第２回定期考査（積分法･面積）Ｈ２８．７．１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int \frac{3x^3-x^2+5x+1}{x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int (2^t-7^t\log 7)dt$

(3) $\displaystyle\int (4-5x)^5 dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{2}{6x+5}dx$

(5) $\displaystyle\int (x-1)\sqrt{x-2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int x\cos 4x\,dx$

$\boxed{2}$ 次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x|dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{dx}{x^2+3}$

$\boxed{3}$ 関数 $F(x)=\displaystyle\int_1^x (x-t)\log\sqrt{t}\,dt$ を x で微分せよ。

$\boxed{4}$ 等式 $f(x)=x^2+\displaystyle\int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ 定積分を利用して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ 不等式 $\displaystyle\frac{1}{3}<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac{1}{2}$ を証明せよ。

$\boxed{7}$ 媒介変数で表された次の曲線と，x軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

$$x=t^2,\ y=2t-t^2\ (0\leqq t\leqq 2)$$

$\boxed{8}$ $0\leqq x\leqq \pi$ において，2つの曲線 $y=\sin x$，$y=\sin 2x$ で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

$\boxed{9}$ 2つの曲線 $y=ax^2$，$y=\log x$ はただ1点を共有し，その点におけるそれぞれの接線は一致するものとする。

(1) 定数 a の値と共有点の座標を求めよ。

(2) この2つの曲線とx軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

1 次の不定積分を求めよ。

(1) $\int \frac{3x^3-x^2+5x+1}{x^2}dx$

$= \int \left(3x - 1 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = \frac{3}{2}x^2 - x + 5\log|x| - \frac{1}{x} + C$

5

(2) $\int (2^t - 7^t \log 7)dt$

$= \frac{2^t}{\log 2} - \frac{7^t \log 7}{\log 7} + C = \frac{2^t}{\log 2} - 7^t + C$

5

(3) $\int (4-5x)^5 dx$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{(-5)}(4-5x)^6 + C = -\frac{1}{30}(4-5x)^6 + C$

5

(4) $\int \frac{2}{6x+5}dx$

$= 2 \times \frac{1}{6}\log|6x+5| + C = \frac{1}{3}\log|6x+5| + C$

5

(5) $\int (x-1)\sqrt{x-2}\,dx$

$\sqrt{x-2} = t$ とおくと

$x - 2 = t^2$

$x = t^2 + 2$

この式の両辺をtで微分して

$\frac{dx}{dt} = 2t$

$(dx = 2t\,dt)$

$\int (x-1)\sqrt{x-2}\,dx$

$= \int (t^2+2-1)\cdot t \cdot 2t\,dt$

$= 2\int (t^4 + t^2)dt$

$= 2\left(\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right) + C$

$= \frac{2}{15}t^3(3t^2+5) + C$

$= \frac{2}{15}(\sqrt{x-2})^3\{3(x-2)+5\} + C$

$= \frac{2}{15}(x-2)(3x-1)\sqrt{x-2} + C$

5

(6) $\int x\cos 4x\,dx$

$= \int x\left(\frac{1}{4}\sin 4x\right)' dx$

$= x \cdot \frac{1}{4}\sin 4x - \int (x)' \cdot \frac{1}{4}\sin 4x\,dx$

$= \frac{1}{4}x\sin 4x - \frac{1}{4}\int \sin 4x\,dx$

$= \frac{1}{4}x\sin 4x - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right) + C$

$= \frac{1}{4}x\sin 4x + \frac{1}{16}\cos 4x + C$

5

2 次の定積分を求めよ。

$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$

$= -\log|\cos x| + C$

(1) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} |\tan x|dx$

$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} (-\tan x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\,dx$

$= \left[\log|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \log|\cos 0| - \log\left|\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right| - \log\left|\cos\frac{\pi}{3}\right| + \log|\cos 0|$

$= 0 - \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \log\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}\log 2 + \log 2 = \frac{3}{2}\log 2$

6

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$x = 2\sin\theta$ とおくと

$\frac{dx}{d\theta} = 2\cos\theta$

x	$-1 \to 1$
$\sin\theta$	$-\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$
θ	$-\frac{1}{6}\pi \to \frac{1}{6}\pi$

$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta}$

$= 2\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= 2\cos\theta$

よって $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \frac{1}{2\cos\theta} \cdot 2\cos\theta\,d\theta$

$= \int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} d\theta$

$= \left[\theta\right]_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi}$

$= \frac{1}{6}\pi - \left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{1}{3}\pi$

6

(3) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+3}$

$x = \sqrt{3}\tan\theta$ とおくと

$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$0 \to 3$
$\tan\theta$	$0 \to \sqrt{3}$
θ	$0 \to \frac{\pi}{3}$

$\frac{1}{x^2+3} = \frac{1}{(\sqrt{3}\tan\theta)^2+3}$

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\tan^2\theta+1}$

$= \frac{1}{3} \cdot \cos^2\theta$

よって $\int_0^3 \frac{dx}{x^2+3}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\cdot\cos^2\theta \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{3}d\theta$

$= \left[\frac{\sqrt{3}}{3}\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

6

3 関数 $F(x) = \int_1^x (x-t)\log\sqrt{t}\,dt$ を x で微分せよ。

$F(x) = \int_1^x (x\log\sqrt{t} - t\log\sqrt{t})dt$

$= x\int_1^x \log\sqrt{t}\,dt - \int_1^x t\log\sqrt{t}\,dt$

よって

$F'(x) = (x)'\int_1^x \log\sqrt{t}\,dt + x \times \log\sqrt{x} - x\log\sqrt{x}$

$= \frac{1}{2}\int_1^x (t)'\log t\,dt$

$= \frac{1}{2}\left\{\left[t\log t\right]_1^x - \int_1^x t\cdot\frac{1}{t}dt\right\}$

$= \frac{1}{2}\left(x\log x - \left[t\right]_1^x\right)$

$= \frac{1}{2}(x\log x - x + 1)$

6

4 等式 $f(x) = x^2 + \int_0^1 f(t)e^t dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$\int_0^1 f(t)e^t dt = a$ とおく。

すると

$f(x) = x^2 + a \cdots ①$

ここで

$a = \int_0^1 f(t)e^t dt$

$= \int_0^1 (t^2+a)e^t dt$

$= \int_0^1 (t^2+a)(e^t)' dt$

$= \left[(t^2+a)e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2te^t dt$

$= (1+a)e - ae^0 - 2\int_0^1 t(e^t)' dt$

$= (1+a)e - a - 2\left\{\left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot e^t dt\right\}$

$= (1+a)e - a - 2\left\{1\cdot e^1 - 0 - \left[e^t\right]_0^1\right\}$

$= (1+a)e - a - 2(e - e + 1) = (1+a)e - a - 2$

よって

$a = (1+a)e - a - 2$

$a - ae + a = e - 2$

$a(2-e) = e - 2$

$a = -1$

よって $f(x) = x^2 - 1$

6

/60

5 定積分を利用して，極限 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$ を求めよ。

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{k\pi}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\pi\sin^2\left(\frac{k}{n}\right)\pi$

$=\int_0^1\pi\sin^2\pi x\,dx$

$=\pi\int_0^1\frac{1-\cos2\pi x}{2}dx$

$=\frac{\pi}{2}\left[x-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi x\right]_0^1$

$=\frac{\pi}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2\pi}\sin2\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2\pi}\sin0\right)\right\}=\frac{\pi}{2}$ ⑥

6 不等式 $\frac{1}{3}<\int_0^1 x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac{1}{2}$ を証明せよ。

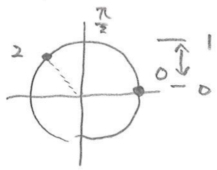
$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

$=1+\sin2x$

$0\leqq x\leqq1$ において，$3<\pi<4$ より $\frac{\pi}{4}<1$ で

あることより $0\leqq2x\leqq2$ において

$\sin2x$ は $0\leqq\sin2x\leqq1$ を満たす



よって

$1\leqq1+\sin2x\leqq2$

したがって，$0\leqq x\leqq1$ において，底は1より小さいので

$x^2\leqq x^{1+\sin2x}\leqq x^1$

0から1まで積分して

$\int_0^1x^2dx<\int_0^1x^{1+\sin2x}dx<\int_0^1x^1dx$

$\left[\frac13x^3\right]_0^1<\int_0^1x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\left[\frac12x^2\right]_0^1$

つまり $\frac13<\int_0^1x^{(\sin x+\cos x)^2}dx<\frac12$ ⑦

7 媒介変数で表された次の曲線と，x軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

$x=t^2,\ y=2t-t^2\ (0\leqq t\leqq2)$

$y=0$ となる t は

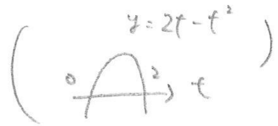
$2t-t^2=0$，$t=0, 2$

$t=0$ のとき $x=0^2=0$

$t=2$ のとき $x=2^2=4$

また $0\leqq t\leqq2$ において

$y\geqq0$ である。



面積 S は

$S=\int_0^4y\,dx$

となる。

ここで $x=t^2$ の両辺を t で微分して

$\frac{dx}{dt}=2t$ ∴ $dx=2t\,dt$

したがって

$S=\int_0^2(2t-t^2)\cdot2t\,dt$

$=2\int_0^2(2t^2-t^3)dt$

$=2\left[\frac23t^3-\frac14t^4\right]_0^2$

$=2\left(\frac23\cdot2^3-\frac14\cdot2^4\right)$

$=\frac{8}{3}$ ⑦

8 $0\leqq x\leqq\pi$ において，2つの曲線 $y=\sin x$，$y=\sin2x$ で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

交点の x 座標は

$\sin x=\sin2x$

$\sin x=2\sin x\cos x$

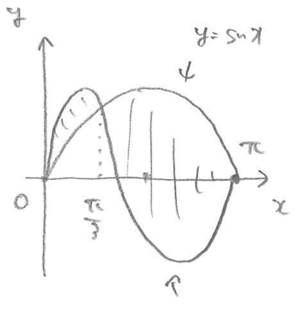
よって

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0$，$\cos x=\frac12$

$0\leqq x\leqq\pi$ より

$x=0,\ \pi,\ \frac{\pi}{3}$



面積 S は

$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin2x-\sin x)dx$

$+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}(\sin x-\sin2x)dx$

$=\left[-\frac12\cos2x+\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$+\left[-\cos x+\frac12\cos2x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}$

$=-\frac12\cos\frac23\pi+\cos\frac{\pi}{3}+\frac12\cos0-\cos0$

$-\cos\pi+\frac12\cos2\pi+\cos\frac{\pi}{3}-\frac12\cos\frac23\pi$

$=\frac14+\frac12+\frac12-1$

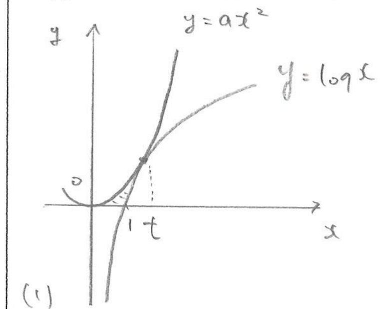
$+1+\frac12+\frac12+\frac14$

$=\frac{5}{2}$ ⑦

9 2つの曲線 $y=ax^2$，$y=\log x$ はただ1点を共有し，その点におけるそれぞれの接線は一致するものとする。

(1) 定数 a の値と共有点の座標を求めよ。

(2) この2つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積Sを求めよ。



(1)

接点の x 座標を t とする。

2曲線のこの点における

y 座標が等しくなるので

$at^2=\log t$ …①

また，$y=ax^2$ より $y'=2ax$

$y=\log x$ より $y'=\frac1x$

この点における接線の

傾きが等しくなるので

$2at=\frac1t$ …②

②より

$at^2=\frac12$ …③

よって，①に代入すると

$\frac12=\log t$

つまり

$t=e^{\frac12}=\sqrt{e}$

③に代入して

$a(\sqrt{e})^2=\frac12$

$a=\frac{1}{2e}$ ④

接点 $(\sqrt{e},\ \frac12)$ ④

(2)

$S=\int_0^1\frac{1}{2e}x^2dx$

$+\int_1^{\sqrt{e}}\left(\frac{1}{2e}x^2-\log x\right)dx$

$=\left[\frac{1}{6e}x^3\right]_0^1$

$+\left[\frac{1}{6e}x^3-(x\log x-x)\right]_1^{\sqrt{e}}$

$=\frac{1}{6e}+\frac{1}{6e}(\sqrt{e})^3-\sqrt{e}\cdot\frac12+\sqrt{e}$

$-\frac{1}{6e}+0-1$

$=\frac{1}{6e}+\frac{\sqrt{e}}{6}-\frac{\sqrt{e}}{2}+\sqrt{e}-\frac{1}{6e}-1$

$=\frac{2}{3}\sqrt{e}-1$ ⑤

/40.