]　$n>2$，$0\leqq x\leqq1$ のとき　$0\leqq x^n\leqq x^2$

ゆえに　$1\leqq1+x^n\leqq1+x^2$

よって　$\dfrac{1}{1+x^2}\leqq\dfrac{1}{1+x^n}\leqq1$

[B]　[A]の結果において，等号は常には成り立たないから

$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}<\int_0^1dx$

$x=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

| $x$ | $0\longrightarrow 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0\longrightarrow\frac{\pi}{4}$ |

したがって　$\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$

また　$\displaystyle\int_0^1dx=1$

よって　$\displaystyle\frac{\pi}{4}<\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}<1$