数学演習（速度と加速度･近似式）Ｒ１．７．３１

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ (1)　原点を出発して数直線上を動く点Ｐの座標が，時刻 t の関数として，$x=t^3-10t^2+24t$ $(t>0)$ で表されるという。点Ｐが原点に戻ったときの速度 v と加速度 α を求めよ。

(2)　座標平面上を運動する点Ｐの，時刻 t における座標が $x=4\cos t$，$y=\sin 2t$ で表されるとき，$t=\dfrac{\pi}{3}$ における点Ｐの速さと加速度の大きさを求めよ。

$\boxed{2}$ (1)　動点Ｐが，原点Ｏを中心とする半径 r の円周上を，定点 P_0 から出発して，OPが1秒間に角 ω の割合で回転するように等速円運動をしている。Ｐの加速度の大きさを求めよ。

(2)　$a>0$，$\omega>0$ とする。座標平面上を運動する点Ｐの，時刻 t における座標が $x=a(\omega t-\sin\omega t)$，$y=a(1-\cos\omega t)$ で表されるとき，加速度の大きさは一定であることを示せ。

$\boxed{3}$ 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $(x>0,\ y>0)$ 上の動点Ｐが一定の速さ２で x 座標が増加する向きに移動している。$x=\sqrt{3}$ における速度と加速度を求めよ。

$\boxed{4}$ 底面の半径が 5 cm，高さが 10 cm の直円錐状の容器を逆さまに置く。この容器に $2\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ の割合で静かに水を注ぐ。水の深さが 4 cm になる瞬間において，次のものを求めよ。

(1) 水面の上昇する速さ　　(2) 水面の面積の増加する割合

$\boxed{5}$ 表面積が $4\pi\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ の一定の割合で増加している球がある。半径が 10 cm になる瞬間において，以下のものを求めよ。

(1) 半径の増加する速度　　(2) 体積の増加する速度

$\boxed{6}$ (1) $|x|$ が十分小さいとき，次の関数の 1 次の近似式，2 次の近似式を作れ。

（ア） $f(x)=\log(1+x)$　　（イ） $f(x)=\sqrt{1+\sin x}$

(2) 1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ。ただし， $\pi=3.14$，$\sqrt{3}=1.73$ として小数第 2 位まで求めよ。

（ア） $\cos 61^\circ$　　（イ） $\sqrt[3]{340}$　　（ウ） $\sqrt{1+\pi}$

$\boxed{7}$ (1)　球の体積 V が 1 % 増加するとき，球の半径 r と球の表面積 S は，それぞれ約何 % 増加するか。

(2)　AD∥BC の等脚台形 ABCD において，AB＝2 cm，BC＝4 cm，∠B＝60° とする。∠B が 1° だけ増えたとき，台形 ABCD の面積 S は，ほぼどれだけ増えるか。ただし，$\pi=3.14$ とする。

$\boxed{8}$ 座標平面上の動点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\dfrac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$ で表されるとき，点 P の速度の大きさの最大値を求めよ。

1 (1) 原点を出発して数直線上を動く点Ｐの座標が，時刻 t の関数として，$x=t^3-10t^2+24t$ $(t>0)$ で表されるという。点Ｐが原点に戻ったときの速度 v と加速度 α を求めよ。

(2) 座標平面上を運動する点Ｐの，時刻 t における座標が $x=4\cos t$，$y=\sin 2t$ で表されるとき，$t=\dfrac{\pi}{3}$ における点Ｐの速さと加速度の大きさを求めよ。

解答 (1) $t=4$ のとき $v=-8$，$\alpha=4$；$t=6$ のとき $v=12$，$\alpha=16$
(2) 速さ $\sqrt{13}$，加速度の大きさ 4

解説

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-20t+24$ ……①，$\alpha=\dfrac{dv}{dt}=6t-20$ ……②

$x=0$ とすると　$t^3-10t^2+24t=0$

ゆえに　$t(t-4)(t-6)=0$　　よって　$t=0,\ 4,\ 6$

$t>0$ で点Ｐが原点に戻るのは $t=4,\ 6$ のときである。

したがって，①，② から

$t=4$ のとき　$v=3\cdot4^2-20\cdot4+24=-8$，$\alpha=6\cdot4-20=4$

$t=6$ のとき　$v=3\cdot6^2-20\cdot6+24=12$，$\alpha=6\cdot6-20=16$

(2) 点Ｐの時刻 t における速度ベクトルを $\vec{v}$，加速度ベクトルを $\vec{\alpha}$ とすると

$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(-4\sin t,\ 2\cos 2t)$

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(-4\cos t,\ -4\sin 2t)$

$t=\dfrac{\pi}{3}$ を代入すると　$\vec{v}=\left(-4\sin\dfrac{\pi}{3},\ 2\cos\dfrac{2}{3}\pi\right)=(-2\sqrt{3},\ -1)$

$\vec{\alpha}=\left(-4\cos\dfrac{\pi}{3},\ -4\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)=(-2,\ -2\sqrt{3})$

よって，速さは　$|\vec{v}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{13}$

加速度の大きさは　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{16}=4$

2 (1) 動点Ｐが，原点Ｏを中心とする半径 r の円周上を，定点 P_0 から出発して，ＯＰが１秒間に角 ω の割合で回転するように等速円運動をしている。Ｐの加速度の大きさを求めよ。

(2) $a>0$，$\omega>0$ とする。座標平面上を運動する点Ｐの，時刻 t における座標が $x=a(\omega t-\sin\omega t)$，$y=a(1-\cos\omega t)$ で表されるとき，加速度の大きさは一定であることを示せ。

解答 (1) $r\omega^2$　(2) 略

解説

(1) 加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ は，$\vec{\alpha}=(-r\omega^2\cos(\omega t+\beta),\ -r\omega^2\sin(\omega t+\beta))$ であるから

$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(-r\omega^2)^2\cos^2(\omega t+\beta)+(-r\omega^2)^2\sin^2(\omega t+\beta)}=\sqrt{(r\omega^2)^2}$

$r>0$ であるから　$|\vec{\alpha}|=r\omega^2$

(2) 点Ｐの時刻 t における速度ベクトルを $\vec{v}$，加速度ベクトルを $\vec{\alpha}$ とすると

$\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=(a(\omega-\omega\cos\omega t),\ a\omega\sin\omega t)$

$\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(a\omega^2\sin\omega t,\ a\omega^2\cos\omega t)$

よって，加速度の大きさは　$|\vec{\alpha}|=\sqrt{(a\omega^2\sin\omega t)^2+(a\omega^2\cos\omega t)^2}=\sqrt{(a\omega^2)^2}$

$a>0$，$\omega>0$ であるから，加速度の大きさは $a\omega^2$ で一定である。

3 楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ $(x>0,\ y>0)$ 上の動点Ｐが一定の速さ２で x 座標が増加する向きに移動している。$x=\sqrt{3}$ における速度と加速度を求めよ。

解答 速度 $\left(\dfrac{6}{\sqrt{11}},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$，加速度 $\left(-\dfrac{36\sqrt{3}}{121},\ -\dfrac{54\sqrt{6}}{121}\right)$

解説

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ……① の両辺を t で微分して　$\dfrac{2x}{9}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{y}{2}\cdot\dfrac{dy}{dt}=0$ ……②

Ｐの速さが２であるから　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=2^2$ ……③

x 座標が増加する向きに移動しているから　$\dfrac{dx}{dt}>0$

① から　$y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)$　　$x=\sqrt{3}$ を代入して　$y^2=\dfrac{8}{3}$

$y>0$ であるから　$y=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$x=\sqrt{3}$，$y=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ を ② に代入して　$\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}\cdot\dfrac{dy}{dt}=0$

ゆえに　$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{dx}{dt}$ ……②′

②′ を ③ に代入して，$\left(1+\dfrac{2}{9}\right)\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=4$ から　$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=\dfrac{36}{11}$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ であるから　$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{6}{\sqrt{11}}$　　このとき，②′ から　$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$

よって，$x=\sqrt{3}$ における速度は　$\left(\dfrac{6}{\sqrt{11}},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}\right)$

次に，② の両辺を t で微分して　$\dfrac{2}{9}\left\{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+x\dfrac{d^2x}{dt^2}\right\}+\dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2+y\dfrac{d^2y}{dt^2}\right\}=0$

$x=\sqrt{3}$，$y=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{6}{\sqrt{11}}$，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ を代入して整理すると

$2\dfrac{d^2x}{dt^2}+3\sqrt{2}\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{36\sqrt{3}}{11}$ ……④

また，③ の両辺を t で微分して　$2\dfrac{dx}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}+2\dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{6}{\sqrt{11}}$，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ を代入して整理すると

$3\dfrac{d^2x}{dt^2}-\sqrt{2}\dfrac{d^2y}{dt^2}=0$ ……⑤

④，⑤ から　$\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{36\sqrt{3}}{121}$，$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{54\sqrt{6}}{121}$

よって，$x=\sqrt{3}$ における加速度は　$\left(-\dfrac{36\sqrt{3}}{121},\ -\dfrac{54\sqrt{6}}{121}\right)$

4 底面の半径が 5 cm，高さが 10 cm の直円錐状の容器を逆さまに置く。この容器に 2 cm^3/s の割合で静かに水を注ぐ。水の深さが 4 cm になる瞬間において，次のものを求めよ。

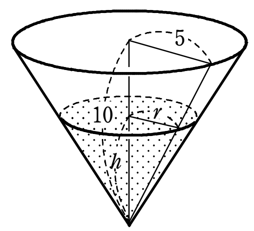
(1) 水面の上昇する速さ　　(2) 水面の面積の増加する割合

解答 (1) $\dfrac{1}{2\pi}$ cm/s　(2) 1 cm^2/s

解説

t 秒後の水の体積を V cm^3 とすると　$\dfrac{dV}{dt}=2$ (cm^3/s) ……①

(1) t 秒後の水面の半径を r cm，水の深さを h cm とすると



条件から　$r:h=5:10$　　よって　$r=\dfrac{h}{2}$

これを $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$ に代入して　$V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{h}{2}\right)^2h=\dfrac{1}{12}\pi h^3$

両辺を t で微分して　$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{1}{4}\pi h^2\dfrac{dh}{dt}$

① から　$2=\dfrac{1}{4}\pi h^2\dfrac{dh}{dt}$　　ゆえに　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{8}{\pi h^2}$

よって，$h=4$ のとき　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{8}{\pi\cdot4^2}=\dfrac{1}{2\pi}$ (cm/s)

別解 $V=2t$ と $V=\dfrac{1}{12}\pi h^3$ から　$t=\dfrac{1}{24}\pi h^3$

両辺を t で微分して　$1=\dfrac{1}{8}\pi h^2\dfrac{dh}{dt}$　　ゆえに　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{8}{\pi h^2}$

よって，$h=4$ のとき　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{1}{2\pi}$ (cm/s)

(2) t 秒後の水面の面積を S cm^2 とすると　$S=\pi r^2$

$r=\dfrac{h}{2}$ を代入して　$S=\dfrac{1}{4}\pi h^2$

両辺を t で微分して　$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}\pi h\dfrac{dh}{dt}$

$h=4$ のときの水面の面積の増加する割合は，(1) の結果から

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{2}\pi\cdot4\cdot\dfrac{1}{2\pi}=1$ (cm^2/s)

5 表面積が 4π cm^2/s の一定の割合で増加している球がある。半径が 10 cm になる瞬間において，以下のものを求めよ。

(1) 半径の増加する速度　　(2) 体積の増加する速度

解答 (1) $\dfrac{1}{20}$ cm/s　(2) 20π cm^3/s

解説

t 秒後の表面積を S cm^2 とすると　$\dfrac{dS}{dt}=4\pi$ (cm^2/s) ……①

(1) t 秒後の球の半径を r cm とすると　$S=4\pi r^2$

両辺を t で微分して　$\dfrac{dS}{dt}=8\pi r\dfrac{dr}{dt}$

ゆえに　$\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{dS}{dt}\cdot\dfrac{1}{8\pi r}$　　① から　$\dfrac{dr}{dt}=4\pi\cdot\dfrac{1}{8\pi r}=\dfrac{1}{2r}$

求める速度は，$r=10$ を代入して　$\dfrac{1}{20}$ cm/s

(2) t 秒後の球の体積を V cm^3 とすると　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

両辺を t で微分して　$\dfrac{dV}{dt}=4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$

$r=10$ のときの半径の増加する速度は，(1) より $\dfrac{dr}{dt}=\dfrac{1}{20}$ であるから

$$\frac{dV}{dt}=4\pi\cdot 10^2\cdot\frac{1}{20}=20\pi$$

よって，求める速度は　$20\pi\ \mathrm{cm^3/s}$

$\boxed{6}$ (1)　$|x|$ が十分小さいとき，次の関数の 1 次の近似式，2 次の近似式を作れ。

（ア）$f(x)=\log(1+x)$　　（イ）$f(x)=\sqrt{1+\sin x}$

(2)　1 次の近似式を用いて，次の数の近似値を求めよ。ただし，$\pi=3.14$，$\sqrt{3}=1.73$ として小数第 2 位まで求めよ。

（ア）$\cos 61°$　　（イ）$\sqrt[3]{340}$　　（ウ）$\sqrt{1+\pi}$

解答　(1)　1 次の近似式，2 次の近似式の順に

（ア）x，$x-\dfrac{1}{2}x^2$　　（イ）$1+\dfrac{1}{2}x$，$1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$

(2)（ア）0.48　（イ）6.98　（ウ）2.04

解説

(1)（ア）$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$

よって　$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=-1$

$|x|$ が十分小さいとき　1 次の近似式は　$f(x)\fallingdotseq x$

2 次の近似式は　$f(x)\fallingdotseq x-\dfrac{1}{2}x^2$

（イ）$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+\sin x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1+\sin x)'=\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

$$f''(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\sin x\sqrt{1+\sin x}-\cos x\cdot\dfrac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}}{1+\sin x}$$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sin x+2\sin^2 x+\cos^2 x}{(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sin^2 x+2\sin x+1}{4(1+\sin x)^{\frac{3}{2}}}$$

よって　$f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，$f''(0)=-\dfrac{1}{4}$

$|x|$ が十分小さいとき　1 次の近似式は　$f(x)\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}x$

2 次の近似式は　$f(x)\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2$

(2)（ア）$\cos 61°=\cos(60°+1°)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{180}\right)$

$(\cos x)'=-\sin x$ であるから，$|h|$ が十分小さいとき

$\cos(a+h)\fallingdotseq\cos a-h\sin a$

よって　$\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{180}\right)\fallingdotseq\cos\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{180}\sin\dfrac{\pi}{3}$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{180}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\fallingdotseq\frac{180-3.14\times1.73}{360}$$

$$=0.4849\cdots\cdots\fallingdotseq 0.48$$

（イ）$\sqrt[3]{340}=\sqrt[3]{343-3}=\sqrt[3]{7^3\left(1-\dfrac{3}{7^3}\right)}=7\cdot\sqrt[3]{1-\dfrac{3}{7^3}}$

$f(x)=\sqrt[3]{1+x}$ とすると

$$f'(x)=\left\{(1+x)^{\frac{1}{3}}\right\}'=\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(1+x)^2}}$$

ゆえに，$|x|$ が十分小さいとき　$f(x)\fallingdotseq 1+\dfrac{1}{3}x$

よって　$\sqrt[3]{340}\fallingdotseq 7\left(1-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{7^3}\right)=7-\dfrac{1}{49}=\dfrac{342}{49}$

$=6.979\cdots\cdots\fallingdotseq 6.98$

（ウ）$\pi=3.14$ から，$1+\pi=4+x$ とする。

$\dfrac{x}{4}$ は十分小さいから

$$\sqrt{4+x}=2\sqrt{1+\frac{x}{4}}\fallingdotseq 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{4}\right)=2+\frac{0.14}{4}=2.035\fallingdotseq 2.04$$

$\boxed{7}$ (1)　球の体積 V が 1 % 増加するとき，球の半径 r と球の表面積 S は，それぞれ約何 % 増加するか。

(2)　AD∥BC の等脚台形 ABCD において，AB＝2 cm，BC＝4 cm，∠B＝60° とする。∠B が 1° だけ増えたとき，台形 ABCD の面積 S は，ほぼどれだけ増えるか。ただし，$\pi=3.14$ とする。

解答　(1)　半径は約 $\dfrac{1}{3}$ %，表面積は約 $\dfrac{2}{3}$ % 増加する　　(2)　約 0.10 cm² 増える

解説

(1)　$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，$S=4\pi r^2$ から　$\dfrac{dV}{dr}=4\pi r^2$，$\dfrac{dS}{dr}=8\pi r$

ゆえに　$\Delta V\fallingdotseq 4\pi r^2\Delta r$，　$\Delta S\fallingdotseq 8\pi r\Delta r$

よって　$\dfrac{\Delta V}{V}\fallingdotseq 3\dfrac{\Delta r}{r}$，　$\dfrac{\Delta S}{S}\fallingdotseq 2\dfrac{\Delta r}{r}$

球の体積が 1 % 増加するとき，$\dfrac{\Delta V}{V}=\dfrac{1}{100}$ であるから

$$\frac{\Delta r}{r}\fallingdotseq\frac{1}{300},\quad \frac{\Delta S}{S}\fallingdotseq\frac{2}{300}$$

ゆえに，球の半径は約 $\dfrac{1}{3}$ % 増加，表面積は約 $\dfrac{2}{3}$ % 増加する。

(2)　∠B＝x（ラジアン）とすると　$x=60°=\dfrac{\pi}{3}$，$\Delta x=1°=\dfrac{\pi}{180}$

点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とすると，BH＝$2\cos x$ であるから

$$\mathrm{AD}=\mathrm{BC}-2\mathrm{BH}=4-4\cos x$$

台形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})\cdot\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\{(4-4\cos x)+4\}\cdot 2\sin x=4(2-\cos x)\sin x$$

$$=8\sin x-4\sin x\cos x=8\sin x-2\sin 2x$$

ゆえに　$S'=8\cos x-2\cos 2x\cdot(2x)'=4(2\cos x-\cos 2x)$

x の増分 Δx に対する S の増分を ΔS とすると，$|\Delta x|$ が十分小さいとき，次の式が成り立つ。

$$\Delta S\fallingdotseq S'\Delta x=4(2\cos x-\cos 2x)\Delta x$$

$x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$S'=4\left\{2\cdot\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=6$

よって　$\Delta S\fallingdotseq 6\cdot\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{30}\fallingdotseq\dfrac{3.14}{30}=0.104\cdots\cdots\fallingdotseq 0.10$

したがって，約 0.10 cm² 増える。

$\boxed{8}$ 座標平面上の動点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が $\begin{cases} x=\sin t \\ y=\dfrac{1}{2}\cos 2t \end{cases}$ で表されるとき，点 P の速度の大きさの最大値を求めよ。

解答　$\dfrac{5}{4}$

解説

$\dfrac{dx}{dt}=\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=-\sin 2t$ であるから，時刻 t における速度ベクトルを $\vec{v}$ とすると

$$|\vec{v}|^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 2t$$

$$=\cos^2 t+4\sin^2 t\cos^2 t=\cos^2 t(1+4\sin^2 t)$$

ここで，$\sin^2 t=X$ とおくと　$0\leqq X\leqq 1$　……①

$$|\vec{v}|^2=(1-X)(1+4X)=-4X^2+3X+1=-4\left(X-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{25}{16}$$

ゆえに，① の範囲において，$|\vec{v}|^2$ は $X=\dfrac{3}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{25}{16}$ をとる。

$|\vec{v}|\geqq 0$ であるから，$|\vec{v}|^2$ が最大のとき $|\vec{v}|$ も最大となる。

したがって，求める最大値は　$\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{4}$