数学演習（定積分）Ｈ２４．５．２４　　　　　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

１．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$　　(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$　　(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$

２．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}(\cos x+\cos 2x)dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\sin 2x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$　　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2x\,dx$　　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,dx$

３．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+2)^5 dx$　　(2) $\displaystyle\int_2^6 \sqrt{2x-3}\,dx$　　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{(3x+1)^2}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$　　(5) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^1 e^{4x-3}dx$

4. 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 x(x^2-1)^3dx$　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$　(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+3}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx$　(5) $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{(\log x)^2}{x}dx$　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,dx$

5. 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx$ を求めよ。

6. 定積分 $\displaystyle\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,dx$ を求めよ。

7. 定積分 $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{x^2-4x+5}$ を求めよ。

8. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2e^xdx$ を求めよ。

1．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx$　(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}$　(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}$

解答　(1) $\dfrac{1}{2}+\log 2$　(2) $\log\dfrac{3}{2}$　(3) $\log\dfrac{3}{2}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x+1}dx=\int_0^1\left(x+\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\log(x+1)\right]_0^1=\frac{1}{2}+\log 2$

(2) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)}=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^3=\log\frac{3}{4}-\log\frac{1}{2}=\log\frac{3}{2}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}=\int_{-1}^1\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}\right)dx$

$\displaystyle=\left[\log\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_{-1}^1=\log 2-\log\frac{4}{3}=\log\frac{3}{2}$

2．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\pi(\cos x+\cos 2x)dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\sin 2x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$　(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2x\,dx$　(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,dx$

解答　(1) 0　(2) $\dfrac{1}{12}$　(3) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$　(4) $\dfrac{3}{4}\pi$　(5) $\sqrt{3}-\dfrac{\pi}{3}$

解説

(1) $\displaystyle\int_0^\pi(\cos x+\cos 2x)dx=\left[\sin x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^\pi=0$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 3x-\cos x)dx=-\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3}-\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$\displaystyle=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{12}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 4x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}\left\{\pi-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{3}{4}\pi$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

3．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^0(x+2)^5dx$　(2) $\displaystyle\int_2^6\sqrt{2x-3}\,dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(3x+1)^2}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx$　(5) $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^1 e^{4x-3}dx$

解答　(1) $\dfrac{21}{2}$　(2) $\dfrac{26}{3}$　(3) $\dfrac{1}{6}$　(4) 0　(5) $\dfrac{e-1}{4}$

解説

(1) $x+2=t$ とおくと　$dx=dt$

x	$-1\longrightarrow 0$
t	$1\longrightarrow 2$

$\displaystyle\int_{-1}^0(x+2)^5dx=\int_1^2 t^5dt=\left[\frac{t^6}{6}\right]_1^2=\frac{2^6-1}{6}=\frac{21}{2}$

(2) $2x-3=t$ とおくと　$2dx=dt$

x	$2\longrightarrow 6$
t	$1\longrightarrow 9$

$\displaystyle\int_2^6\sqrt{2x-3}\,dx=\frac{1}{2}\int_1^9\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_1^9=\frac{27-1}{3}=\frac{26}{3}$

(3) $3x+1=t$ とおくと　$3dx=dt$

x	$0\longrightarrow \frac{1}{3}$
t	$1\longrightarrow 2$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{(3x+1)^2}=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{6}$

(4) $2x+\dfrac{\pi}{2}=t$ とおくと　$2dx=dt$

x	$0\longrightarrow \frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}\longrightarrow \frac{3}{2}\pi$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin t\,dt=\frac{1}{2}\Big[-\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=0$

別解　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=0$

(5) $4x-3=t$ とおくと　$4dx=dt$

x	$\frac{3}{4}\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow 1$

$\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^1 e^{4x-3}dx=\frac{1}{4}\int_0^1 e^t dt=\frac{1}{4}\Big[e^t\Big]_0^1=\frac{e-1}{4}$

4．次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^2 x(x^2-1)^3dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx$　　(3) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+3}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx$　　(5) $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{(\log x)^2}{x}dx$　　(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,dx$

解答　(1) $\dfrac{81}{8}$　(2) -2　(3) $\log\dfrac{23}{7}$　(4) $\log\dfrac{e^2+1}{2}$　(5) 9　(6) $\dfrac{1}{4}$

解説

(1) $x^2-1=t$ とおくと　$2xdx=dt$

x	$1 \longrightarrow 2$
t	$0 \longrightarrow 3$

$$\int_1^2 x(x^2-1)^3dx=\frac{1}{2}\int_1^2 2x(x^2-1)^3dx=\frac{1}{2}\int_0^3 t^3dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^3=\frac{81}{8}$$

(2) $4-x^2=t$ とおくと　$-2xdx=dt$

x	$-\sqrt{3} \longrightarrow 0$
t	$1 \longrightarrow 4$

$$\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}dx=-\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}}=-\left[2\sqrt{t}\right]_1^4=-(4-2)=-2$$

(3) $$\int_1^2 \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+3}dx=\int_1^2 \frac{(x^3+3x^2+3)'}{x^3+3x^2+3}dx=\left[\log(x^3+3x^2+3)\right]_1^2$$
$$=\log 23-\log 7=\log\frac{23}{7}$$

(4) $$\int_0^2 \frac{e^x}{e^x+1}dx=\int_0^2 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx=\left[\log(e^x+1)\right]_0^2=\log(e^2+1)-\log 2=\log\frac{e^2+1}{2}$$

(5) $\log x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{x}dx=dt$

x	$1 \longrightarrow e^3$
t	$0 \longrightarrow 3$

$$\int_1^{e^3} \frac{(\log x)^2}{x}dx=\int_0^3 t^2dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3=9$$

(6) $\cos x=t$ とおくと　$-\sin x\,dx=dt$

x	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$
t	$1 \longrightarrow 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\sin x\,dx=-\int_1^0 t^3dt=\int_0^1 t^3dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

5．定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx$ を求めよ。

解答　4

解説

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq 0$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)\geqq 0$

したがって

$$\int_0^{\pi}|\sin x-\sqrt{3}\cos x|dx=2\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right|dx$$
$$=2\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx\right]$$
$$=2\left\{\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\left[\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\right\}$$
$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}-1\right)\right\}=4$$

6．定積分 $\displaystyle\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}\,dx$ を求めよ。

解答　8π

解説

$\sqrt{16-x^2}$ は偶関数であるから　$\displaystyle\int_{-4}^4\sqrt{16-x^2}\,dx=2\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$

$x=4\sin\theta$ とおくと　$dx=4\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$0 \longrightarrow 4$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$

したがって　$$2\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos\theta)4\cos\theta\,d\theta=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=32\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=16\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=8\pi$$

7．定積分 $\displaystyle\int_2^3\frac{dx}{x^2-4x+5}$ を求めよ。

解答　$\dfrac{\pi}{4}$

解説

$x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

$x-2=\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	$2 \longrightarrow 3$
θ	$0 \longrightarrow \dfrac{\pi}{4}$

したがって　$$\int_2^3\frac{dx}{x^2-4x+5}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

8．定積分 $\displaystyle\int_0^1 x^2e^xdx$ を求めよ。

解答　$e-2$

解説

$$\int_0^1 x^2e^xdx=\int_0^1 x^2(e^x)'dx=\left[x^2e^x\right]_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=e-2\int_0^1 x(e^x)'dx$$
$$=e-2\left(\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^xdx\right)=e-2\left(e-\left[e^x\right]_0^1\right)=e-2\{e-(e-1)\}=e-2$$