統一テスト（不定積分･定積分）Ｈ３１．２．４　　　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{x}dx$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int (7^x-3e^x)dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int \sqrt[3]{5x+1}\,dx$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int x\sqrt{2+x}\,dx$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int \cos^3 x\sin x\,dx$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int \frac{dx}{x(x+2)}$

$\boxed{9}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int \cos 3x\sin 5x\,dx$

$\boxed{10}$ 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$

$\boxed{11}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^9 |\sqrt{x}-2|\,dx$

$\boxed{12}$ 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_1^2 x^4\log x\,dx$

$\boxed{13}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int x^2e^x dx$

$\boxed{14}$ $a>0$ とする。次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$\boxed{15}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+3}$

$\boxed{16}$ 次の関数を $x$ で微分せよ。 $\displaystyle\int_x^{2x} \cos^2 t\,dt$

$\boxed{17}$ 定積分を用いて，次の極限値を求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$$

$\boxed{18}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 $f(x)=x+\displaystyle\int_0^1 f(t)e^t dt$

$\boxed{19}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$

$\boxed{20}$ 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

統一テスト（不定積分･定積分）Ｈ３１．２．４ (各5点) Cなし −1 , ( )なし −1 , dx

（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{x}dx$

$\log x$ ← −1

解答　$C$ は積分定数とする。$\dfrac{x^2}{2}+x+\log|x|+C$

$C$ は積分定数とする。

$$\int\frac{x^2+x+1}{x}dx=\int\left(x+1+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{x^2}{2}+x+\log|x|+C$$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int(7^x-3e^x)dx$

解答　$C$ は積分定数とする。$\dfrac{7^x}{\log 7}-3e^x+C$

$C$ は積分定数とする。

$$\int(7^x-3e^x)dx=\frac{7^x}{\log 7}-3e^x+C$$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int\sqrt[3]{5x+1}\,dx$

$\dfrac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+1)^4}+C$　4

解答　$C$ は積分定数とする。$\dfrac{3}{20}(5x+1)\sqrt[3]{5x+1}+C$

$C$ は積分定数とする。

これがないと△し!!

$$\int\sqrt[3]{5x+1}\,dx=\int(5x+1)^{\frac{1}{3}}dx=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}(5x+1)^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{20}(5x+1)\sqrt[3]{5x+1}+C$$

3

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int x\sqrt{2+x}\,dx$

解答　$C$ は積分定数とする。$\dfrac{2}{15}(3x-4)(2+x)\sqrt{2+x}+C$

( ) の中に分数を入れない

$C$ は積分定数とする。

$\sqrt{2+x}=t$ とおくと　$x=t^2-2$，$dx=2tdt$

$$\int x\sqrt{2+x}\,dx=\int(t^2-2)t\cdot 2tdt=2\int(t^4-2t^2)dt=2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2}{3}t^3\right)+C$$　3

$$=\frac{2}{15}(3t^2-10)t^3+C=\frac{2}{15}(3x-4)(2+x)\sqrt{2+x}+C$$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int\cos^3x\sin x\,dx$

解答　$C$ は積分定数とする。　$-\dfrac{1}{4}\cos^4x+C$

$C$ は積分定数とする。

$\cos x=u$ とおくと　$(-\sin x)dx=du$

$$\int\cos^3x\sin x\,dx=-\int\cos^3x(-\sin x)dx=-\int u^3du=-\frac{u^4}{4}+C=-\frac{1}{4}\cos^4x+C$$

3

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx$

$\dfrac{1}{3}\log(x^3+3x^2+1)+C$　−1

解答　$C$ は積分定数とする。$\dfrac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1|+C$

$C$ は積分定数とする。

置換積分 (でなくても よい…

$$\int\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx=\int\frac{\frac{1}{3}(x^3+3x^2+1)'}{x^3+3x^2+1}dx=\frac{1}{3}\log|x^3+3x^2+1|+C$$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int x\sin 2x\,dx$

$\sin 2x=(-\cos 2x)'$ ミスが多し。

解答　$C$ は積分定数とする。$-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

$C$ は積分定数とする。

$$\int x\sin 2x\,dx=\int x\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)'dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$　3

$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$\boxed{8}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+2)}$

解答　$C$ は積分定数とする。$\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x}{x+2}\right|+C$

$C$ は積分定数とする。

$$\int\frac{dx}{x(x+2)}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}(\log|x|-\log|x+2|)+C$$　3

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x}{x+2}\right|+C$$　4

$\boxed{9}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int\cos 3x\sin 5x\,dx$

$\frac{1}{2}$ ない者多し

解答　$C$ は積分定数とする。$-\dfrac{1}{16}\cos 8x-\dfrac{1}{4}\cos 2x+C$

$C$ は積分定数とする。

$$\int\cos 3x\sin 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)dx=-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$$

3

$\boxed{10}$ 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx$

解答　$1-\dfrac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$$

3

$\boxed{11}$ 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_0^9\left|\sqrt{x}-2\right|dx$

解答　$\dfrac{16}{3}$

$0\leqq x\leqq 4$ のとき　$|\sqrt{x}-2|=2-\sqrt{x}$

$4\leqq x\leqq 9$ のとき　$|\sqrt{x}-2|=\sqrt{x}-2$

よって　$\displaystyle\int_0^9|\sqrt{x}-2|dx=\int_0^4(2-\sqrt{x})dx+\int_4^9(\sqrt{x}-2)dx$　3

$$=\left[2x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^4+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2x\right]_4^9$$

$$=\left(8-\frac{16}{3}\right)+(18-18)-\left(\frac{16}{3}-8\right)=\frac{16}{3}$$

$\boxed{12}$ 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_1^2 x^4\log x\,dx$

解答　$\dfrac{32}{5}\log 2-\dfrac{31}{25}$

$$\int_1^2x^4\log x\,dx=\int_1^2\left(\frac{x^5}{5}\right)'\log x\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\log x\right]_1^2-\int_1^2\frac{x^4}{5}dx$$　3

$$=\left(\frac{32}{5}\log 2-0\right)-\left[\frac{x^5}{25}\right]_1^2=\frac{32}{5}\log 2-\frac{1}{25}(32-1)=\frac{32}{5}\log 2-\frac{31}{25}$$

$\boxed{13}$ 次の不定積分を求めよ。$\displaystyle\int x^2e^x\,dx$

因数分解 (した方が望ましい.

解答　$C$ は積分定数とする。$(x^2-2x+2)e^x+C$

$C$ は積分定数とする。

$$\int x^2e^xdx=\int x^2(e^x)'dx=x^2e^x-2\int xe^xdx$$

$$=x^2e^x-2\int x(e^x)'dx=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx$$　3

$$=(x^2-2x+2)e^x+C$$

$\boxed{14}$ $a>0$ とする。次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

積分区間が 0→a のままの者多し

解答　$\dfrac{1}{4}\pi a^2$

$x=a\sin\theta$ とおくと　$dx=a\cos\theta\,d\theta$

$x$ と $\theta$ の対応は右のようにとれる。

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | $0\longrightarrow$ | $a$ |
| $\theta$ | $0\longrightarrow$ | $\dfrac{\pi}{2}$ |

この範囲において $\cos\theta\geqq 0$ であるから

$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos\theta)\cdot a\cos\theta\,d\theta=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta$　3

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{1}{4}\pi a^2$$

$\boxed{15}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}$

積分区間が $0\to\sqrt{3}$ の時の書き方し

解答 $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\quad dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$x$ と $\theta$ の対応は右のようにとれる。

| $x$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $\dfrac{\pi}{4}$ |

$\dfrac{\pi}{3}$ 多し.

よって $\quad\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^2+3}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

△3

$\boxed{16}$ 次の関数を $x$ で微分せよ。 $\displaystyle\int_x^{2x}\cos^2t\,dt$

解答 $2\cos^22x-\cos^2x$

$F'(t)=\cos^2t$ とすると $\quad\displaystyle\int_x^{2x}\cos^2t\,dt=\Big[F(t)\Big]_x^{2x}=F(2x)-F(x)$

よって $\quad\displaystyle\frac{d}{dx}\int_x^{2x}\cos^2t\,dt=\frac{d}{dx}\{F(2x)-F(x)\}$

$$=F'(2x)\cdot(2x)'-F'(x)$$

$$=2\cos^22x-\cos^2x$$

△3

$2\cdot\dfrac{1+\cos4x}{2}-\dfrac{1+\cos2x}{2}$

$=\dfrac{1}{2}+\cos4x-\dfrac{1}{2}\cos2x$

$\boxed{17}$ 定積分を用いて，次の極限値を求めよ。

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{2n}+\sin\frac{2\pi}{2n}+\sin\frac{3\pi}{2n}+\cdots\cdots+\sin\frac{n\pi}{2n}\right)$$

これができない書き方し

解答 $\dfrac{2}{\pi}$

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{k}{n}\right)=\int_0^1\sin\frac{\pi}{2}x\,dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x\right]_0^1=\frac{2}{\pi}$$

△3

$\boxed{18}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 $\quad f(x)=x+\displaystyle\int_0^1f(t)e^tdt$

解答 $f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

$\displaystyle\int_0^1f(t)e^tdt=a$ とおくと $\quad f(x)=x+a\quad\cdots\cdots①$

よって $\quad\displaystyle\int_0^1f(t)e^tdt=\int_0^1(t+a)e^tdt=\int_0^1(t+a)(e^t)'dt$

$$=\Big[(t+a)e^t\Big]_0^1-\int_0^1e^tdt=\{(1+a)e-a\}-\Big[e^t\Big]_0^1$$

$$=(e-1)a+1$$

△3

これより，$a=(e-1)a+1$ であるから $\quad a=-\dfrac{1}{e-2}$ ← これが出ない。

これを①に代入して $\quad f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$

$\boxed{19}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}$

解答 $\dfrac{1}{3}\log2+\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$

$\dfrac{1}{1+x^3}=\dfrac{a}{1+x}+\dfrac{bx+c}{1-x+x^2}$ が恒等式になるような定数 $a$，$b$，$c$ を定める。分母をはらって $\quad 1=a(x^2-x+1)+(bx+c)(1+x)$

よって $\quad 1=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$

係数を比較して $\quad a+b=0$， $-a+b+c=0$， $a+c=1$

解いて $\quad a=\dfrac{1}{3}$， $b=-\dfrac{1}{3}$， $c=\dfrac{2}{3}$

ゆえに $\quad\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{3}\int_0^1\frac{x-2}{1-x+x^2}dx$

△2

ここで $\quad\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log2$

また $\quad\displaystyle\int_0^1\frac{x-2}{1-x+x^2}dx=\int_0^1\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$ と変形して

$x-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta$ とおくと

| $x$ | $0$ | $\longrightarrow$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $\theta$ | $-\dfrac{\pi}{6}$ | $\longrightarrow$ | $\dfrac{\pi}{6}$ |

$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{\cos^2\theta}\quad$ より $\quad dx=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$$\int_0^1\frac{x-2}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta\right)-2}{\frac{3}{4}(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan\theta-\frac{3}{2}\right)d\theta\qquad(\tan\theta\text{ は奇関数})$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{3}{2}\right)d\theta=-2\sqrt{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

以上より $\quad\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\frac{1}{3}\cdot\log2-\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)=\frac{1}{3}\log2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

$\boxed{20}$ 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。

解答 $\dfrac{27}{16}$

logとることに気付いて

△2

$a_n=\left\{\dfrac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}\right\}^{\frac{1}{n}}$ とおくと

$$\log\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)=\lim_{n\to\infty}(\log a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n+1)(2n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(2n+n)}{(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdots\cdot(n+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\log\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}+\log\frac{2+\frac{2}{n}}{1+\frac{2}{n}}+\cdots\cdots+\log\frac{2+\frac{n}{n}}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{2+\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\log\frac{2+x}{1+x}dx$$

$$=\int_0^1\log(2+x)dx-\int_0^1\log(1+x)dx$$

$$=\Big[(2+x)\log(2+x)-x\Big]_0^1-\Big[(1+x)\log(1+x)-x\Big]_0^1$$

$$=3\log3-1-2\log2-(2\log2-1)=\log\frac{27}{16}$$

よって $\quad\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{27}{16}$