統一テスト（積分法･積分法の応用）Ｒ１．１２．２１　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

1 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

2 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

3 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{x}{2x^2-3x+1}dx$

4 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

5 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

6 定積分 $\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}$ を求めよ。

7 次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right)$

8 $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=2x-\tan x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt$ を満たすとする。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

$\boxed{9}$ 次の曲線の長さ L を求めよ。$y=\dfrac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$　$(-6\leqq x\leqq 6)$

$\boxed{10}$ m, n は自然数とする。定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mt\cos nt\,dt$ を求めよ。

$\boxed{11}$ 放物線 $y=2-x^2$ と直線 $y=-x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{12}$ 正の実数 x に対し，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ と定める。また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点Pにおける接線を ℓ とする。

(1)　点Pの座標を求めよ。

(2)　ℓ の方程式を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

　(不定積分でCなし -2 ，絶対値なし -2)　　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

tを戻さない者多し

解答 C は積分定数とする。 $2(x-3)\sqrt{x+1}+C$ (7)

C は積分定数とする。

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと　$x=t^2-1$, $dx=2tdt$

$$\int\frac{3x-1}{\sqrt{x+1}}dx=\int\frac{3t^2-4}{t}\cdot 2tdt=2\int(3t^2-4)dt=2(t^3-4t)+C$$ (4)

$$=2(t^2-4)t+C=2(x-3)\sqrt{x+1}+C$$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$

$x\tan x-\log|\cos x|+C$ 多し

解答 C は積分定数とする。 $x\tan x+\log|\cos x|+C$ (7)

C は積分定数とする。

$$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int x(\tan x)'dx=x\tan x-\int\tan x\,dx=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$ (4)

$$=x\tan x+\int\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx=x\tan x+\log|\cos x|+C$$

$\log(\cos x)$ -2

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{x}{2x^2-3x+1}dx$

解答 C は積分定数とする。 $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{(x-1)^2}{|2x-1|}+C$ (7)

C は積分定数とする。

$\dfrac{x}{2x^2-3x+1}=\dfrac{x}{(x-1)(2x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{2x-1}$ とおくと

(右辺)$=\dfrac{(2a+b)x+(-a-b)}{(x-1)(2x-1)}$ より，$2a+b=1$，$-a-b=0$ つまり $a=1$，$b=-1$

$\dfrac{x}{2x^2-3x+1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2x-1}$ (4) であるから

$$\int\frac{x}{2x^2-3x+1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-1}\right)dx=\log|x-1|-\frac{1}{2}\log|2x-1|+C$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{(x-1)^2}{|2x-1|}+C$$

$\frac{1}{2}$ のない者多し．

$\boxed{4}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

$|\sin x+\cos x|=|\sin x|+|\cos x|$ という ミス多し

解答 $2\sqrt{2}$ (8)

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqq 0$

$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 0$

よって　$\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$

$$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}$$ (4)

$$=\sqrt{2}\left\{\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}-\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right\}=2\sqrt{2}$$

$\boxed{5}$ 次の定積分を求めよ。$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

解答 $\dfrac{\pi}{6}$ (8)

$x=4\sin\theta$ とおくと　$dx=4\cos\theta\,d\theta$

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$2\longrightarrow 2\sqrt{3}$
θ	$\dfrac{\pi}{6}\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

この範囲において $\cos\theta>0$ であるから

$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{16\cos^2\theta}=4\cos\theta$

よって　$\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos\theta}{4\cos\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\Big[\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{6}$ (4)

$\boxed{6}$ 定積分 $\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}$ を求めよ。

解答 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$ (8)

$$\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}$$

$x-1=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$dx=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$ (3)

x と θ の対応は右のようにとれる。

x	$1\longrightarrow 4$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{3}$

よって　$\displaystyle\int_1^4\frac{dx}{x^2-2x+4}=\int_1^4\frac{dx}{(x-1)^2+3}$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3(\tan^2\theta+1)}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$

$\boxed{7}$ 次の極限値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right)$

解答 1 (7)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+3e^{\frac{3}{n}}+\cdots\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}$$

$$=\int_0^1 xe^x dx$$ (3)

$$=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1(x)'e^x dx$$

$$=e-0-\Big[e^x\Big]_0^1=1$$

$\boxed{8}$ $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ は等式 $f(x)=2x-\tan x+\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt$ を満たすとする。

(1) 不定積分 $\displaystyle\int x\cos x\,dx$ を求めよ。

(2) $f(0)$ の値を求めよ。

解答 (1) $x\sin x+\cos x+C$ (Cは積分定数) (7)　(2) $\dfrac{\pi}{3}+3\sqrt{3}-6$ (8)

(1) $\displaystyle\int x\cos x\,dx=\int x(\sin x)'dx=x\sin x-\int(x)'\sin x\,dx$

$=x\sin x-(-\cos x)+C$

$=x\sin x+\cos x+C$　(C は積分定数)

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt$ は定数より $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}f(t)\cos t\,dt=k$ …①とおく。すると

$f(x)=2x-\tan x+k$ となる。また，$f(0)=k$ より，以下では k を求める。

$f(t)=2t-\tan t+k$ となるから①に代入して

$$k=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2t-\tan t+k)\cos t\,dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}t\cos t\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin t\,dt+k\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos t\,dt$$

$$=2\Big[t\sin t+\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\Big[\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+k\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=2\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-0-1\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)+k\left(\frac{1}{2}-0\right)$$

$$=\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\sqrt{3}-3+\frac{1}{2}k$$ (4)

ゆえに　$k=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}-3+\dfrac{1}{2}k$ より，k についての方程式を解いて

$$k=\frac{\pi}{3}+3\sqrt{3}-6$$

/67

$\boxed{9}$ 次の曲線の長さ L を求めよ。$y=\frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)$ $(-6\leqq x\leqq 6)$

解答 $3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$ 7

$y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)$ であるから $1+y'^2=1+\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}}-e^{-\frac{x}{3}}\right)^2=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)^2$

$e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}>0$ であるから

$$L=\int_{-6}^{6}\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=\int_0^6\left(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}}\right)dx=\left[3e^{\frac{x}{3}}-3e^{-\frac{x}{3}}\right]_0^6=3\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$$

4

$\boxed{10}$ m, n は自然数とする。定積分 $\int_0^{2\pi}\cos mt\cos nt\,dt$ を求めよ。

解答 $m\neq n$ のとき 0, $m=n$ のとき π 8

$$\int_0^{2\pi}\cos mt\cos nt\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)t+\cos(m-n)t\}dt$$ 2

よって

$m\neq n$ のとき

$$与式=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)t}{m+n}+\frac{\sin(m-n)t}{m-n}\right]_0^{2\pi}=0$$ 4

$m=n$ のとき

$$与式=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2mt+1)dt=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2mt}{2m}+t\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2}(2\pi-0)=\pi$$

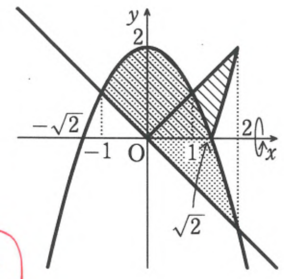
したがって　$m\neq n$ のとき 0, $m=n$ のとき π 4

$\boxed{11}$ 放物線 $y=2-x^2$ と直線 $y=-x$ で囲まれた部分が，x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

解答 $\left(4+\frac{32\sqrt{2}}{15}\right)\pi$ 8

$2-x^2=-x$ を解くと　$x=-1$, 2

回転体は，右の図の斜線部分が，x 軸の周りに1回転したものであるから



$$V=\pi\int_{-1}^{1}(2-x^2)^2dx+\pi\int_1^2x^2dx-\pi\int_{-1}^{0}(-x)^2dx-\pi\int_{\sqrt{2}}^{2}(x^2-2)^2dx$$

$$=2\pi\left[4x-\frac{4}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right]_0^1+\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{4}{3}x^3+4x\right]_{\sqrt{2}}^2$$ 4

$$=\left(4+\frac{32\sqrt{2}}{15}\right)\pi$$

・式は正しいが
答えの出ない答かし

・$\int_{-1}^{0}\pi\{(2-x^2)-(-x)\}^2dx$

などという式があれ

$\int_{-1}^{0}\pi(2-x^2)^2dx-\int_{-1}^{0}\pi(-x)^2dx$

が正しい

$\boxed{12}$ 正の実数 x に対し，関数 $f(x)$ を $f(x)=\frac{\log x}{x}$ と定める。また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点Pにおける接線を ℓ とする。

標準レベルの問題です

(1) 点Pの座標を求めよ。

(2) ℓ の方程式を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

解答 (1) $\left(e\sqrt{e},\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ (2) $y=-\frac{1}{2e^3}x+\frac{2}{e\sqrt{e}}$ 3

(3) $S=\frac{27}{8}$ 5 2

(1) $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\log x)\cdot 2x}{x^4}$

$=\dfrac{2\log x-3}{x^3}$

よって　$f'(x)=0$ のとき　$x=e$

$f''(x)=0$ のとき　$x=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

したがって，$f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	$e\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘	$\frac{3}{2e\sqrt{e}}$	↘

よって，曲線 $y=f(x)$ の変曲点は $\left(e\sqrt{e},\ \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$

(2) $f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$ であるから，点Pにおける接線の方程式は

$$y-\frac{3}{2e\sqrt{e}}=\frac{1-\frac{3}{2}}{e^3}(x-e\sqrt{e})$$　よって　$y=-\frac{1}{2e^3}x+\frac{2}{e\sqrt{e}}$

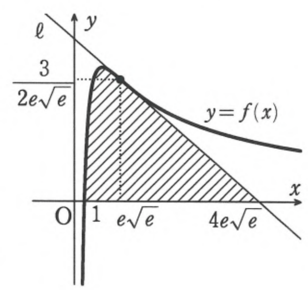
(3) $\int f(x)dx=\int\frac{\log x}{x}dx=\int\log x\cdot(\log x)'dx=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$ (C は積分定数)

$y=-\frac{1}{2e^3}x+\frac{2}{e\sqrt{e}}$ において $y=0$ とすると

$x=4e\sqrt{e}$ であるから，接線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $4e\sqrt{e}$ である。

また，$f(x)=0$ のとき　$x=1$

したがって，S は右の図の斜線部分の面積であるから



$$S=\int_1^{e\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}dx+\frac{1}{2}\times(4e\sqrt{e}-e\sqrt{e})\times\frac{3}{2e\sqrt{e}}$$

$$=\left[\frac{1}{2}(\log x)^2\right]_1^{e\sqrt{e}}+\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$$

/33