数学演習（微分法の応用）Ｒ１．７．３０　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^2\sin\dfrac{\pi}{x^2}$ $(x>0)$ について，n を自然数とし，点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ 0\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を ℓ_n とする。放物線 $y=\dfrac{(-1)^n\pi}{2}x^2$ と直線 ℓ_n の交点の座標を $(a_n,\ b_n)$ (ただし，$a_n>0$) とするとき

(1)　a_n を n を用いて表せ。　　　(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n|b_n|$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=e^{-x}\sin\pi x$ $(x>0)$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を，小さい方から順に x_1，x_2，x_3，…… とし，$x=x_n$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の y 切片を y_n とする。

(1)　y_n を n を用いて表せ。　　　(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{k}$ の値を求めよ。

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ $(x>0)$ について，$f(x)$ が極大値をとる x の値を小さい方から順に x_1，x_2，…… とすると，数列 $\{f(x_n)\}$ は等比数列であることを示せ。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=e^{-x}\cos x\ (x>0)$ について，$f(x)$ が極小値をとる x の値を小さい方から順に x_1，x_2，…… とすると，数列 $\{f(x_n)\}$ は等比数列であることを示せ。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ $0<x<\pi$ のとき，不等式 $x\cos x<\sin x$ が成り立つことを示せ。そして，これを用いて，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}$ を求めよ。

$\boxed{6}$ (1)　$x\geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。更に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$ を求めよ。

(2)　$f(x)=\dfrac{xe^{-\frac{x}{2}}}{\log 2}$ とする。ただし，$\sqrt{e}<2$ を用いてもよい。

(ア)　$x>4\log 2$ のとき，$f(x)<1$ であることを示せ。

(イ)　(ア)の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}$ を求めよ。

1 関数 $f(x)=x^2\sin\dfrac{\pi}{x^2}$ $(x>0)$ について，n を自然数とし，点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}},\ 0\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線を ℓ_n とする。放物線 $y=\dfrac{(-1)^n\pi}{2}x^2$ と直線 ℓ_n の交点の座標を $(a_n,\ b_n)$（ただし，$a_n>0$）とするとき

(1) a_n を n を用いて表せ。　　(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n|b_n|$ を求めよ。

解答 (1) $a_n=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$　(2) $\dfrac{\pi}{2}$

解説

(1) $f(x)=x^2\sin\dfrac{\pi}{x^2}$ から　$f'(x)=2x\sin\dfrac{\pi}{x^2}-\dfrac{2\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x^2}$

$f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{n}}\sin n\pi-2\pi\sqrt{n}\cos n\pi=(-1)^{n+1}\cdot2\pi\sqrt{n}$ であるから，接線 ℓ_n の方程式は　$y=f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$　すなわち　$y=(-1)^{n+1}\cdot2\pi(\sqrt{n}\,x-1)$

この直線と放物線 $y=\dfrac{(-1)^n\pi}{2}x^2$ の交点の x 座標が a_n であるから

$$\frac{(-1)^n\pi}{2}(a_n)^2=(-1)^{n+1}\cdot2\pi(\sqrt{n}\,a_n-1)$$

整理して　$(a_n)^2+4\sqrt{n}\,a_n-4=0$

これを解いて　$a_n=-2\sqrt{n}\pm\sqrt{4n-1\cdot(-4)}=-2\sqrt{n}\pm2\sqrt{n+1}$

$a_n>0$ であるから　$a_n=-2\sqrt{n}+2\sqrt{n+1}=2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) (1) から　$b_n=\dfrac{(-1)^n\pi}{2}(a_n)^2=(-1)^n\cdot2\pi(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n|b_n|=\lim_{n\to\infty}2\pi n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)^2}=\frac{\pi}{2}$$

2 関数 $f(x)=e^{-x}\sin\pi x$ $(x>0)$ について，曲線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標を，小さい方から順に x_1，x_2，x_3，…… とし，$x=x_n$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の y 切片を y_n とする。

(1) y_n を n を用いて表せ。　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{k}$ の値を求めよ。

解答 (1) $y_n=-n\pi\left(-\dfrac{1}{e}\right)^n$　(2) $\dfrac{\pi}{e+1}$

解説

(1) $e^{-x}>0$ であるから，$f(x)=0$ とすると　$\sin\pi x=0$

$x>0$ であるから　$\pi x=n\pi$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

ゆえに　$x=n$　すなわち　$x_n=n$

$f'(x)=-e^{-x}\sin\pi x+\pi e^{-x}\cos\pi x$ であるから

$$f'(n)=\pi e^{-n}\cos n\pi=\pi e^{-n}(-1)^n=\pi\left(-\frac{1}{e}\right)^n$$

$x=x_n$ における接線の方程式は　$y=\pi\left(-\dfrac{1}{e}\right)^n(x-n)$

よって，この接線の y 切片は　$y_n=-n\pi\left(-\dfrac{1}{e}\right)^n$

(2) $\left|-\dfrac{1}{e}\right|<1$ であるから，(1) より

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\pi\left(-\frac{1}{e}\right)^k\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{e}\left\{1-\left(-\frac{1}{e}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{e}\right)}=\frac{\pi}{e+1}$$

3 関数 $f(x)=e^{-x}\sin x$ $(x>0)$ について，$f(x)$ が極大値をとる x の値を小さい方から順に x_1，x_2，…… とすると，数列 $\{f(x_n)\}$ は等比数列であることを示せ。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ を求めよ。

解答 証明略，$\dfrac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$

解説

$f'(x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x=-e^{-x}(\sin x-\cos x)=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=e^{-x}(\sin x-\cos x)-e^{-x}(\cos x+\sin x)=-2e^{-x}\cos x$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$

以下では，n は自然数とする。

$k=2n-1$ のとき　$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)<0$　よって　$f''\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)>0$

$k=2(n-1)$ のとき　$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)>0$　よって　$f''\left(\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right)<0$

ゆえに，$k=2(n-1)$ のとき極大値をとるから　$x_n=\dfrac{\pi}{4}+2(n-1)\pi$

このとき　$f(x_n)=e^{-\left\{\frac{\pi}{4}+2(n-1)\pi\right\}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+2(n-1)\pi\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}(e^{-2\pi})^{n-1}$

よって，$\{f(x_n)\}$ は初項 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$，公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列である。

公比 $e^{-2\pi}$ は $0<e^{-2\pi}<1$ であるから，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{1-e^{-2\pi}}=\frac{e^{\frac{7}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$$

4 関数 $f(x)=e^{-x}\cos x$ $(x>0)$ について，$f(x)$ が極小値をとる x の値を小さい方から順に x_1，x_2，…… とすると，数列 $\{f(x_n)\}$ は等比数列であることを示せ。また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ を求めよ。

解答 証明略，$-\dfrac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$

解説

$f'(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}(-\sin x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$=-\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$f''(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$x>0$ であるから　$x=\dfrac{3}{4}\pi+k\pi$　$(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$

以下では，n は自然数とする。

$k=2n-1$ のとき　$\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right)=\sin\dfrac{7}{4}\pi<0$　ゆえに　$f''\left(\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right)<0$

$k=2(n-1)$ のとき　$\sin\left(\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right)=\sin\dfrac{3}{4}\pi>0$　ゆえに　$f''\left(\dfrac{3}{4}\pi+k\pi\right)>0$

よって，$k=2(n-1)$ のとき極小値をとるから　$x_n=\dfrac{3}{4}\pi+2(n-1)\pi$

ここで　$f(x_n)=e^{-\left\{\frac{3}{4}\pi+2(n-1)\pi\right\}}\cos\left\{\dfrac{3}{4}\pi+2(n-1)\pi\right\}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}(e^{-2\pi})^{n-1}$

よって，数列 $\{f(x_n)\}$ は初項 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$，公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列である。

公比 $e^{-2\pi}$ は $0<e^{-2\pi}<1$ であるから，無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)$ は収束し，その和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(x_n)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}}{1-e^{-2\pi}}=-\frac{e^{\frac{5}{4}\pi}}{\sqrt{2}(e^{2\pi}-1)}$$

5 $0<x<\pi$ のとき，不等式 $x\cos x<\sin x$ が成り立つことを示せ。そして，これを用いて，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}$ を求めよ。

解答 証明略，0

解説

(前半)　$F(x)=\sin x-x\cos x$ とすると

$F'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$

ゆえに，$0<x<\pi$ のとき　$F'(x)>0$

よって，$F(x)$ は $0\leqq x\leqq\pi$ で単調に増加する。

このことと，$F(0)=0$ から，$0<x<\pi$ のとき　$F(x)>0$

ゆえに，$0<x<\pi$ のとき　$x\cos x<\sin x$　……①

(後半)　$x\longrightarrow+0$ であるから，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

$G(x)=x-\sin x$ とすると　$G'(x)=1-\cos x>0$

よって，$G(x)$ は $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調に増加する。

このことと，$G(0)=0$ から，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき　$G(x)>0$

すなわち　$x-\sin x>0$　……②

①，② から　$0<\dfrac{x-\sin x}{x^2}<\dfrac{x-x\cos x}{x^2}$

$\dfrac{x-x\cos x}{x^2}=\dfrac{1-\cos x}{x}=\dfrac{1-\cos^2x}{x(1+\cos x)}=\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-x\cos x}{x^2}=0$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x-\sin x}{x^2}=0$

$\boxed{6}$ (1)　$x\geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。更に，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$ を求めよ。

(2)　$f(x)=\dfrac{xe^{-\frac{x}{2}}}{\log 2}$ とする。ただし，$\sqrt{e}<2$ を用いてもよい。

（ア）　$x>4\log 2$ のとき，$f(x)<1$ であることを示せ。

（イ）　(ア) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}$ を求めよ。

解答　(1)　証明略，0　　(2)（ア）　略　　（イ）　0

解説

(1)　$F(x)=27e^{-3}-x^3e^{-x}$ とすると

$$F'(x)=-3x^2e^{-x}-x^3(-e^{-x})=x^2(x-3)e^{-x}$$

$x>3$ のとき $F'(x)>0$ であるから，$F(x)$ は $x\geqq 3$ で単調に増加する。

更に，$F(3)=0$ であるから，$x\geqq 3$ のとき　$F(x)\geqq 0$

したがって，$x\geqq 3$ のとき　$x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$　……①

① から，$x\geqq 3$ のとき　$0<x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$

このとき，各辺を x で割ると　$0<x^2e^{-x}\leqq\dfrac{27e^{-3}}{x}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{27e^{-3}}{x}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

(2)（ア）　$f'(x)=\dfrac{1}{\log 2}\left\{e^{-\frac{x}{2}}+x\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}\right\}=\dfrac{1}{2\log 2}(2-x)e^{-\frac{x}{2}}$

ゆえに，$x>2$ のとき　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq 2$ で単調に減少する。

ここで，$\sqrt{e}<2$ から　$\dfrac{1}{2}<\log 2$　　ゆえに　$2<4\log 2$

よって，$x>4\log 2$ のとき　$f(x)<f(4\log 2)$

$f(4\log 2)=\dfrac{4\log 2}{\log 2}e^{-2\log 2}=4e^{\log\frac{1}{4}}=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$ であるから　$f(x)<1$

（イ）　(ア) から，$x>4\log 2$ のとき　$f(x)=\dfrac{xe^{-\frac{x}{2}}}{\log 2}<1$

ゆえに　$xe^{-\frac{x}{2}}<\log 2$　　よって　$0<xe^{-x}<(\log 2)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left\{(\log 2)\cdot e^{-\frac{x}{2}}\right\}=0$ であるから　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^{-x}=0$