数学演習（不定積分）Ｈ２４．５．１１　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x+1)^5 dx$　(2) $\int (2x-1)^4 dx$　(3) $\int \frac{2}{3x+2} dx$

(4) $\int \sqrt{x+3}\, dx$　(5) $\int \sin\frac{5}{6}\pi x\, dx$　(6) $\int \cos(4x-1)\, dx$

(7) $\int e^{2x-1} dx$　(8) $\int 2^{7x+5} dx$

２．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sqrt{x}(x-1)\, dx$　(2) $\int \frac{(x-2)^2}{x} dx$　(3) $\int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t}} dt$

３．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{10}{(5x+3)^3} dx$　(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}} dx$

４．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{3-x}\, dx$　(2) $\int (2x+1)\sqrt{x+2}\, dx$　(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}} dx$

5．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x-2)(x^2-4x+5)^7 dx$　(2) $\int \cos^4 x \sin x \, dx$　(3) $\int \frac{dx}{x\log x}$

(4) $\int x\sqrt{x^2-1}\, dx$　(5) $\int \frac{x}{\sqrt{4-3x^2}} dx$　(6) $\int xe^{-2x^2+1} dx$

6．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int xe^x dx$　(2) $\int (x-1)\cos x \, dx$　(3) $\int x\sin 2x \, dx$

(4) $\int \log(x+1)\, dx$　(5) $\int x^4 \log x \, dx$

7．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$　(2) $\int \frac{dx}{e^x+1}$　(3) $\int e^{-x}\cos x \, dx$

数学演習（不定積分）Ｈ２４．５．１１　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int (x+1)^5 dx$　(2) $\int (2x-1)^4 dx$　(3) $\int \frac{2}{3x+2} dx$

(4) $\int \sqrt{x+3}\, dx$　(5) $\int \sin\frac{5}{6}\pi x\, dx$　(6) $\int \cos(4x-1)\, dx$

(7) $\int e^{2x-1} dx$　(8) $\int 2^{7x+5} dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{(x+1)^6}{6}+C$　(2) $\frac{(2x-1)^5}{10}+C$　(3) $\frac{2}{3}\log|3x+2|+C$

(4) $\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}+C$　(5) $-\frac{6}{5\pi}\cos\frac{5}{6}\pi x+C$　(6) $\frac{1}{4}\sin(4x-1)+C$

(7) $\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$　(8) $\frac{2^{7x+5}}{7\log 2}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int (x+1)^5 dx=\frac{(x+1)^{5+1}}{5+1}+C=\frac{(x+1)^6}{6}+C$

(2) $\int (2x-1)^4 dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{4+1}}{4+1}+C=\frac{(2x-1)^5}{10}+C$

(3) $\int \frac{2}{3x+2} dx=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\log|3x+2|+C=\frac{2}{3}\log|3x+2|+C$

(4) $\int \sqrt{x+3}\, dx=\int (x+3)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}+C$

(5) $\int \sin\frac{5}{6}\pi x\, dx=\frac{6}{5\pi}\cdot\left(-\cos\frac{5}{6}\pi x\right)+C=-\frac{6}{5\pi}\cos\frac{5}{6}\pi x+C$

(6) $\int \cos(4x-1)\, dx=\frac{1}{4}\sin(4x-1)+C$

(7) $\int e^{2x-1} dx=\frac{1}{2}e^{2x-1}+C$

(8) $\int 2^{7x+5} dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{7x+5}}{\log 2}+C=\frac{2^{7x+5}}{7\log 2}+C$

2．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \sqrt{x}(x-1)dx$　(2) $\int \frac{(x-2)^2}{x}dx$　(3) $\int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t}}dt$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$　(2) $\frac{x^2}{2}-4x+4\log|x|+C$

(3) $\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+2\sqrt{t}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int \sqrt{x}(x-1)dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

(2) $\int \frac{(x-2)^2}{x}dx=\int\left(x-4+\frac{4}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}-4x+4\log|x|+C$

(3) $\int \frac{(t+1)^2}{\sqrt{t}}dt=\int\left(t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}\right)dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}+\frac{4}{3}t\sqrt{t}+2\sqrt{t}+C$

3．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{10}{(5x+3)^3}dx$　(2) $\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $-\frac{1}{(5x+3)^2}+C$　(2) $-\frac{(x+1)\sqrt{1-2x}}{3}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\int \frac{10}{(5x+3)^3}dx=10\int(5x+3)^{-3}dx=10\cdot\frac{1}{5}\cdot\left\{\frac{(5x+3)^{-2}}{-2}\right\}+C=-\frac{1}{(5x+3)^2}+C$

(2) $\sqrt{1-2x}=t$ とおくと　$1-2x=t^2$，$x=\frac{1-t^2}{2}$，$dx=-tdt$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-2x}}dx=\int\frac{1-t^2}{2t}\cdot(-t)dt=\frac{1}{2}\int(t^2-1)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C$

$=\frac{t}{6}(t^2-3)+C=-\frac{(x+1)\sqrt{1-2x}}{3}+C$

4．次の不定積分を求めよ。

(1) $\int x\sqrt{3-x}\, dx$　(2) $\int (2x+1)\sqrt{x+2}\, dx$　(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$

解答　C は積分定数とする。

(1) $\frac{2}{5}(x+2)(x-3)\sqrt{3-x}+C$　(2) $\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C$

(3) $\frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $\sqrt{3-x}=t$ とおくと　$3-x=t^2$，$x=3-t^2$，$dx=-2tdt$

$\int x\sqrt{3-x}\, dx=\int(3-t^2)t(-2t)dt=2\int(t^4-3t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-t^3\right)+C$

$=\frac{2}{5}t^3(t^2-5)+C=\frac{2}{5}(x+2)(x-3)\sqrt{3-x}+C$

(2) $\sqrt{x+2}=t$ とおくと　$x+2=t^2$，$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

$\int(2x+1)\sqrt{x+2}\, dx=\int(2t^2-3)t\cdot 2tdt=2\int(2t^4-3t^2)dt=2\left(\frac{2}{5}t^5-t^3\right)+C$

$=\frac{2}{5}t^3(2t^2-5)+C=\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C$

(3) $\sqrt{x-1}=t$ とおくと　$x-1=t^2$，$x=t^2+1$，$dx=2tdt$

$\int\frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx=\int\frac{t^4+2t^2+1}{t}\cdot 2tdt=2\int(t^4+2t^2+1)dt=2\left(\frac{t^5}{5}+\frac{2}{3}t^3+t\right)+C$

$=\frac{2}{15}t(3t^4+10t^2+15)+C=\frac{2}{15}(3x^2+4x+8)\sqrt{x-1}+C$

5．次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int(x-2)(x^2-4x+5)^7dx$ (2) $\displaystyle\int\cos^4x\sin x\,dx$ (3) $\displaystyle\int\frac{dx}{x\log x}$

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-1}\,dx$ (5) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$ (6) $\displaystyle\int xe^{-2x^2+1}dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{(x^2-4x+5)^8}{16}+C$ (2) $\displaystyle-\frac{\cos^5x}{5}+C$ (3) $\log|\log x|+C$

(4) $\displaystyle\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C$ (5) $\displaystyle-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{3}+C$ (6) $\displaystyle-\frac{e^{-2x^2+1}}{4}+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $x^2-4x+5=t$ とおくと $(2x-4)dx=dt$

$$\int(x-2)(x^2-4x+5)^7dx=\frac{1}{2}\int(2x-4)(x^2-4x+5)^7dx=\frac{1}{2}\int t^7dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^8}{8}+C$$
$$=\frac{(x^2-4x+5)^8}{16}+C$$

(2) $\cos x=t$ とおくと $-\sin x\,dx=dt$

$$\int\cos^4x\sin x\,dx=-\int t^4dt=-\frac{t^5}{5}+C=-\frac{\cos^5x}{5}+C$$

(3) $\log x=t$ とおくと $\dfrac{1}{x}dx=dt$

$$\int\frac{dx}{x\log x}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log|\log x|+C$$

(4) $x^2-1=t$ とおくと $2xdx=dt$

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int2x\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+C$$

(5) $4-3x^2=t$ とおくと $-6xdx=dt$

$$\int\frac{x}{\sqrt{4-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{-6x}{\sqrt{4-3x^2}}dx=-\frac{1}{6}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{6}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot2t^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{\sqrt{4-3x^2}}{3}+C$$

(6) $-2x^2+1=t$ とおくと $-4xdx=dt$

$$\int xe^{-2x^2+1}dx=-\frac{1}{4}\int(-4xe^{-2x^2+1})dx=-\frac{1}{4}\int e^tdt=-\frac{1}{4}e^t+C=-\frac{e^{-2x^2+1}}{4}+C$$

6．次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int xe^xdx$ (2) $\displaystyle\int(x-1)\cos x\,dx$ (3) $\displaystyle\int x\sin2x\,dx$

(4) $\displaystyle\int\log(x+1)\,dx$ (5) $\displaystyle\int x^4\log x\,dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) xe^x-e^x+C (2) $(x-1)\sin x+\cos x+C$

(3) $\displaystyle-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{4}\sin2x+C$ (4) $(x+1)\log(x+1)-x+C$

(5) $\displaystyle\frac{1}{5}x^5\log x-\frac{1}{25}x^5+C$

解説

C は積分定数とする。

(1) $$\int xe^xdx=\int x(e^x)'dx=xe^x-\int(x)'e^xdx=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C$$

(2) $$\int(x-1)\cos x\,dx=\int(x-1)(\sin x)'dx=(x-1)\sin x-\int(x-1)'\sin x\,dx$$
$$=(x-1)\sin x-\int\sin x\,dx=(x-1)\sin x+\cos x+C$$

(3) $$\int x\sin2x\,dx=\int x\left(-\frac{1}{2}\cos2x\right)'dx=-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{2}\int(x)'\cos2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{2}\int\cos2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos2x+\frac{1}{4}\sin2x+C$$

(4) $$\int\log(x+1)\,dx=\int(x+1)'\log(x+1)\,dx$$
$$=(x+1)\log(x+1)-\int(x+1)\{\log(x+1)\}'dx$$
$$=(x+1)\log(x+1)-\int dx=(x+1)\log(x+1)-x+C$$

(5) $$\int x^4\log x\,dx=\int\left(\frac{x^5}{5}\right)'\log x\,dx=\frac{1}{5}x^5\log x-\frac{1}{5}\int x^5(\log x)'dx$$
$$=\frac{1}{5}x^5\log x-\frac{1}{5}\int x^4dx=\frac{1}{5}x^5\log x-\frac{1}{25}x^5+C$$

7．次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x+1}$ (3) $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx$

解答 C は積分定数とする。

(1) $\displaystyle\frac{1}{3}\{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}\}+C$ (2) $x-\log(e^x+1)+C$

(3) $\displaystyle\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$

解説

(1) $$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}$$
$$=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{(x+1)-(x-1)}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}$$

したがって $$\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=\frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left\{(x+1)^{\frac{3}{2}}-(x-1)^{\frac{3}{2}}\right\}+C$$
$$=\frac{1}{3}\{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}\}+C$$

(2) $e^x=t$ とおくと $x=\log t$，$dx=\dfrac{dt}{t}$

$$\int\frac{dx}{e^x+1}=\int\frac{1}{t+1}\cdot\frac{dt}{t}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\log|t|-\log|t+1|+C$$
$$=\log e^x-\log(e^x+1)+C$$
$$=x-\log(e^x+1)+C$$

(3) $$\int e^{-x}\cos x\,dx=\int(-e^{-x})'\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x-\int(-e^{-x})'\sin x\,dx$$
$$=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx$$

よって $\displaystyle2\int e^{-x}\cos x\,dx=e^{-x}(\sin x-\cos x)$

積分定数を C とすると $\displaystyle\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+C$