数学演習（数Ⅲ積分法）Ｈ２７．１０．３　　　　　　　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{(x-2)(x-3)}{x^3}dx$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{7x+3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int 2^{7x+5}dx$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\log x}$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\sin 2x\sin 4x\,dx$

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

$\boxed{9}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt=a\cos^2 x+ax+1$

$\boxed{10}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　$f(x)=e^x-\int_0^1 f(t)\,dt$

$\boxed{11}$ 次の定積分を求めよ。　$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$\boxed{12}$ 次の極限値を，積分を用いて求めよ。　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{4n^2-k^2}}{n^2}$

$\boxed{13}$ 曲線 $y=e^x$ と3直線 $y=e$，$y=e^2$，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

$\boxed{14}$ $a>0$ とする。曲線 $y=\sin 2x$ $\left(0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

$\boxed{15}$ 放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{1}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{(x-2)(x-3)}{x^3}dx$

解答 $\log|x|+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

$$\int\frac{(x-2)(x-3)}{x^3}dx=\int\frac{x^2-5x+6}{x^3}dx=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)dx$$

$$=\log|x|+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+C$$

$\boxed{2}$ 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\sqrt{7x+3}\,dx$　　(2) $\displaystyle\int 2^{7x+5}dx$

解答 (1) $\dfrac{2}{21}(7x+3)\sqrt{7x+3}+C$ 6　(2) $\dfrac{2^{7x+5}}{7\log 2}+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

(1) $$\int\sqrt{7x+3}\,dx=\int(7x+3)^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$=\frac{2}{21}(7x+3)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{21}(7x+3)\sqrt{7x+3}+C$$

(2) $$\int 2^{7x+5}dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{2^{7x+5}}{\log 2}+C=\frac{2^{7x+5}}{7\log 2}+C$$

$\boxed{3}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{dx}{x\log x}$

解答 $\log|\log x|+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

$\log x=t$ とおくと　$\dfrac{1}{x}dx=dt$

$$\int\frac{dx}{x\log x}=\int\frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log|\log x|+C$$

$\boxed{4}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx$

解答 $\dfrac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

$\sqrt{x+2}=t$ とおくと　$x+2=t^2$,　$x=t^2-2$,　$dx=2tdt$

$$\int(2x+1)\sqrt{x+2}\,dx=\int(2t^2-3)t\cdot 2tdt=2\int(2t^4-3t^2)dt=2\left(\frac{2}{5}t^5-t^3\right)+C$$

$$=\frac{2}{5}t^3(2t^2-5)+C=\frac{2}{5}(2x-1)(x+2)\sqrt{x+2}+C$$

$\boxed{5}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$

解答 $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

$$\int x^2e^{-x}dx=\int x^2(-e^{-x})'dx=-x^2e^{-x}+\int(x^2)'e^{-x}dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\int xe^{-x}dx=-x^2e^{-x}+2\int x(-e^{-x})'dx$$

$$=-x^2e^{-x}+2\left\{-xe^{-x}+\int(x)'e^{-x}dx\right\}$$

$$=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+2\int e^{-x}dx=-(x^2+2x+2)e^{-x}+C$$

$\boxed{6}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-9}$

解答 $\dfrac{1}{6}\log\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

$$\int\frac{dx}{x^2-9}=\int\frac{dx}{(x+3)(x-3)}=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\log|x-3|-\log|x+3|)+C=\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$$

$\boxed{7}$ 次の不定積分を求めよ。 $\displaystyle\int\sin 2x\sin 4x\,dx$

解答 $-\dfrac{\sin 6x}{12}+\dfrac{\sin 2x}{4}+C$ 6

解説

C は積分定数とする。

$$\int\sin 2x\sin 4x\,dx=-\frac{1}{2}\int(\cos 6x-\cos 2x)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 6x}{6}-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C$$

$$=-\frac{\sin 6x}{12}+\frac{\sin 2x}{4}+C$$

$\boxed{8}$ 次の定積分を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

解答 $2\sqrt{2}$ 6

解説

合成して　$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$0\leqq x\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\geqq 0$　　$\dfrac{3}{4}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 0$

よって　$$\int_0^{\pi}|\sin x+\cos x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$=\sqrt{2}\left\{\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi}-\left[-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\right\}$$

$$=\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right\}=2\sqrt{2}$$

$\boxed{9}$ 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt=a\cos^2x+ax+1$

解答 $f(x)=\sin 2x-1$,　$a=-1$ 6 (各3)

解説

両辺を x で微分すると

$f(x)=2a\cos x(-\sin x)+a$

$\quad=-2a\sin x\cos x+a=a(-\sin 2x+1)$

また，与えられた等式で $x=0$ とおくと，左辺は 0 になるから

$0=a+1$　　ゆえに　$a=-1$

よって　$f(x)=\sin 2x-1$

/60

10 次の等式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。 $f(x)=e^x-\int_0^1 f(t)\,dt$

解答 $f(x)=e^x-\dfrac{e-1}{2}$ 6

解説

$\int_0^1 f(t)\,dt=a$ （a は定数）とおくと $f(x)=e^x-a$ ……①

よって $\int_0^1(e^t-a)\,dt=\left[e^t-at\right]_0^1=e-a-1$

ゆえに，$a=e-a-1$ から $a=\dfrac{e-1}{2}$

これを①に代入して $f(x)=e^x-\dfrac{e-1}{2}$

11 次の定積分を求めよ。 $\int_0^1\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$

解答 $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$ 6

解説

$x=\tan\theta$ とおくと $dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{4}$

よって $\int_0^1\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{(\tan^2\theta+1)^2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\theta)\,d\theta=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$$

12 次の極限値を，積分を用いて求めよ。 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sqrt{4n^2-k^2}}{n^2}$

解答 $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 6

解説

求める極限値を S とする。

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n^2\left(4-\dfrac{k^2}{n^2}\right)}}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$$

ここで，$x=2\sin\theta$ とおくと $dx=2\cos\theta\,d\theta$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow\dfrac{\pi}{6}$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ のとき $\cos\theta\geqq0$ であるから

$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4-4\sin^2\theta}=2\cos\theta$

よって $S=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}(2\cos\theta)\cdot2\cos\theta\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos2\theta)\,d\theta=2\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

13 曲線 $y=e^x$ と3直線 $y=e$，$y=e^2$，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

解答 e^2 6

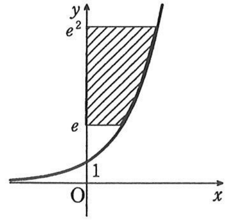
解説

$y=e^x$ から $x=\log y$

$e\leqq y\leqq e^2$ では，$x>0$ であるから

$$S=\int_e^{e^2}\log y\,dy=\left[y\log y-y\right]_e^{e^2}$$

$$=(e^2\cdot2-e^2)-(e\cdot1-e)=e^2$$



14 $a>0$ とする。曲線 $y=\sin2x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を，曲線 $y=a\sin x$ が 2 等分するように定数 a の値を定めよ。

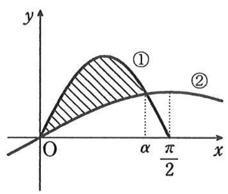
解答 $a=2-\sqrt{2}$ 8

解説

$y=\sin2x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ ……①，$y=a\sin x$ ……② とおく。

曲線②が，曲線①と x 軸で囲まれた部分の面積を2等分するとき，①，②の原点以外の交点の x 座標を α とすると，$\sin2\alpha=a\sin\alpha$ から

$2\sin\alpha\cos\alpha=a\sin\alpha$



$\sin\alpha>0$ であるから $\cos\alpha=\dfrac{a}{2}$

ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $0<\dfrac{a}{2}<1$

すなわち $0<a<2$ ……③

題意から $\int_0^{\alpha}(\sin2x-a\sin x)\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x\,dx$

ここで $\int_0^{\alpha}(\sin2x-a\sin x)\,dx=\left[-\dfrac{\cos2x}{2}+a\cos x\right]_0^{\alpha}$

$$=-\frac{\cos2\alpha-1}{2}+a(\cos\alpha-1)$$

$$=-\frac{(2\cos^2\alpha-1)-1}{2}+a\cos\alpha-a$$

$$=\frac{a^2}{4}-a+1\quad\left(\cos\alpha=\frac{a}{2}\text{ から}\right)$$

一方 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2x\,dx=\left[-\dfrac{\cos2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

ゆえに $\dfrac{a^2}{4}-a+1=\dfrac{1}{2}\times1$

よって $a^2-4a+2=0$ これを解くと $a=2\pm\sqrt{2}$

③を満たすものは $a=2-\sqrt{2}$

15 放物線 $y=x^2-4$ と直線 $y=3x$ で囲まれた部分を，x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

解答 132π 8

解説

$x^2-4=3x$ を解くと $x=-1,\ 4$

$x>0$ の範囲で $4-x^2=3x$ を解くと $x=1$

題意の回転体は，図の網目の部分を x 軸の周りに1回転すると得られる。したがって，求める体積は

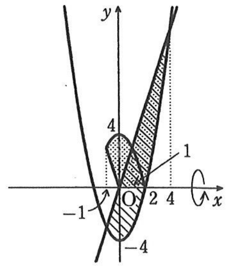
$$V=\pi\int_{-1}^{1}(4-x^2)^2dx+\pi\int_1^4(3x)^2dx$$

$$-\pi\int_{-1}^{0}(-3x)^2dx-\pi\int_2^4(x^2-4)^2dx$$

$$=2\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_0^1+\pi\left[3x^3\right]_1^4$$

$$-\pi\left[3x^3\right]_{-1}^0-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8}{3}x^3+16x\right]_2^4$$

$$=\frac{406}{15}\pi+189\pi-3\pi-\frac{1216}{15}\pi=132\pi$$



140