数学演習（不等式の証明･方程式の実数解の個数）Ｒ１．７．２９

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ $(x>0)$

(2) $e^x<1+x+\dfrac{e}{2}x^2$ $(0<x<1)$

(3) $e^x>x^2$ $(x>0)$

(4) $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$ $(x>0)$

$\boxed{2}$ (1) $x\geqq 1$ において，$x>2\log x$ が成り立つことを示せ。ただし，自然対数の底 e について，$2.7<e<2.8$ であることを用いてよい。

(2) 自然数 n に対して，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ $e<a<b$ のとき，不等式 $a^b>b^a$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{4}$ $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $b\log\dfrac{a}{b} \leqq a-b \leqq a\log\dfrac{a}{b}$ が成り立つことを証明せよ。

$\boxed{5}$ a を正の定数とする。不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{6}$ (1)　k を定数とするとき，$0<x<2\pi$ における方程式 $\log(\sin x+2)-k=0$ の実数解の個数を調べよ。

(2)　方程式 $e^x=ax$（a は定数）の実数解の個数を調べよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いてもよい。

$\boxed{7}$ $f(x)=-e^x$ とする。実数 b に対して，点 $(0,\ b)$ を通る，曲線 $y=f(x)$ の接線の本数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ を用いてもよい。

1 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ $(x>0)$　　(2) $e^x<1+x+\dfrac{e}{2}x^2$ $(0<x<1)$

(3) $e^x>x^2$ $(x>0)$　　(4) $\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$ $(x>0)$

解答 (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) 略

解説

(1) $F(x)=1+\dfrac{x}{2}-\sqrt{1+x}$ とすると，$x>0$ のとき

$$F'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}>0$$

ゆえに，$F(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$F(0)=0$ から，$x>0$ のとき　$F(x)>0$

よって　$\sqrt{1+x}<1+\dfrac{x}{2}$ $(x>0)$

(2) $F(x)=\left(1+x+\dfrac{e}{2}x^2\right)-e^x$ とすると

$$F'(x)=1+ex-e^x,\ F''(x)=e-e^x$$

$0<x<1$ のとき，$1<e^x<e$ であるから　$F''(x)>0$

ゆえに，$F'(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に増加する。

このことと，$F'(0)=0$ から，$0<x<1$ のとき　$F'(x)>0$

よって，$F(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ で単調に増加する。

このことと，$F(0)=0$ から，$0<x<1$ のとき　$F(x)>0$

したがって　$e^x<1+x+\dfrac{e}{2}x^2$ $(0<x<1)$

(3) $F(x)=e^x-x^2$ とすると　$F'(x)=e^x-2x$，$F''(x)=e^x-2$

$F''(x)=0$ とすると，$e^x=2$ から　$x=\log 2$

$x>0$ における $F'(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log 2$	$\cdots$
$F''(x)$		$-$	0	$+$
$F'(x)$		↘	極小	↗

$F'(\log 2)=2-2\log 2=2\log\dfrac{e}{2}>0$ であるから，

$x>0$ のとき　$F'(x)\geqq F'(\log 2)>0$

ゆえに，$F(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$F(0)=1$ から，$x>0$ のとき　$F(x)>1>0$

したがって　$e^x>x^2$ $(x>0)$

(4) $F(x)=\sin x-\left(x-\dfrac{x^3}{6}\right)$ とする。

$$F'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2},\ F''(x)=-\sin x+x,\ F'''(x)=-\cos x+1\geqq 0$$

ゆえに，$F''(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$F''(0)=0$ から，$x>0$ のとき　$F''(x)>0$

よって，$F'(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$F'(0)=0$ から，$x>0$ のとき　$F'(x)>0$

したがって，$F(x)$ は $x\geqq 0$ で単調に増加する。

このことと，$F(0)=0$ から，$x>0$ のとき　$F(x)>0$

よって　$\sin x>x-\dfrac{x^3}{6}$ $(x>0)$

2 (1) $x\geqq 1$ において，$x>2\log x$ が成り立つことを示せ。ただし，自然対数の底 e について，$2.7<e<2.8$ であることを用いてよい。

(2) 自然数 n に対して，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ が成り立つことを示せ。

解答 (1) 略　(2) 略

解説

(1) $f(x)=x-2\log x$ とすると　$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

$f'(x)=0$ とすると　$x=2$

$x\geqq 1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↘	$2-2\log 2$	↗

よって，$x\geqq 1$ において，$f(x)$ は $x=2$ で最小値 $2-2\log 2$ をとる。

$e>2$ であるから　$2-2\log 2>2-2\log e=0$

ゆえに，$x\geqq 1$ において $f(x)>0$ つまり $x>2\log x$ が成り立つ。

(2) (1) の結果を用いると，$n\geqq 1$ から　$2\log n<n$

両辺に n を掛けると　$2n\log n<n^2$

両辺は 0 以上であるから，両辺を n 乗すると　$(2n\log n)^n<n^{2n}$

ここで　$n^{2n}=e^{\log n^{2n}}=e^{2n\log n}$

したがって　$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$

3 $e<a<b$ のとき，不等式 $a^b>b^a$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

$$a^b>b^a \iff \log a^b>\log b^a \iff b\log a>a\log b \iff \frac{\log a}{a}>\frac{\log b}{b}\ \cdots\cdots①$$

ここで，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-\log x\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$x>e$ のとき，$x^2>0$，$1-\log x<0$ であるから　$f'(x)<0$

よって，$f(x)$ は $x\geqq e$ で単調に減少する。

ゆえに，$e<a<b$ のとき　$\dfrac{\log a}{a}>\dfrac{\log b}{b}$

すなわち，不等式 ① が成り立つから　$a^b>b^a$

4 $a>0$，$b>0$ のとき，不等式 $b\log\dfrac{a}{b}\leqq a-b\leqq a\log\dfrac{a}{b}$ が成り立つことを証明せよ。

解答 略

解説

与えられた不等式の各辺を b (>0) で割ると

$\log\dfrac{a}{b}\leqq\dfrac{a}{b}-1\leqq\dfrac{a}{b}\log\dfrac{a}{b}$ であり，$\dfrac{a}{b}=t$ とおくと　$t>0$

ゆえに，不等式は　$\log t\leqq t-1\leqq t\log t$ $(t>0)$ ……①

$f(t)=t-1-\log t$ とすると　$f'(t)=1-\dfrac{1}{t}=\dfrac{t-1}{t}$

$f'(t)=0$ とすると　$t=1$

$t>0$ における $f(t)$ の増減表は，右のようになる。

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘	極小 0	↗

よって，$t>0$ のとき　$f(t)\geqq 0$

次に，$g(t)=t\log t-t+1$ とすると　$g'(t)=\log t+t\cdot\dfrac{1}{t}-1=\log t$

$g'(t)=0$ とすると　$t=1$

$f(t)$ と同様に，$g(t)$ は $t=1$ で極小かつ最小で　$g(1)=0$

よって，$t>0$ のとき　$g(t)\geqq 0$

以上から，① が成り立ち，与えられた不等式は成り立つ。

5 a を正の定数とする。不等式 $a^x\geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

解答 $a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

解説

$a^x\geqq x$ ……① とする。

$a>0$ であり，$x>0$ の範囲で考えるから，① の両辺の自然対数をとると

$x\log a\geqq\log x$　ゆえに　$\log a\geqq\dfrac{\log x}{x}$ ……②

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とすると　$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

$f'(x)=0$ とすると，$1-\log x=0$ から　$x=e$

$x>0$ における $f(x)$ の増減表は，右のようになる。

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

よって，$f(x)$ は $x=e$ で極大かつ最大となり，その値は　$f(e)=\dfrac{1}{e}$

したがって，② が $x>0$ の範囲で常に成り立つための条件は

$\log a\geqq\dfrac{1}{e}$　すなわち　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

別解 $g(x)=\dfrac{x}{a^x}$ とし，$x>0$ のとき常に $g(x)\leqq 1$ が成り立つための条件を考える。

$$g'(x)=\frac{1\cdot a^x-x\cdot a^x\log a}{(a^x)^2}=\frac{1-x\log a}{a^x}$$

$g'(x)=0$ とすると　$x=\dfrac{1}{\log a}=\log_a e$

ゆえに，$x>0$ における $g(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log_a e$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	極大	↘

よって，$g(x)$ は $x=\log_a e$ で極大かつ最大となり，

その値は　$g(\log_a e)=\dfrac{\log_a e}{e}$

したがって，求める条件は　$\dfrac{\log_a e}{e}\leqq 1$

ゆえに，$\log_a e\leqq e$ から　$\dfrac{1}{\log a}\leqq e$

よって　$\log a\geqq\dfrac{1}{e}$　すなわち　$a\geqq e^{\frac{1}{e}}$

$\boxed{6}$ (1) k を定数とするとき，$0<x<2\pi$ における方程式 $\log(\sin x+2)-k=0$ の実数解の個数を調べよ。

(2) 方程式 $e^x=ax$ (a は定数) の実数解の個数を調べよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ を用いてもよい。

解答 (1) $k<0$，$\log 3<k$ のとき 0 個；$k=0$，$\log 2$，$\log 3$ のとき 1 個；
$0<k<\log 2$，$\log 2<k<\log 3$ のとき 2 個

(2) $0\leqq a<e$ のとき 0 個；$a<0$，$a=e$ のとき 1 個；$e<a$ のとき 2 個

解説

(1) $\log(\sin x+2)-k=0$ から　　$\log(\sin x+2)=k$

$f(x)=\log(\sin x+2)$ とすると　　$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x+2}$

$f'(x)=0$ とすると　　$\cos x=0$

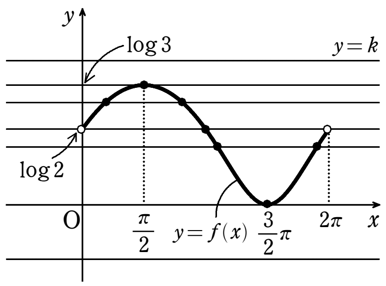
$0<x<2\pi$ のとき　　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\log 2$	↗	極大 $\log 3$	↘	極小 0	↗	$\log 2$

よって，$0<x<2\pi$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，実数解の個数は，グラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に一致するから

$k<0$，$\log 3<k$ のとき　0 個；
$k=0$，$\log 2$，$\log 3$ のとき　1 個；
$0<k<\log 2$，$\log 2<k<\log 3$ のとき　2 個



(2) $x=0$ は方程式の解でないから，方程式は $\dfrac{e^x}{x}=a$ と同値。

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ とすると，定義域は $x\neq 0$ で

$$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=1$

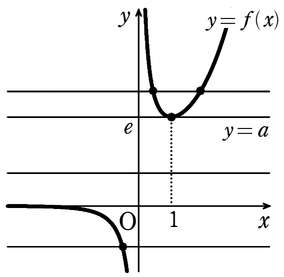
増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↘	極小 e	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$

以上より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，実数解の個数はグラフと直線 $y=a$ との共有点の個数に一致するから

$0\leqq a<e$ のとき　0 個；
$a<0$，$a=e$ のとき　1 個；
$e<a$ のとき　2 個



$\boxed{7}$ $f(x)=-e^x$ とする。実数 b に対して，点 $(0,\ b)$ を通る，曲線 $y=f(x)$ の接線の本数を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$ を用いてもよい。

解答 $b<-1$ のとき 0 本；$b=-1$，$0\leqq b$ のとき 1 本；$-1<b<0$ のとき 2 本

解説

$f(x)=-e^x$ から　　$f'(x)=-e^x$

よって，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線 ℓ の方程式は

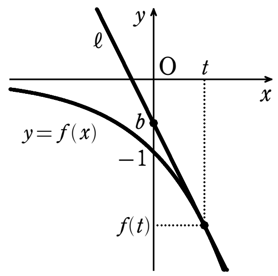
$$y-(-e^t)=-e^t(x-t)$$

すなわち　　$y=-e^t(x-t)-e^t$

この接線 ℓ が点 $(0,\ b)$ を通るとき

$$b=-e^t(-t)-e^t$$

したがって　　$b=(t-1)e^t$



ここで，$g(t)=(t-1)e^t$ とすると

$$g'(t)=e^t+(t-1)e^t=te^t$$

$g'(t)=0$ とすると　　$t=0$

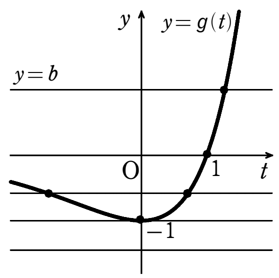
$g(t)$ の増減表は右のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	↘	極小 -1	↗

また　　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=\infty$，

$$\lim_{t\to-\infty}g(t)=\lim_{t\to-\infty}(te^t-e^t)=0$$

ゆえに，$y=g(t)$ のグラフの概形は，右図のようになる。



t は接点の x 座標であり，接点が異なれば接線も異なる。したがって，$b=g(t)$ を満たす実数 t の個数が，接線の本数に一致する。よって，求める接線の本数は，グラフから

$b<-1$ のとき 0 本；
$b=-1$，$0\leqq b$ のとき 1 本；
$-1<b<0$ のとき 2 本