統一テスト（積分法の応用）Ｈ３１．３．１１　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　）

$\boxed{1}$ 曲線 $y=e^x-4$ と2直線 $x=0$, $x=1$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{2}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　$x=y^2+1$, $x=y+1$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=\sqrt{\log x}$ と直線 $x=e$ および x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{4}$ 曲線 $y=x^2-2$ と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{5}$ 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=\sqrt{3}\sin t+\cos t$, $y=\sqrt{3}\cos t-\sin t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=\frac{3}{2}\pi$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

$\boxed{6}$ 次の曲線の長さ L を求めよ。　$y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$　$(-6\leqq x\leqq 6)$

$\boxed{7}$ $a>0$ とする。サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{8}$ 2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。ただし，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi$ とする。

$\boxed{9}$ y は x の関数とする。微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$ を解け。

$\boxed{10}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分を y 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。 $y=\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$，$y=-1$，y 軸

$\boxed{11}$ 不等式 $x^2-x \leqq y \leqq x$ で表される座標平面上の領域を，直線 $y=x$ の周りに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

統一テスト（積分法の応用）Ｈ３１．３．１１　(dx 抜け −1)　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　)

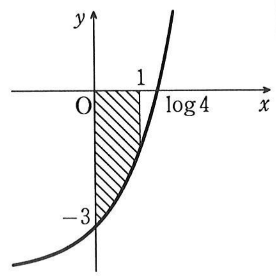
1 曲線 $y=e^x-4$ と２直線 $x=0$，$x=1$ および x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $5-e$　(10)　かっこなし −1

$0\leqq x\leqq 1$ では，常に　$y\leqq 0$

よって　$S=\int_0^1\{-(e^x-4)\}dx=\int_0^1(4-e^x)dx$　5

$=\Big[4x-e^x\Big]_0^1=5-e$



2 次の曲線や直線で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　$x=y^2+1$，$x=y+1$

$\frac{1}{6}$のみでもO.K.

解答 $\frac{1}{6}$　(10)

曲線 $x=y^2+1$ と直線 $x=y+1$ の共有点の y 座標は方程式 $y^2+1=y+1$ の解である。

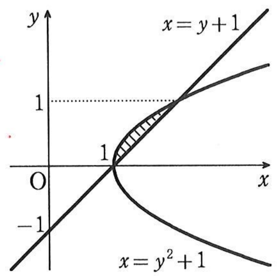
これを解いて　$y=0,\ 1$

これがちがう $\frac{1}{6}$ なし

$0\leqq y\leqq 1$ では，$y^2+1\leqq y+1$ であるから

$S=\int_0^1\{(y+1)-(y^2+1)\}dy$　5

$=\int_0^1(y-y^2)dy=\left[\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{6}$



3 曲線 $y=\sqrt{\log x}$ と直線 $x=e$ および x 軸で囲まれた部分が，x 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

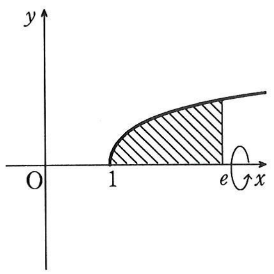
解答 π　(10)

$V=\pi\int_1^e(\sqrt{\log x})^2dx=\pi\int_1^e\log x\,dx$　5

$=\pi\int_1^e(x)'\log x\,dx$

$=\pi\left(\Big[x\log x\Big]_1^e-\int_1^e dx\right)$

$=\pi\left(e-\Big[x\Big]_1^e\right)=\pi$



4 曲線 $y=x^2-2$ と x 軸で囲まれた部分が，y 軸の周りに１回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

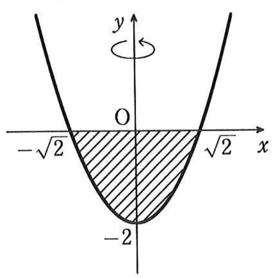
解答 2π　(10)　$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}$ なし，x軸回転なし

曲線 $y=x^2-2$ と y 軸の共有点の y 座標は　$y=-2$

よって

$V=\pi\int_{-2}^0x^2dy=\pi\int_{-2}^0(y+2)dy$　5

$=\pi\left[\frac{y^2}{2}+2y\right]_{-2}^0=\pi\{0-(2-4)\}=2\pi$



5 座標平面上を運動する点Pの時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が，$x=\sqrt{3}\sin t+\cos t$，$y=\sqrt{3}\cos t-\sin t$ で表されるとき，$t=0$ から $t=\frac{3}{2}\pi$ までにPが通過する道のり s を求めよ。

解答 3π　(10)

$\frac{dx}{dt}=\sqrt{3}\cos t-\sin t$，$\frac{dy}{dt}=-\sqrt{3}\sin t-\cos t$ であるから

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=3\cos^2t-2\sqrt{3}\sin t\cos t+\sin^2t+3\sin^2t+2\sqrt{3}\sin t\cos t+\cos^2t$

$=4(\sin^2t+\cos^2t)=4$　5

よって　$s=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\sqrt{4}\,dt=2\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dt=2\Big[t\Big]_0^{\frac{3}{2}\pi}=3\pi$

$[2t]_0^{\frac{3}{2}\pi}$　−1

6 次の曲線の長さ L を求めよ。　$y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$　$(-6\leqq x\leqq 6)$

解答 $3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$　(10)

$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)$ であるから　$1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)^2$

$e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}>0$ であるから

$L=\int_{-6}^6\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=\int_0^6\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=\left[3e^{\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^6=3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

5

7 $a>0$ とする。サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$　$(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 $3\pi a^2$　(10)

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ で $y\geqq 0$ であるから　$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx$

$x=a(\theta-\sin\theta)$ のとき　$dx=a(1-\cos\theta)d\theta$

x と θ の対応は右のようになる。

x	0	$\longrightarrow$	$2\pi a$
θ	0	$\longrightarrow$	2π

したがって　$S=\int_0^{2\pi a}y\,dx$

$=\int_0^{2\pi}a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)d\theta$　5

$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$

$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$

$=a^2\left[\frac{3}{2}\theta-2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}=3\pi a^2$

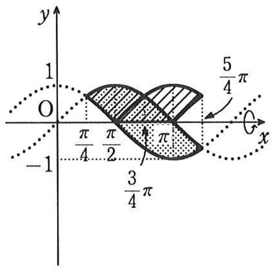
/70

$\boxed{8}$ 2つの曲線 $y=\sin x$, $y=\cos x$ で囲まれた部分が, x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。ただし, $\frac{\pi}{4}\leqq x\leqq\frac{5}{4}\pi$ とする。

$\int(\sin x-\cos x)^2dx$ など多し.

解答 $\frac{\pi(\pi+6)}{4}$ (10)

回転体は, 右の図の斜線部分が, x 軸の周りに1回転したもので, この部分は直線 $x=\frac{3}{4}\pi$ に関して対称であるから



$$V=2\pi\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx\right)$$ (5)

$$=\pi\left\{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}(1-\cos2x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2x)dx\right\}$$

$$=\pi\left(\left[x-\frac{1}{2}\sin2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}-\left[x+\frac{1}{2}\sin2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{2}+0\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{\pi(\pi+6)}{4}$$

$\boxed{9}$ y は x の関数とする。微分方程式 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$ を解け。

解答 $y=Ax$ (A は任意の定数) (10)

[1] 定数関数 $y=0$ は明らかに解である。 (2)

[2] $y\neq0$ のとき, 方程式を変形すると

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$ よって $\int\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}dx=\int\frac{1}{x}dx$

置換積分法の公式から $\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx$

ゆえに $\log|y|=\log|x|+C$, C は任意の定数

$|y|=e^C|x|$

すなわち $y=\pm e^Cx$ (5)

ここで, $\pm e^C=A$ とおくと, A は0以外の任意の値をとる。

[1] で求めた解 $y=0$ は, $y=Ax$ において, $A=0$ とおくと得られる。

よって, 求める解は $y=Ax$, A は任意の定数

$\boxed{10}$ 次の曲線や直線で囲まれた部分を y 軸の周りに1回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。 $y=\cos x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$, $y=-1$, y 軸

解答 $\pi^3-4\pi$ (5)

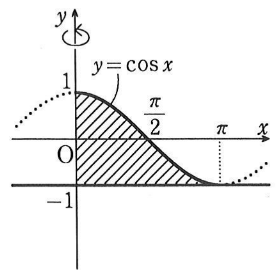
右図から, 体積は $V=\pi\int_{-1}^{1}x^2dy$

$y=\cos x$ から $dy=-\sin x\,dx$

y と x の対応は次のようになる。

y	$-1\to1$
x	$\pi\to0$

(3)



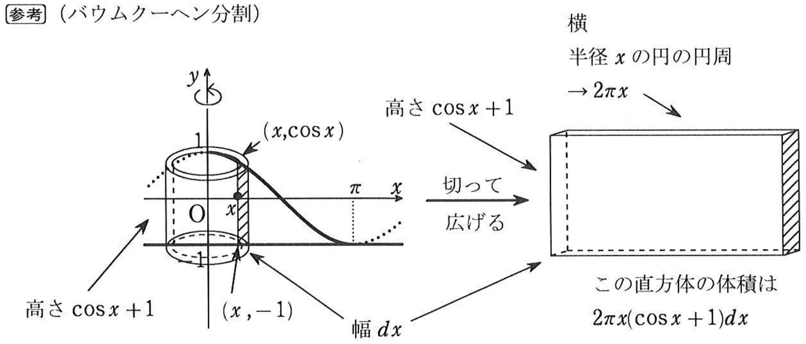
よって $V=\pi\int_{\pi}^{0}(-x^2\sin x)dx=\pi\int_0^{\pi}x^2\sin x\,dx$

$$=\pi\left\{\left[x^2(-\cos x)\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}2x\cos x\,dx\right\}$$

$$=\pi\left(\pi^2+\left[2x\sin x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2\sin x\,dx\right)$$

$$=\pi\left(\pi^2+\left[2\cos x\right]_0^{\pi}\right)=\pi^3-4\pi$$

参考 (バウムクーヘン分割)



求める体積 V は

$$V=\int_0^{\pi}2\pi x(\cos x+1)dx$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}x(\sin x+x)'dx$$

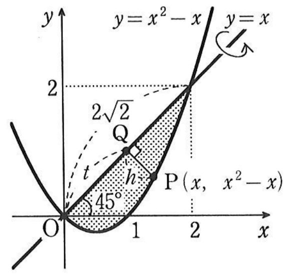
$$=2\pi\left\{\left[x(\sin x+x)\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(x)'(\sin x+x)dx\right\}$$

$$=2\pi\left\{\pi(\sin\pi+\pi)-\left[-\cos x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}\right\}=\pi^3-4\pi$$

$\boxed{11}$ 不等式 $x^2-x\leqq y\leqq x$ で表される座標平面上の領域を, 直線 $y=x$ の周りに1回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

解答 $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$ (5)

題意の領域は, 右図の黒く塗った部分である。



放物線 $y=x^2-x$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ x^2-x)$ $(0\leqq x\leqq2)$ から直線 $y=x$ に垂線 PQ を引き,

$\mathrm{PQ}=h$, $\mathrm{OQ}=t$ $(0\leqq t\leqq2\sqrt{2})$

とする。このとき

$$h=\frac{x-(x^2-x)}{\sqrt{2}}=\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}$$

$$t=\sqrt{2}x-h=\sqrt{2}x-\frac{2x-x^2}{\sqrt{2}}=\frac{x^2}{\sqrt{2}}$$

ゆえに $dt=\sqrt{2}x\,dx$

t と x の対応は表のようになるから

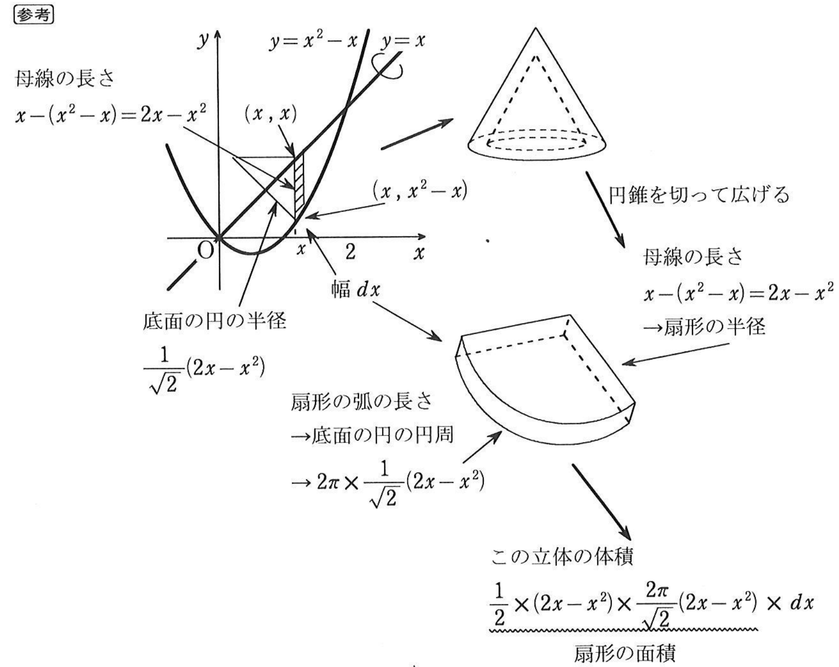
t	$0\to2\sqrt{2}$
x	$0\to2$

(3)

$$V=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}h^2dt=\pi\int_0^2\frac{(2x-x^2)^2}{2}\cdot\sqrt{2}x\,dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2(4x^3-4x^4+x^5)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[x^4-\frac{4}{5}x^5+\frac{x^6}{6}\right]_0^2=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{16}{15}=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

参考



求める体積 V は

$$V=\int_0^2\frac{1}{2}\times(2x-x^2)\times\frac{2\pi}{\sqrt{2}}(2x-x^2)dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2(2x-x^2)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{4}{3}x^3-x^4+\frac{1}{5}x^5\right]_0^2=\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi$$

/30