数学演習（面積）Ｈ２４．６．１６　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　）

１．次の曲線や直線および x 軸によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$x=1$，$x=4$

(2) $y=\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$

(3) $y=\log x$，$x=\sqrt{e}$

(4) $y=e^x-1$，$x=-1$，$x=2$

(5) $y=x^4-5x^3+6x^2$

２．次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ $(x\geqq 0)$，$y=x^2$

(2) $y^2=2x$，$x^2=2y$

(3) $xy=2$，$x+y=3$

(4) $y=\sin x$，$y=2\sin x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

３．次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=\dfrac{1}{y-2}$，$y=3$，$y=4$，y 軸

(2) $y=e^x$，$y=e$，$y=e^2$，y 軸

(3) $x=y^2-3$，$x=2y$

4．次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1)　$y=(x-e)\log x$，$y=0$

(2)　$y=x\sqrt{3-x}$，$y=x$

(3)　$y=\sin x$，$y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

(4)　$y=xe^{1-x}$，$y=x^2e^{1-x}$

5．2 曲線 $y=\sqrt{x}$，$y=a\log x$ が接するとき

(1)　定数 a の値と接点の座標を求めよ。

(2)　この 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

6．$a>0$ とする。曲線 $y=\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

7．(1)　関数 $y=xe^{-x}$ のグラフの凹凸を調べよ。

(2)　曲線 C：$y=xe^{-x}$ 上の点 P において接線 ℓ を引く。P の x 座標 t が $0\leqq t\leqq 1$ にあるとき，曲線 C と 3 つの直線 ℓ，$x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積 S の最小値とそのときの t の値を求めよ。

数学演習（面積）Ｈ２４．６．１６　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1．次の曲線や直線および x 軸によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$x=1$，$x=4$　　(2) $y=\sin x$，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$x=\dfrac{\pi}{2}$

(3) $y=\log x$，$x=\sqrt{e}$　　(4) $y=e^x-1$，$x=-1$，$x=2$

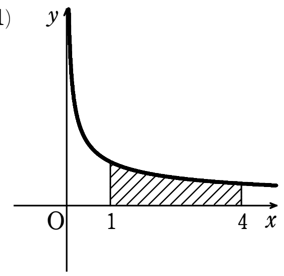
(5) $y=x^4-5x^3+6x^2$

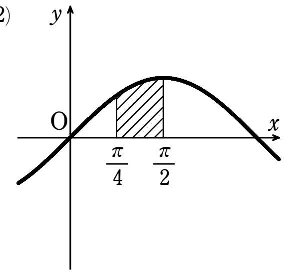
解答　(1) 2　(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　(3) $-\dfrac{\sqrt{e}}{2}+1$　(4) $\dfrac{1}{e}+e^2-3$　(5) $\dfrac{69}{20}$

解説

(1) $1\leqq x\leqq 4$ では，$y>0$ であるから　$S=\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{\sqrt{x}}=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^4=2$

(2) $\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ では，$y>0$ であるから　$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1)


(2)


(3) 曲線 $y=\log x$ と x 軸の交点の x 座標は，$\log x=0$ を解くと　$x=1$

$1\leqq x\leqq\sqrt{e}$ では，$y\geqq 0$ であるから

$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx=\Big[x\log x-x\Big]_1^{\sqrt{e}}$$

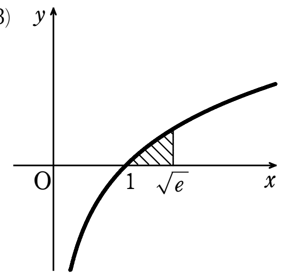
$$=\sqrt{e}\log\sqrt{e}-\sqrt{e}-(0-1)=-\frac{\sqrt{e}}{2}+1$$

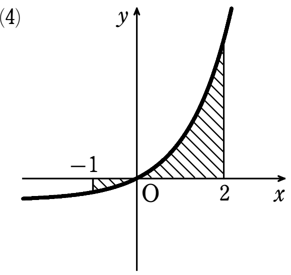
(4) 曲線 $y=e^x-1$ と x 軸の交点の x 座標は，$e^x-1=0$ を解くと　$x=0$

$-1\leqq x\leqq 0$ では　$y\leqq 0$，　$0\leqq x\leqq 2$ では　$y\geqq 0$ であるから

$$S=-\int_{-1}^0(e^x-1)dx+\int_0^2(e^x-1)dx=-\Big[e^x-x\Big]_{-1}^0+\Big[e^x-x\Big]_0^2$$

$$=-\left\{(1-0)-\left(\frac{1}{e}+1\right)\right\}+(e^2-2)-(1-0)=\frac{1}{e}+e^2-3$$

(3)


(4)


(5) $x^4-5x^3+6x^2=0$ を解くと

$x^2(x-2)(x-3)=0$ から　$x=0,\ 2,\ 3$

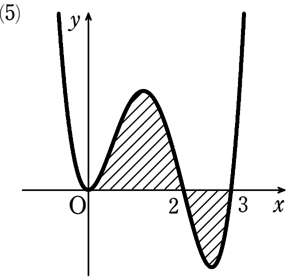
$0\leqq x\leqq 2$ では　$x^4-5x^3+6x^2\geqq 0$，

$2\leqq x\leqq 3$ では　$x^4-5x^3+6x^2\leqq 0$

$$S=\int_0^2(x^4-5x^3+6x^2)dx-\int_2^3(x^4-5x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5}{4}x^4+2x^3\right]_0^2-\left[\frac{x^5}{5}-\frac{5}{4}x^4+2x^3\right]_2^3$$

$$=2\left(\frac{32}{5}-20+16\right)-\left(\frac{243}{5}-\frac{405}{4}+54\right)=\frac{69}{20}$$

(5)


2．次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=\sqrt[3]{x}$ $(x\geqq 0)$，$y=x^2$　　(2) $y^2=2x$，$x^2=2y$

(3) $xy=2$，$x+y=3$　　(4) $y=\sin x$，$y=2\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$

解答　(1) $\dfrac{5}{12}$　(2) $\dfrac{4}{3}$　(3) $\dfrac{3}{2}-2\log 2$　(4) 2

解説

(1) 2 曲線の交点の x 座標は，方程式 $\sqrt[3]{x}=x^2$ を解くと　$x=0,\ 1$

$0\leqq x\leqq 1$ では，$\sqrt[3]{x}\geqq x^2$ であるから

$$S=\int_0^1(\sqrt[3]{x}-x^2)dx=\left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{5}{12}$$

(2) $y^2=2x$，$x^2=2y$ から y を消去すると　$\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2=2x$

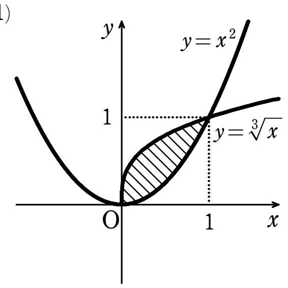
ゆえに　$x^4=8x$　よって　$x(x^3-8)=0$

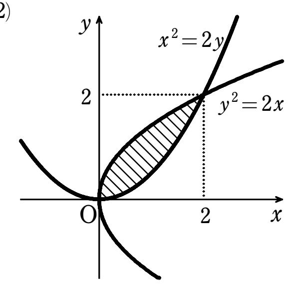
すなわち　$x(x-2)(x^2+2x+4)=0$

したがって，2 曲線の交点の x 座標は　$x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ では，$\sqrt{2x}\geqq\dfrac{1}{2}x^2$ であるから

$$S=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

(1)


(2)


(3) $xy=2$，$x+y=3$ から y を消去すると　$x(3-x)=2$

したがって　$(x-1)(x-2)=0$

よって，曲線と直線の交点の x 座標は　$x=1,\ 2$

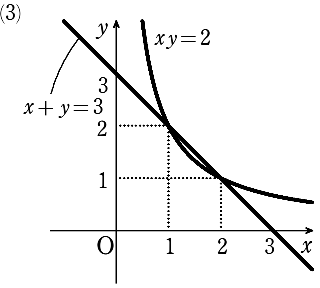
$1\leqq x\leqq 2$ では，$-x+3\geqq\dfrac{2}{x}$ であるから

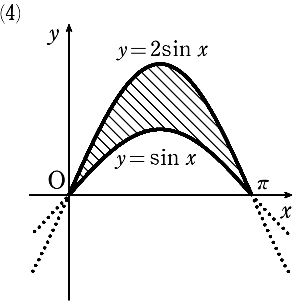
$$S=\int_1^2\left(-x+3-\frac{2}{x}\right)dx=\left[-\frac{x^2}{2}+3x-2\log x\right]_1^2$$

$$=(-2+6-2\log 2)-\left(-\frac{1}{2}+3-2\log 1\right)=\frac{3}{2}-2\log 2$$

(4) $0\leqq x\leqq\pi$ では，$2\sin x\geqq\sin x$ であるから

$$S=\int_0^\pi(2\sin x-\sin x)dx=\int_0^\pi\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

(3)


(4)


3．次の曲線と直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $x=\dfrac{1}{y-2}$，$y=3$，$y=4$，y 軸　　(2) $y=e^x$，$y=e$，$y=e^2$，y 軸

(3) $x=y^2-3$，$x=2y$

解答　(1) $\log 2$　(2) e^2　(3) $\dfrac{32}{3}$

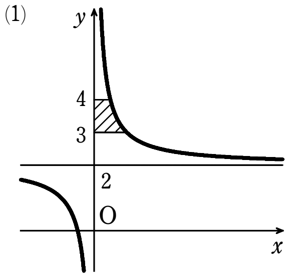
解説

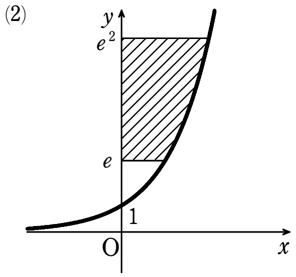
(1) $3\leqq y\leqq 4$ では，$x>0$ であるから　$S=\displaystyle\int_3^4\frac{dy}{y-2}=\Big[\log(y-2)\Big]_3^4=\log 2$

(2) $y=e^x$ から　$x=\log y$

$e\leqq y\leqq e^2$ では，$x>0$ であるから

$$S=\int_e^{e^2}\log y\,dy=\Big[y\log y-y\Big]_e^{e^2}=(e^2\cdot 2-e^2)-(e\cdot 1-e)=e^2$$

(1)


(2)


(3) $y^2-3=2y$ とすると　$(y+1)(y-3)=0$

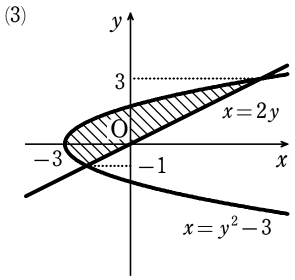
よって，曲線と直線の交点の y 座標は

$y=-1,\ 3$

$-1\leqq y\leqq 3$ では，$2y\geqq y^2-3$ であるから

$$S=\int_{-1}^3\{2y-(y^2-3)\}dy$$

$$=\left[-\frac{y^3}{3}+y^2+3y\right]_{-1}^3=\frac{32}{3}$$

(3)


別解　$S=\dfrac{1}{6}\{3-(-1)\}^3=\dfrac{32}{3}$

4．次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(1) $y=(x-e)\log x$，$y=0$　　(2) $y=x\sqrt{3-x}$，$y=x$

(3) $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$　　(4) $y=xe^{1-x}$，$y=x^2e^{1-x}$

解答　(1) $-\dfrac{e^2}{4}+e-\dfrac{1}{4}$　(2) $\dfrac{12\sqrt{3}-18}{5}$　(3) $\dfrac{5}{2}$　(4) $3-e$

解説

(1)　$(x-e)\log x=0$ を解くと　$x=1,\ e$

$1\leqq x\leqq e$ では，$(x-e)\log x\leqq 0$ であるから

$$S=-\int_1^e(x-e)\log x\,dx=-\int_1^e\left\{\frac{(x-e)^2}{2}\right\}'\log x\,dx$$

$$=-\left[\frac{(x-e)^2}{2}\log x\right]_1^e+\int_1^e\frac{(x-e)^2}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x-2e+\frac{e^2}{x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2ex+e^2\log x\right]_1^e=-\frac{e^2}{4}+e-\frac{1}{4}$$

(2)　曲線と直線の交点の x 座標は，方程式 $x\sqrt{3-x}=x$　すなわち　$x(\sqrt{3-x}-1)=0$ を解いて　$x=0,\ 2$

$0\leqq x\leqq 2$ では，$x\sqrt{3-x}\geqq x$ であるから

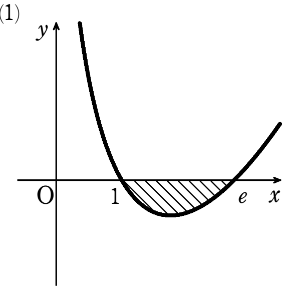
$$S=\int_0^2(x\sqrt{3-x}-x)dx=\int_0^2 x\sqrt{3-x}\,dx-\int_0^2 x\,dx$$

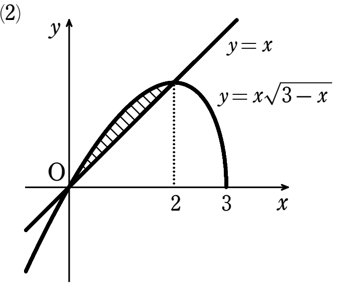
$\sqrt{3-x}=t$ とおくと　$x=3-t^2$，$dx=-2t\,dt$

x	$0\longrightarrow 2$
t	$\sqrt{3}\longrightarrow 1$

したがって　$S=\int_{\sqrt{3}}^1(3-t^2)t\cdot(-2t)dt-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

$$=\left[-\frac{2}{5}t^5+2t^3\right]_1^{\sqrt{3}}-2=\frac{12\sqrt{3}-18}{5}$$

(1)


(2)


(3)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式 $\sin x=\sin 2x$　すなわち　$\sin x(1-2\cos x)=0$ を $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で解いて　$x=0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{3}$ では，$\sin 2x\geqq\sin x$，

$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ では，$\sin x\geqq\sin 2x$　であるから

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin 2x)dx$$

$$=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\cos x+\frac{\cos 2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=\frac{5}{2}$$

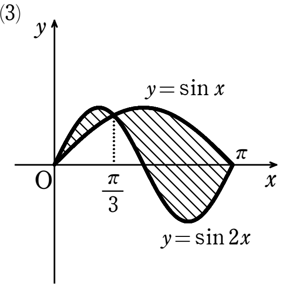
(4)　2 曲線の交点の x 座標は，方程式 $xe^{1-x}=x^2e^{1-x}$　すなわち　$x(1-x)e^{1-x}=0$ を解いて　$x=0,\ 1$

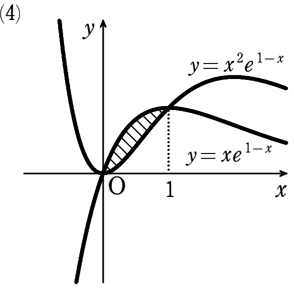
$0\leqq x\leqq 1$ では，$xe^{1-x}\geqq x^2e^{1-x}$ であるから

$$S=\int_0^1(xe^{1-x}-x^2e^{1-x})dx=\int_0^1(x-x^2)e^{1-x}dx=\int_0^1(x-x^2)(-e^{1-x})'dx$$

$$=\left[(x-x^2)(-e^{1-x})\right]_0^1+\int_0^1(1-2x)e^{1-x}dx=\int_0^1(1-2x)(-e^{1-x})'dx$$

$$=\left[(1-2x)(-e^{1-x})\right]_0^1-2\int_0^1 e^{1-x}dx=1+e-2\left[-e^{1-x}\right]_0^1=3-e$$

(3)


(4)


5．2 曲線 $y=\sqrt{x}$，$y=a\log x$ が接するとき

(1)　定数 a の値と接点の座標を求めよ。

(2)　この 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答　(1)　$a=\frac{e}{2}$，接点の座標 $(e^2,\ e)$　　(2)　$\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}$

解説

(1)　$f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=a\log x$ とおくと　$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}$

接点の x 座標を t $(t>0)$ とすると，$f(t)=g(t)$，$f'(t)=g'(t)$ が成り立つから

$\sqrt{t}=a\log t$ ……①，　$\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{a}{t}$ ……②

② から　$a=\frac{\sqrt{t}}{2}$ ……③

① に代入して　$\sqrt{t}=\frac{\sqrt{t}}{2}\log t$

$\sqrt{t}>0$ であるから　$\log t=2$　　ゆえに　$t=e^2$

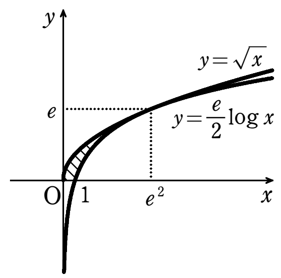
よって，接点の座標は　$(e^2,\ e)$

a の値は，$t=e^2$ を ③ に代入して　$a=\frac{e}{2}$

(2)　$S=\int_0^{e^2}\sqrt{x}\,dx-\int_1^{e^2}\frac{e}{2}\log x\,dx$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{e^2}-\frac{e}{2}\left[x\log x-x\right]_1^{e^2}$$

$$=\frac{2}{3}e^3-\frac{e}{2}(2e^2-e^2+1)=\frac{e^3}{6}-\frac{e}{2}$$



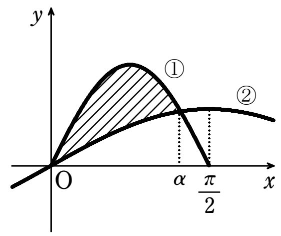
6．$a>0$ とする。曲線 $y=\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

解答　$a=2-\sqrt{2}$

解説

$y=\sin 2x\ \left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ ……①，　$y=a\sin x$ ……②　とおく。

曲線 ② が，曲線 ① と x 軸で囲まれた部分の面積を 2 等分するとき，①，② の原点以外の交点の x 座標を α とすると



$\sin 2\alpha=a\sin\alpha$ から　$2\sin\alpha\cos\alpha=a\sin\alpha$

$\sin\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\frac{a}{2}$

ここで，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ であるから　$0<\frac{a}{2}<1$

すなわち　$0<a<2$ ……③

題意から　$\int_0^{\alpha}(\sin 2x-a\sin x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$

ここで　$\int_0^{\alpha}(\sin 2x-a\sin x)dx=\left[-\frac{\cos 2x}{2}+a\cos x\right]_0^{\alpha}$

$$=-\frac{\cos 2\alpha-1}{2}+a(\cos\alpha-1)$$

$$=-\frac{(2\cos^2\alpha-1)-1}{2}+a\cos\alpha-a$$

$$=\frac{a^2}{4}-a+1\quad\left(\cos\alpha=\frac{a}{2}\text{ から}\right)$$

一方　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ゆえに　$\frac{a^2}{4}-a+1=\frac{1}{2}\times 1$

よって　$a^2-4a+2=0$

これを解くと　$a=2\pm\sqrt{2}$

③ を満たすものは　$a=2-\sqrt{2}$

7．(1)　関数 $y=xe^{-x}$ のグラフの凹凸を調べよ。

(2)　曲線 C：$y=xe^{-x}$ 上の点 P において接線 ℓ を引く。P の x 座標 t が $0\leqq t\leqq 1$ にあるとき，曲線 C と 3 つの直線 ℓ，$x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積 S の最小値とそのときの t の値を求めよ。

解答　(1)　$x<2$ のとき上に凸，$2<x$ のとき下に凸

(2)　$t=\frac{1}{2}$ のとき最小値　$\frac{1}{2\sqrt{e}}+\frac{2}{e}-1$

解説

(1)　$y'=e^{-x}+x(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$，　$y''=-e^{-x}+(1-x)(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

$y''=0$ とすると　$x=2$

$x<2$ のとき　$y''<0$，　$2<x$ のとき　$y''>0$

よって　$x<2$ のとき上に凸，　$2<x$ のとき下に凸

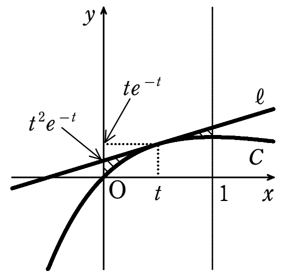
(2)　(1) より，曲線 C は $0\leqq x\leqq 1$ で上に凸であるから，接線 ℓ は曲線 C より上側にある。

接線 ℓ の方程式は，$y'=(1-x)e^{-x}$ であるから

$y-te^{-t}=(1-t)e^{-t}(x-t)$

すなわち　$y=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$

したがって



$$S=\int_0^1\{(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}-xe^{-x}\}dx$$

$$=\left[\frac{(1-t)e^{-t}}{2}x^2+t^2e^{-t}x-x(-e^{-x})\right]_0^1+\int_0^1(-e^{-x})dx$$

$$=\frac{(1-t)e^{-t}}{2}+t^2e^{-t}+\frac{1}{e}+\left[e^{-x}\right]_0^1=\frac{1}{2}(2t^2-t+1)e^{-t}+\frac{2}{e}-1,$$

$$S' = \frac{1}{2}\{(4t-1)e^{-t} + (2t^2 - t + 1)(-e^{-t})\}$$

$$= \frac{1}{2}(-2t^2 + 5t - 2)e^{-t} = -\frac{1}{2}(t-2)(2t-1)e^{-t}$$

$S' = 0$ とすると　　$t = 2,\ \frac{1}{2}$

$0 \leqq t \leqq 1$ における S の増減表は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，$t = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{1}{2\sqrt{e}} + \frac{2}{e} - 1$