数学演習（関数のグラフ）Ｒ１．７．２８

(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の曲線の凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1) $y=x^4+2x^3+2$　　(2) $y=x+\cos 2x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

(3) $y=xe^x$　　(4) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

$\boxed{2}$ 次の曲線の漸近線の方程式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{2x^2+3}{x-1}$　　(2) $y=x-\sqrt{x^2-9}$

$\boxed{3}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。また，変曲点があればそれを求めよ。ただし，(3)，(5)では $0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。また，(2)では $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0$ を用いてよい。

(1) $y=x-2\sqrt{x}$　　(2) $y=(x^2-1)e^x$　　(3) $y=x+2\cos x$

(4) $y=\dfrac{x-1}{x^2}$　　(5) $y=e^{-x}\cos x$　　(6) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

$\boxed{4}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。ただし，(2) ではグラフの凹凸は調べなくてよい。

(1)　$y=e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $(-1<x<1)$

(2)　$y=\dfrac{1}{3}\sin 3x-2\sin 2x+\sin x$ $(-\pi \leqq x \leqq \pi)$

$\boxed{5}$ 次の方程式が定める x の関数 y のグラフの概形をかけ。

(1)　$y^2=x^2(x+1)$

(2)　$x^2y^2=x^2-y^2$

$\boxed{6}$ $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$ とする。次の式で表された曲線の概形をかけ (凹凸は調べなくてよい)。

(1)　$x=\sin\theta$，$y=\cos 3\theta$

(2)　$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$

$\boxed{7}$ $a>0$，$b>0$ とし，$f(x)=\log\dfrac{x+a}{b-x}$ とする。曲線 $y=f(x)$ はその変曲点に関して対称であることを示せ。

$\boxed{8}$ 第 2 次導関数を利用して，次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+2x-1$

(2) $y=e^x\cos x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

数学演習（関数のグラフ）Ｒ１．７．２８　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の曲線の凹凸を調べ，変曲点を求めよ。

(1) $y=x^4+2x^3+2$　　(2) $y=x+\cos 2x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$

(3) $y=xe^x$　　(4) $y=x^2+\dfrac{1}{x}$

解答 (1) $x<-1$，$0<x$ で下に凸；$-1<x<0$ で上に凸；変曲点は 点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 2)$

(2) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<x<\pi$ で上に凸；$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ で下に凸；変曲点は

点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

(3) $x<-2$ で上に凸，$-2<x$ で下に凸；変曲点は 点 $(-2,\ -2e^{-2})$

(4) $x<-1$，$0<x$ で下に凸；$-1<x<0$ で上に凸；変曲点は 点 $(-1,\ 0)$

解説

(1) $y'=4x^3+6x^2$，$y''=12x^2+12x=12x(x+1)$

$y''=0$ とすると　$x=-1,\ 0$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は右の表のようになる（ただし，表の ∪ は下に凸，∩ は上に凸を表す。以下同じ）。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	∪	変曲点	∩	変曲点	∪

よって　$x<-1$，$0<x$ で下に凸，$-1<x<0$ で上に凸；

変曲点は　点 $(-1,\ 1)$，$(0,\ 2)$

(2) $y'=1-2\sin 2x$，　$y''=-4\cos 2x$

$y''=0$ とすると，$0\leqq x\leqq \pi$ より $0\leqq 2x\leqq 2\pi$ であるから

$$2x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\quad すなわち\quad x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y''		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	∩	変曲点	∪	変曲点	∩	$\pi+1$

よって　$0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi<x<\pi$ で上に凸，$\dfrac{\pi}{4}<x<\dfrac{3}{4}\pi$ で下に凸；

変曲点は　点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$

(3) $y'=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，$y''=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$y''=0$ とすると，$e^x>0$ であるから　$x=-2$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
y''	$-$	0	$+$
y	∩	変曲点	∪

よって　$x<-2$ で上に凸，$-2<x$ で下に凸；

変曲点は　点 $(-2,\ -2e^{-2})$

(4) 定義域は $x\neq 0$ である。

$$y'=2x-\frac{1}{x^2},\quad y''=2\left(1+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^3}$$

$y''=0$ とすると　$x=-1$

y'' の符号を調べると，この曲線の凹凸は右の表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$	／	$+$
y	∪	変曲点	∩	／	∪

よって　$x<-1$，$0<x$ で下に凸，

$-1<x<0$ で上に凸；

変曲点は　点 $(-1,\ 0)$

$\boxed{2}$ 次の曲線の漸近線の方程式を求めよ。

(1) $y=\dfrac{2x^2+3}{x-1}$　　(2) $y=x-\sqrt{x^2-9}$

解答 (1) $x=1$，$y=2x+2$　(2) $y=0$，$y=2x$

解説

(1) $y=\dfrac{2x^2+3}{x-1}=2x+2+\dfrac{5}{x-1}$

定義域は，$x-1\neq 0$ から　$x\neq 1$

$\displaystyle\lim_{x\to 1-0} y=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} y=\infty$ であるから，直線 $x=1$ は漸近線である。

また　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(2x+2)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x-1}=0$

よって，直線 $y=2x+2$ は漸近線である。

以上から，漸近線の方程式は　$x=1$，$y=2x+2$

(2) 定義域は，$x^2-9\geqq 0$ から　$x\leqq -3,\ 3\leqq x$

$\displaystyle\lim_{x\to p} y=\pm\infty$ となる定数 p の値はないから，x 軸に垂直な漸近線はない。

また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x+\sqrt{x^2-9}}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-9})=-\infty$　であるから，y 軸に平行な漸近線は，直線 $y=0$（x 軸）のみである。

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}\right)=2\ から$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-2x)=\lim_{x\to-\infty}(-x-\sqrt{x^2-9})=\lim_{x\to-\infty}\frac{9}{-x+\sqrt{x^2-9}}=0$$

よって，直線 $y=2x$ は漸近線である。

以上から，漸近線の方程式は　$y=0$，$y=2x$

$\boxed{3}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。また，変曲点があればそれを求めよ。ただし，(3)，(5) では $0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。また，(2) では $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^2e^x=0$ を用いてよい。

(1) $y=x-2\sqrt{x}$　(2) $y=(x^2-1)e^x$　(3) $y=x+2\cos x$

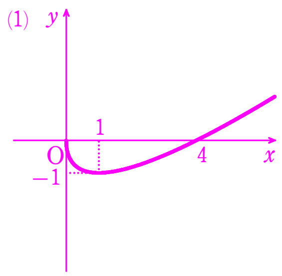
(4) $y=\dfrac{x-1}{x^2}$　(5) $y=e^{-x}\cos x$　(6) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

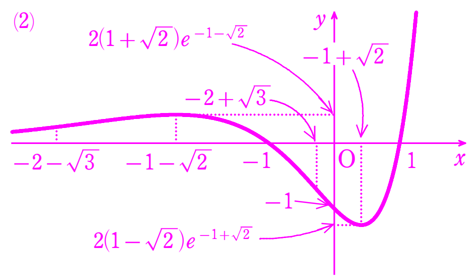
解答 (1) ［図］，変曲点はない

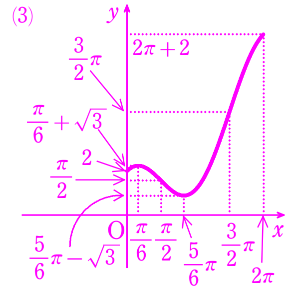
(2) ［図］；点 $(-2-\sqrt{3},\ 2(3+2\sqrt{3})e^{-2-\sqrt{3}})$，$(-2+\sqrt{3},\ 2(3-2\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}})$

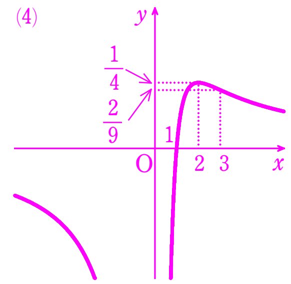
(3) ［図］；点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$　(4) ［図］，点 $\left(3,\ \dfrac{2}{9}\right)$

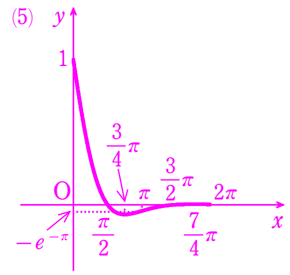
(5) ［図］，点 $(\pi,\ -e^{-\pi})$　(6) ［図］，変曲点はない

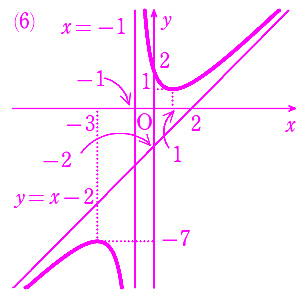
(1)


(2)


(3)


(4)


(5)


(6)


解説

(1) 定義域は　$x\geqq 0$

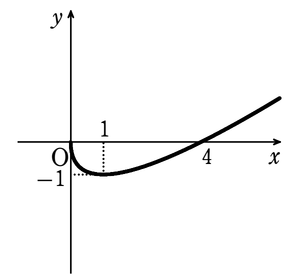
また，関数 y は $x=0$ で微分可能ではない。

$x>0$ のとき　$y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$，$y''=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$

$y'=0$ とすると　$x=1$

y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y''	／	$+$	$+$	$+$
y	0	↘	極小 -1	↗



よって，グラフは右の図，変曲点はない。

(2) $y'=2xe^x+(x^2-1)e^x=(x^2+2x-1)e^x$

$y''=(2x+2)e^x+(x^2+2x-1)e^x=(x^2+4x+1)e^x$

$y'=0$ とすると　$x=-1\pm\sqrt{2}$　　$y''=0$ とすると　$x=-2\pm\sqrt{3}$

y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-2-\sqrt{3}$	$\cdots$	$-1-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-2+\sqrt{3}$	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	変曲点	↗	極大	↘	変曲点	↘	極小	↗

$x=-1\pm\sqrt{2}$ のとき，$x^2+2x-1=0$ から

$x^2-1=-2x=-2(-1\pm\sqrt{2})=2(1\mp\sqrt{2})$　（複号同順）

ゆえに　極大値は $2(1+\sqrt{2})e^{-1-\sqrt{2}}$，極小値は $2(1-\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(x^2-1)e^x$

$\displaystyle=\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x-e^x)=0$

であるから，x 軸は漸近線である。

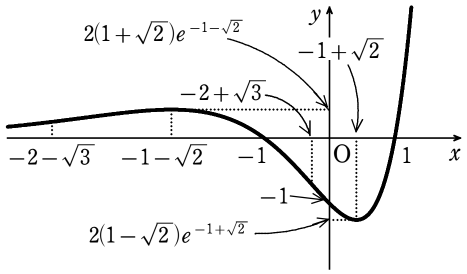
更に，$x=-2\pm\sqrt{3}$ のとき，

$x^2+4x+1=0$ から

$x^2-1=-4x-2$

$=-4(-2\pm\sqrt{3})-2$

$=2(3\mp2\sqrt{3})$ (複号同順)



よって，グラフは右の図，

変曲点は 点 $(-2-\sqrt{3},\ 2(3+2\sqrt{3})e^{-2-\sqrt{3}})$，$(-2+\sqrt{3},\ 2(3-2\sqrt{3})e^{-2+\sqrt{3}})$

(3) $y'=1-2\sin x$，　$y''=-2\cos x$

$0\leqq x\leqq2\pi$ の範囲で $y'=0$ となる x の値は，$\sin x=\dfrac{1}{2}$ から　　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$

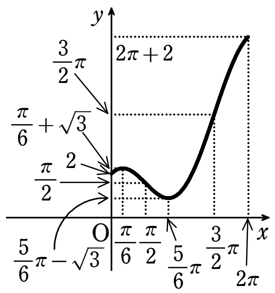
$y''=0$ となる x の値は，$\cos x=0$ から　　$x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$

y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
y''		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y	2	↗	極大 $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$	↘	変曲点 $\frac{\pi}{2}$	↘	極小 $\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$	↗	変曲点 $\frac{3}{2}\pi$	↗	$2\pi+2$

よって，グラフは右の図，

変曲点は　点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$



(4) 定義域は　　$x\neq0$

$y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$ であるから　　$y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2-x}{x^3}$

$y''=\dfrac{2}{x^3}+2\cdot(-3)\cdot\dfrac{1}{x^4}=\dfrac{2(x-3)}{x^4}$

$y'=0$ とすると　　$x=2$

$y''=0$ とすると　　$x=3$

y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

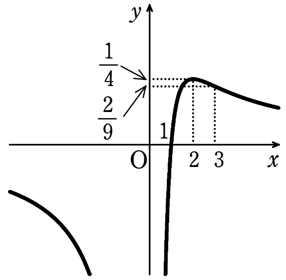
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	／	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	／	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	／	↗	極大 $\frac{1}{4}$	↘	変曲点 $\frac{2}{9}$	↘

また　$\displaystyle\lim_{x\to0}y=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{x^2}\cdot(x-1)\right\}=-\infty$，

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=0$

ゆえに，x 軸，y 軸は漸近線である。

よって，グラフは右の図，変曲点は　点 $\left(3,\ \dfrac{2}{9}\right)$



(5) $y'=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\sin x+\cos x)=-\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$y''=e^{-x}(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\sin x)=2e^{-x}\sin x$

$0\leqq x\leqq2\pi$ の範囲で $y'=0$ となる x の値は，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ から

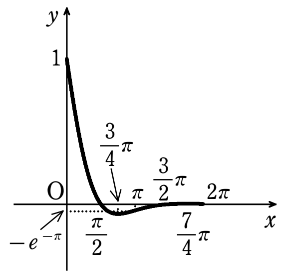
$x=\dfrac{3}{4}\pi$，$\dfrac{7}{4}\pi$

$y''=0$ となる x の値は，$\sin x=0$ から　　$x=0$，π，2π

y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{7}{4}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
y''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
y	1	↘	極小 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3}{4}\pi}$	↗	変曲点 $-e^{-\pi}$	↗	極大 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{7}{4}\pi}$	↘	$e^{-2\pi}$

よって，グラフは右の図，変曲点は　点 $(\pi,\ -e^{-\pi})$



(6) 定義域は　　$x\neq-1$

$y=\dfrac{(x+1)(x-2)+4}{x+1}=x-2+\dfrac{4}{x+1}$ であるから

$y'=1-\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+1)^2-4}{(x+1)^2}=\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

$y''=\left\{1-\dfrac{4}{(x+1)^2}\right\}'=\dfrac{4}{(x+1)^4}\cdot2(x+1)=\dfrac{8}{(x+1)^3}$

$y'=0$ とすると　　$x=-3$，1

定義域では，$y''\neq0$ である。

y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	／	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	／	$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 -7	↘	／	↘	極小 1	↗

また　　$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=\lim_{x\to-1+0}\left(x-2+\frac{4}{x+1}\right)=\infty$，

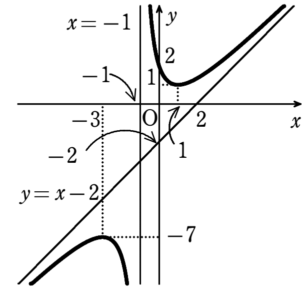
$\displaystyle\lim_{x\to-1-0}y=-\infty$

ゆえに，直線 $x=-1$ は漸近線である。

更に　　$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\{y-(x-2)\}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+1}=0$

よって，直線 $y=x-2$ も漸近線である。

ゆえに，グラフは右の図，変曲点はない。

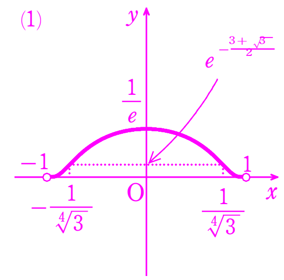


$\boxed{4}$ 次の関数のグラフの概形をかけ。ただし，(2) ではグラフの凹凸は調べなくてよい。

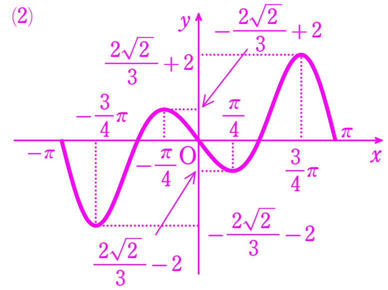
(1) $y=e^{\frac{1}{x^2-1}}$ $(-1<x<1)$　　　(2) $y=\dfrac{1}{3}\sin3x-2\sin2x+\sin x$ $(-\pi\leqq x\leqq\pi)$

解答 (1) [図]　　(2) [図]

(1)



(2)



解説

(1) $y=f(x)$ とすると，$f(-x)=f(x)$ であるから，グラフは y 軸に関して対称である。

$y'=e^{\frac{1}{x^2-1}}\cdot\left\{-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}\right\}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{1}{x^2-1}}$

$y''=-2\left[\dfrac{(x^2-1)^2-x\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}e^{\frac{1}{x^2-1}}+\dfrac{x}{(x^2-1)^2}\left\{-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}e^{\frac{1}{x^2-1}}\right\}\right]$

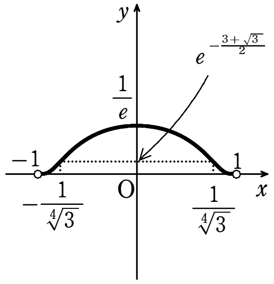
$=\dfrac{-2}{(x^2-1)^4}e^{\frac{1}{x^2-1}}(x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2-2x^2)=\dfrac{2(3x^4-1)}{(x^2-1)^4}e^{\frac{1}{x^2-1}}$

$y'=0$ とすると　　$x=0$

$y''=0$ とすると　　$x^4=\dfrac{1}{3}$　　　よって　　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$

$0 \leqq x < 1$ における y の増減，グラフの凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	$\cdots$	1
y'	0	$-$	$-$	$-$	
y''	$-$	$-$	0	$+$	
y	$\frac{1}{e}$	↘	変曲点 $e^{-\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$	↘	



また，$\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x^2-1}=-\infty$ であるから

$$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}e^{\frac{1}{x^2-1}}=0$$

グラフの対称性を考慮すると，求めるグラフは右の図。

(2)　$y=f(x)$ とすると，$f(-x)=-f(x)$ であるから，グラフは原点に関して対称である。

$y'=\cos3x-4\cos2x+\cos x=(\cos3x+\cos x)-4\cos2x$

$\quad=2\cos2x\cos x-4\cos2x=2\cos2x(\cos x-2)$

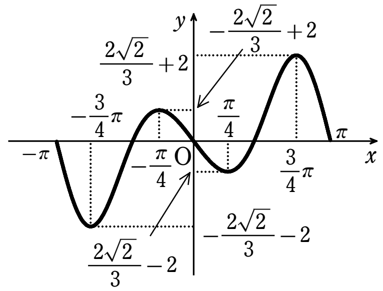
$y'=0$ とすると，$\cos x-2<0$ であるから　$\cos2x=0$

$0<x<\pi$ とすると，$0<2x<2\pi$ から　$2x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi$　ゆえに　$x=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	↘	極小 $\frac{2\sqrt{2}}{3}-2$	↗	極大 $\frac{2\sqrt{2}}{3}+2$	↘	0

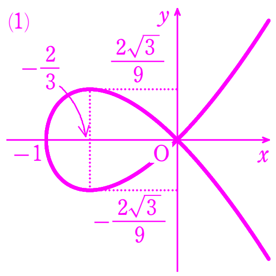
よって，グラフの対称性により，求めるグラフは右の図。

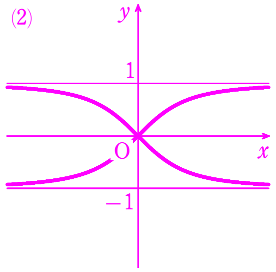


5　次の方程式が定める x の関数 y のグラフの概形をかけ。

(1)　$y^2=x^2(x+1)$　　(2)　$x^2y^2=x^2-y^2$

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]

(1)


(2)


解説

(1)　$y^2\geqq0$ であるから　$x^2(x+1)\geqq0$　したがって　$x\geqq-1$

このとき，$y=\pm x\sqrt{x+1}$ であるから，求めるグラフは $y=x\sqrt{x+1}$ と $y=-x\sqrt{x+1}$ のグラフを合わせたものである。

まず，$y=x\sqrt{x+1}$ ……① のグラフについて考える。

$y=0$ のとき　$x=-1,\ 0$

よって，グラフは原点 $(0,\ 0)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る。

$x>-1$ のとき，① から

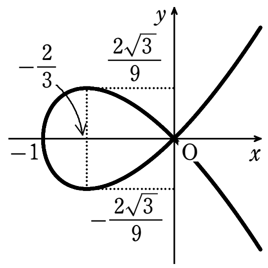
$$y'=1\cdot\sqrt{x+1}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}=\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$y''=\frac{1}{4(x+1)}\left(3\cdot2\sqrt{x+1}-\frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\right)=\frac{3x+4}{4(x+1)\sqrt{x+1}}$$

$y'=0$ とすると　$x=-\frac{2}{3}$　　また，$x>-1$ では　$y''>0$

関数 ① について，y の増減とグラフの凹凸は次の表のようになる。ただし，$\lim_{x\to-1+0}y'=-\infty$ である。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y''		$+$	$+$	$+$
y	0	↘	極小 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗



$y=-x\sqrt{x+1}$ のグラフは，x 軸に関して ① のグラフと対称である。

よって，求めるグラフは右上の図のようになる。

(2)　方程式で x を $-x$ に，y を $-y$ におき換えても $x^2y^2=x^2-y^2$ は成り立つから，グラフは x 軸，y 軸，原点に関して対称である。

ゆえに，$x\geqq0$，$y\geqq0$ の範囲で考える。

$x^2y^2=x^2-y^2$ から　$y^2=\frac{x^2}{x^2+1}$　　よって　$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　$(x\geqq0,\ y\geqq0)$

$$y'=\frac{1}{x^2+1}\left(1\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$y''=-\frac{3}{2}(x^2+1)^{-\frac{5}{2}}\cdot2x=-\frac{3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

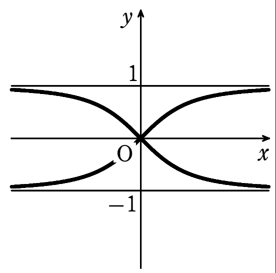
y の増減とグラフの凹凸は右の表のようになる。

x	0	$\cdots$
y'		$+$
y''		$-$
y	0	↗

また　$\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$

よって，直線 $y=1$ は漸近線である。

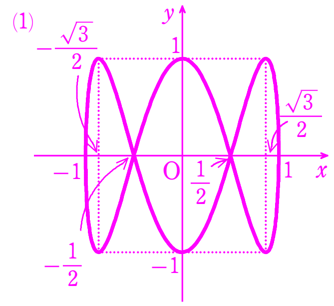
ゆえに，対称性により，求めるグラフは右の図のようになる。

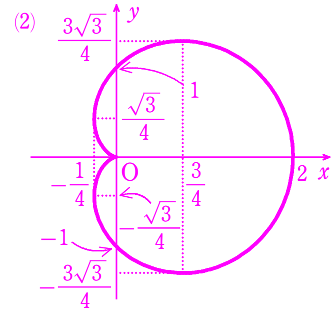


6　$-\pi\leqq\theta\leqq\pi$ とする。次の式で表された曲線の概形をかけ（凹凸は調べなくてよい）。

(1)　$x=\sin\theta$，$y=\cos3\theta$　　(2)　$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1+\cos\theta)\sin\theta$

解答　(1)　[図]　　(2)　[図]

(1)


(2)


解説

$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とする。

(1)　$\sin\theta$，$\cos3\theta$ の周期はそれぞれ 2π，$\frac{2\pi}{3}$ である。

$f(-\theta)=-f(\theta)$，$g(-\theta)=g(\theta)$ であるから，曲線は y 軸に関して対称である。

したがって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ ……① の範囲で考える。

また　$f'(\theta)=\cos\theta$，$g'(\theta)=-3\sin3\theta$

① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　$\theta=\frac{\pi}{2}$

$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は，$\sin3\theta=0\ (0\leqq3\theta\leqq3\pi)$ から

$3\theta=0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi$　すなわち　$\theta=0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi$

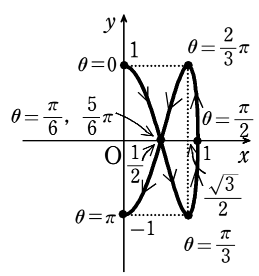
① の範囲における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

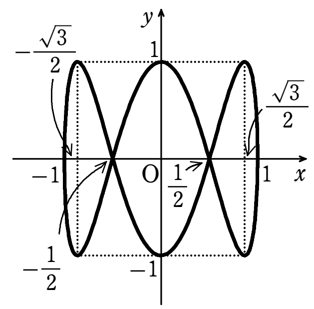
θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	0	→	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	→	1	←	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	←	0
$g'(\theta)$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0
y	1	↓	-1	↑	0	↑	1	↓	-1
（グラフ）		(↘)		(↗)		(↖)		(↙)	

また，① の範囲で $y=0$ となるのは，$\theta=\frac{\pi}{2}$ の他に $\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ の場合があり

$\theta=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ のとき　$(x,\ y)=\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

よって，対称性を考えると，曲線の概形は右下の図のようになる。





(2)　$f(\theta)$，$g(\theta)$ の周期はともに 2π である。

$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ であるから，曲線は x 軸に関して対称である。

よって，$0\leqq\theta\leqq\pi$ ……① の範囲で考える。

$f'(\theta)=-\sin\theta\cos\theta-(1+\cos\theta)\sin\theta=-\sin\theta(1+2\cos\theta)$

$g'(\theta)=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta=-(1-\cos^2\theta)+(1+\cos\theta)\cos\theta$

$\quad=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$

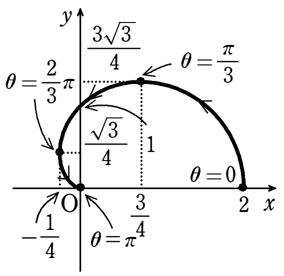
① の範囲で $f'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi$

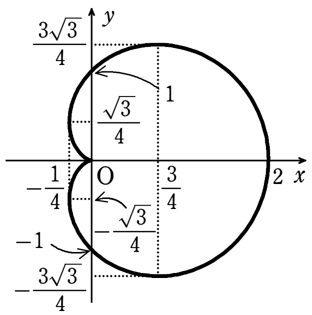
$g'(\theta)=0$ を満たす θ の値は　$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi$

① の範囲における θ の値の変化に対応した x，y の値の変化は次の表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
x	2	←	$\dfrac{3}{4}$	←	0	←	$-\dfrac{1}{4}$	→	0
$g'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
y	0	↑	$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$	↓	1	↓	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↓	0
（グラフ）		(↖)		(↙)		(↙)		(↘)	

よって，対称性を考えると，曲線の概形は右下の図のようになる。





注意　この問題の解答における増減表の →，←，↑，↓は，次のことを表す。

→：x の値が増加する　　←：x の値が減少する

↑：y の値が増加する　　↓：y の値が減少する

7　$a>0$，$b>0$ とし，$f(x)=\log\dfrac{x+a}{b-x}$ とする。曲線 $y=f(x)$ はその変曲点に関して対称であることを示せ。

解答　略

解説

対数の真数は正の数であるから　$\dfrac{x+a}{b-x}>0$

これと $a>0$，$b>0$ から　$-a<x<b$

このとき　$y=\log(x+a)-\log(b-x)$

よって　$y'=\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{b-x}=\dfrac{a+b}{(x+a)(b-x)}>0$

また　$y''=-\dfrac{1}{(x+a)^2}+\dfrac{1}{(b-x)^2}=\dfrac{-(b^2-2bx+x^2)+x^2+2ax+a^2}{(x+a)^2(b-x)^2}$

$=\dfrac{2(a+b)x+a^2-b^2}{(x+a)^2(b-x)^2}=\dfrac{(a+b)(2x+a-b)}{(x+a)^2(b-x)^2}$

$p=\dfrac{b-a}{2}$ とする。$y''=0$ とすると，$x=p$ であり

$-a<x<p$ で　$y''<0$，　$p<x<b$ で　$y''>0$

$x=p$ のとき $y=0$ であり，点 $(p,\ 0)$ が変曲点である。

点 $(p,\ 0)$ が原点にくるように，曲線 $y=f(x)$ を x 軸方向に $-p$ だけ平行移動すると

$y=\log(x+p+a)-\log(b-x-p)=\log\left(x+\dfrac{a+b}{2}\right)-\log\left(-x+\dfrac{a+b}{2}\right)$

この曲線の方程式を $y=g(x)$ とすると，$g(-x)=-g(x)$ が成り立つから，曲線 $y=g(x)$ は原点に関して対称である。

したがって，曲線 $y=f(x)$ はその変曲点 $(p,\ 0)$ に関して対称である。

8　第 2 次導関数を利用して，次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{x^2}{2}+2x-1$　　　(2)　$y=e^x\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

解答　(1)　$x=-1$ で極小値 $-\dfrac{31}{12}$，$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{12}$，$x=2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}$

(2)　$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5}{4}\pi}$

解説

与えられた関数を $f(x)$ とする。

(1)　$f'(x)=x^3-2x^2-x+2=x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)=(x+1)(x-1)(x-2)$

$f''(x)=3x^2-4x-1$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 1,\ 2$

$f''(-1)=6>0$，$f''(1)=-2<0$，$f''(2)=3>0$ であるから，$f(x)$ は

$x=-1$ で極小値 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}-2-1=-\dfrac{31}{12}$，

$x=1$ で極大値 $\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}+2-1=\dfrac{1}{12}$，

$x=2$ で極小値 $4-\dfrac{16}{3}-2+4-1=-\dfrac{1}{3}$

をとる。

(2)　$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$

$f''(x)=e^x(\cos x-\sin x)+e^x(-\sin x-\cos x)=-2e^x\sin x$

$f'(x)=0$ とすると　$\sin x-\cos x=0$　　したがって　$\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x-\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ であるから

$x-\dfrac{\pi}{4}=0,\ \pi$　すなわち　$x=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{5}{4}\pi$

$f''\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{2}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}<0$，$f''\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2}}e^{\frac{5}{4}\pi}>0$ であるから，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{4}$ で極大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}$，$x=\dfrac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{5}{4}\pi}$

をとる。