数学演習（関数の値の変化）Ｒ１．７．２７　　　　(　　)組(　　)番　名前(　　　　　　　　)

$\boxed{1}$ 次の関数の増減を調べよ。

(1) $y=x-2\sqrt{x}$　　(2) $y=\dfrac{x^3}{x-2}$　　(3) $y=2x-\log x$

$\boxed{2}$ 次の関数の極値を求めよ。

(1) $y=xe^{-x}$　　(2) $y=\dfrac{3x-1}{x^3+1}$

(3) $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$　　(4) $y=(1-\sin x)\cos x$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5) $y=|x|\sqrt{4-x}$　　(6) $y=(x+2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$

$\boxed{3}$ 関数 $f(x)=\dfrac{e^{kx}}{x^2+1}$ (k は定数) について

(1) $f(x)$ が $x=-2$ で極値をとるとき，k の値を求めよ。

(2) $f(x)$ が極値をもつとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{4}$ 関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ は $x=-2$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 2 をとる。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{5}$ 次の関数の最大値，最小値を求めよ。(1)，(2) では $0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。

(1) $y=\sin 2x+2\sin x$

(2) $y=\sin x+(1-x)\cos x$

(3) $y=x+\sqrt{1-4x^2}$

(4) $y=(x^2-1)e^x$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

$\boxed{6}$ 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1) $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2+3}$

(2) $y=e^{-x}+x-1$

$\boxed{7}$ 関数 $f(x)=\dfrac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を定めよ。

$\boxed{8}$ 関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+1}$ $(a>0)$ について，次のものを求めよ。

(1) $f'(x)=0$ となる x の値

(2) (1) で求めた x の値を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，β と 1 の大小関係

(3) $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1 であるとき，a の値

$\boxed{9}$ 3 点 O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 Q が，条件 OQ$=$AQ$=$PQ を満たす。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。

(1) 点 Q の座標を求めよ。

(2) 点 Q の y 座標の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

$\boxed{10}$ 半径 1 の球に，側面と底面で外接する直円錐を考える。この直円錐の体積が最小となるとき，底面の半径と高さの比を求めよ。

1 次の関数の増減を調べよ。

(1)　$y=x-2\sqrt{x}$　　(2)　$y=\dfrac{x^3}{x-2}$　　(3)　$y=2x-\log x$

解答　(1)　$0\leqq x\leqq 1$ で単調に減少し，$1\leqq x$ で単調に増加する

(2)　$x<2$，$2<x\leqq 3$ で単調に減少し，$3\leqq x$ で単調に増加する

(3)　$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ で単調に減少し，$\dfrac{1}{2}\leqq x$ で単調に増加する

解説

(1)　定義域は $x\geqq 0$ である。

$$y'=1-2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘	-1	↗

したがって，

$0\leqq x\leqq 1$ で単調に減少し，$1\leqq x$ で単調に増加する。

(2)　定義域は $x\neq 2$ である。

$$y'=\frac{3x^2(x-2)-x^3\cdot 1}{(x-2)^2}=\frac{2x^2(x-3)}{(x-2)^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=0,\ 3$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	↘	0	↘		↘	27	↗

したがって，

$x<2$，$2<x\leqq 3$ で単調に減少し，

$3\leqq x$ で単調に増加する。

(3)　定義域は $x>0$ である。

$$y'=2-\frac{1}{x}=\frac{2x-1}{x}\qquad y'=0 \text{ とすると}\qquad x=\frac{1}{2}$$

よって，y の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		↘	$1+\log 2$	↗

したがって，

$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ で単調に減少し，

$\dfrac{1}{2}\leqq x$ で単調に増加する。

2 次の関数の極値を求めよ。

(1)　$y=xe^{-x}$　　(2)　$y=\dfrac{3x-1}{x^3+1}$

(3)　$y=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$　　(4)　$y=(1-\sin x)\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$

(5)　$y=|x|\sqrt{4-x}$　　(6)　$y=(x+2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$

解答　(1)　$x=1$ で極大値 e^{-1}　　(2)　$x=1$ で極大値 1

(3)　$x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}$，$x=0$ で極大値 1

(4)　$x=\dfrac{7}{6}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\dfrac{11}{6}\pi$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(5)　$x=\dfrac{8}{3}$ で極大値 $\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$，$x=0$ で極小値 0

(6)　$x=-\dfrac{4}{5}$ で極大値 $\dfrac{12\sqrt[3]{10}}{25}$，$x=0$ で極小値 0

解説

(1)　$y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x)$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	↗	極大	↘

よって　　$x=1$ で極大値 e^{-1}

(2)　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ であるから，定義域は　　$x\neq -1$

$$y'=\frac{3(x^3+1)-(3x-1)\cdot 3x^2}{(x^3+1)^2}=\frac{-3(2x^3-x^2-1)}{(x^3+1)^2}$$

$$=\frac{-3(x-1)(2x^2+x+1)}{(x^3+1)^2}$$

$y'=0$ とすると　　$x=1$

増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	↗		↗	極大	↘

よって　　$x=1$ で極大値 1

(3)　$y'=\dfrac{x^2+x+1-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=-\dfrac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-2,\ 0$

増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小	↗	極大	↘

よって　　$x=-2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}$，$x=0$ で極大値 1

(4)　$y'=-\cos x\cdot\cos x+(1-\sin x)(-\sin x)=-1+\sin^2 x-\sin x+\sin^2 x$

$=2\sin^2 x-\sin x-1=(\sin x-1)(2\sin x+1)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で $y'=0$ を解くと

$\sin x-1=0$ から　$x=\dfrac{\pi}{2}$，　$2\sin x+1=0$ から　$x=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	↘	0	↘	極小	↗	極大	↘	1

$x=\dfrac{7}{6}\pi$ で極小値 $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$x=\dfrac{11}{6}\pi$ で極大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

(5)　定義域は，$4-x\geqq 0$ から　　$x\leqq 4$

$0\leqq x\leqq 4$ のとき，$y=x\sqrt{4-x}$ であるから，$0<x<4$ では

$$y'=\sqrt{4-x}-\frac{x}{2\sqrt{4-x}}=\frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$$

この範囲で $y'=0$ となる x の値は　　$x=\dfrac{8}{3}$

$x<0$ のとき　　$y=-x\sqrt{4-x}$

ゆえに，$x<0$ では　　$y'=-\dfrac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}<0$

関数 $y=|x|\sqrt{4-x}$ は $x=0$，4 で微分可能ではない。増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	4
y'	$-$		$+$	0	$-$	
y	↘	極小	↗	極大	↘	0

よって　　$x=\dfrac{8}{3}$ で極大値 $\dfrac{8}{3}\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$，$x=0$ で極小値 0

(6)　$y'=\sqrt[3]{x^2}+(x+2)\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}}(3x+2x+4)=\dfrac{5x+4}{3\sqrt[3]{x}}$

$y'=0$ とすると　　$x=-\dfrac{4}{5}$

関数 $y=(x+2)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ は $x=0$ で微分可能ではない。増減表は右のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって　$x=-\dfrac{4}{5}$ で極大値 $\dfrac{6}{5}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{12\sqrt[3]{10}}{25}$，

$x=0$ で極小値 0

3 関数 $f(x)=\dfrac{e^{kx}}{x^2+1}$ (k は定数) について

(1)　$f(x)$ が $x=-2$ で極値をとるとき，k の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極値をもつとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。

解答　(1)　$k=-\dfrac{4}{5}$　　(2)　$-1<k<1$

解説

$$f'(x)=\frac{ke^{kx}(x^2+1)-e^{kx}\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^{kx}(kx^2-2x+k)}{(x^2+1)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると，$e^{kx}>0$，$x^2+1>0$ から　　$kx^2-2x+k=0$

$g(x)=kx^2-2x+k$ とする。

(1)　$f(x)$ が $x=-2$ で極値をとるとき　　$g(-2)=0$

ここで　　$g(-2)=4k+4+k=5k+4$　　よって，$5k+4=0$ から　　$k=-\dfrac{4}{5}$

このとき　　$g(x)=-\dfrac{4}{5}x^2-2x-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{2}{5}(x+2)(2x+1)$

$g(x)=0$ すなわち $f'(x)=0$ を満たす x の値は　$x=-2,\ -\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{e^{kx}}{(x^2+1)^2}>0$ であるから，$f(x)$ の増減表は右のようになり，$f(x)$ は $x=-2$ で極小となる。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

よって　　$k=-\dfrac{4}{5}$

(2)　$f(x)$ が極値をもつとき，$f'(x)=0$ すなわち $g(x)=0$ となる x の値 c があり，$x=c$ の前後で $g(x)$ の符号が変わる。

[1]　$k=0$ のとき　　$g(x)=0$ とすると，$-2x=0$ から　　$x=0$

$g(x)$ の符号は $x=0$ の前後で正から負に変わるから，$f(x)$ は極値をもつ。

[2]　$k\neq 0$ のとき　　2 次方程式 $g(x)=0$ の判別式 D について　　$D>0$

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-k\cdot k=-(k+1)(k-1)$ であるから　　$(k+1)(k-1)<0$

$k\neq 0$ であるから　　$-1<k<0,\ 0<k<1$

このとき，$g(x)$ の符号は $x=c$ の前後で変わるから，$f(x)$ は極値をもつ。

以上から，求める k の値の範囲は　　$-1<k<1$

4 関数 $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+2}$ は $x=-2$ で極小値 $\dfrac{1}{2}$，$x=1$ で極大値 2 をとる。このとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

解答　$a=1$，$b=2$，$c=3$

解説

$$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x^2+2)-(ax^2+bx+c)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-bx^2+(4a-2c)x+2b}{(x^2+2)^2}$$

$x=-2$ で極小値 $\frac{1}{2}$ をとるから　$f(-2)=\frac{1}{2}$，$f'(-2)=0$

$x=1$ で極大値 2 をとるから　　$f(1)=2$，$f'(1)=0$

$f(-2)=\frac{1}{2}$ から　　　　　$4a-2b+c=3$　……①

$f(1)=2$ から　　　　　　　$a+b+c=6$　　……②

$f'(-2)=0$，$f'(1)=0$ から　　$4a+b-2c=0$　……③

①～③ を解いて　　$a=1$，$b=2$，$c=3$

逆に，$a=1$，$b=2$，$c=3$ のとき　　$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$　……④

$$f'(x)=\frac{-2x^2-2x+4}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=-2$，1

関数 ④ の増減表は右のようになり，条件を満たす。

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 $\frac{1}{2}$	↗	極大 2	↘

よって　　$a=1$，$b=2$，$c=3$

5 次の関数の最大値，最小値を求めよ。(1)，(2) では $0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。

(1)　$y=\sin 2x+2\sin x$　　　(2)　$y=\sin x+(1-x)\cos x$

(3)　$y=x+\sqrt{1-4x^2}$　　　(4)　$y=(x^2-1)e^x$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

解答　(1)　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　$x=\pi$ で最大値 $\pi-1$，$x=2\pi$ で最小値 $1-2\pi$

(3)　$x=\frac{\sqrt{5}}{10}$ で最大値 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，$x=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{2}$

(4)　$x=2$ で最大値 $3e^2$，$x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$

解説

(1)　$y'=2\cos 2x+2\cos x=2(2\cos^2 x-1)+2\cos x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)$

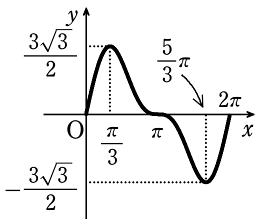
$=2(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で $y'=0$ となる x の値は

$\cos x=-1$ から　$x=\pi$，　$\cos x=\frac{1}{2}$ から　$x=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
y'		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0	↘	極小 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	0



よって　　$x=\frac{\pi}{3}$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$x=\frac{5}{3}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

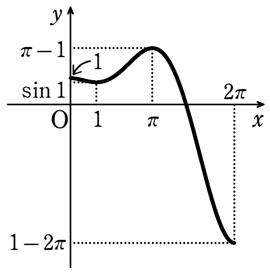
(2)　$y'=\cos x-\cos x+(1-x)(-\sin x)=(x-1)\sin x$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で $y'=0$ となる x の値は

$x-1=0$ から　$x=1$，$\sin x=0$ から　$x=0$，π，2π

$0\leqq x\leqq 2\pi$ における y の増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	1	↘	極小 $\sin 1$	↗	極大 $\pi-1$	↘	$1-2\pi$



ここで　　$1<\pi-1$，$\sin 1>0>1-2\pi$

よって　　$x=\pi$ で最大値 $\pi-1$，$x=2\pi$ で最小値 $1-2\pi$

(3)　定義域は，$1-4x^2\geqq 0$ から　　$-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$　……①

$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ のとき　　$y'=1+\frac{-8x}{2\sqrt{1-4x^2}}=\frac{\sqrt{1-4x^2}-4x}{\sqrt{1-4x^2}}$

$y'=0$ とすると　　$\sqrt{1-4x^2}=4x$　……②

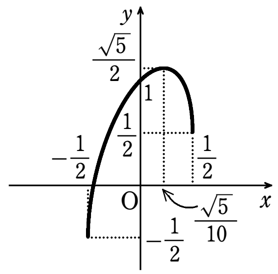
両辺を平方して整理すると　　$20x^2=1$

これを解いて　　$x=\pm\frac{1}{2\sqrt{5}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{10}$

② より，$x\geqq 0$ であるから　　$x=\frac{\sqrt{5}}{10}$

① における y の増減表は次のようになる。

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{5}}{10}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
y'	／	$+$	0	$-$	／
y	$-\frac{1}{2}$	↗	極大 $\frac{\sqrt{5}}{2}$	↘	$\frac{1}{2}$



よって　　$x=\frac{\sqrt{5}}{10}$ で最大値 $\frac{\sqrt{5}}{2}$，$x=-\frac{1}{2}$ で最小値 $-\frac{1}{2}$

(4)　$y'=2xe^x+(x^2-1)e^x=(x^2+2x-1)e^x$

$y'=0$ とすると，$e^x>0$ であるから　　$x^2+2x-1=0$

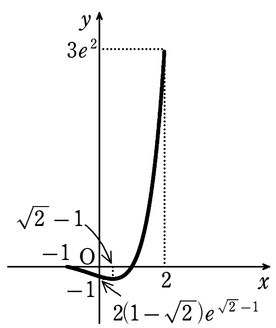
これを解いて　　$x=-1\pm\sqrt{2}$

$-1\leqq x\leqq 2$ であるから　　$x=-1+\sqrt{2}$

このとき　　$x^2-1=-2x=-2(-1+\sqrt{2})=2(1-\sqrt{2})$

$-1\leqq x\leqq 2$ における y の増減表は次のようになる。

x	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	0	↘	極小 $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$	↗	$3e^2$



よって　　$x=2$ で最大値 $3e^2$，$x=\sqrt{2}-1$ で最小値 $2(1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}-1}$

6 次の関数に最大値，最小値があれば，それを求めよ。

(1)　$y=\frac{x^2-3x}{x^2+3}$　　　　(2)　$y=e^{-x}+x-1$

解答　(1)　$x=-3$ で最大値 $\frac{3}{2}$，$x=1$ で最小値 $-\frac{1}{2}$

(2)　$x=0$ で最小値 0，最大値はない

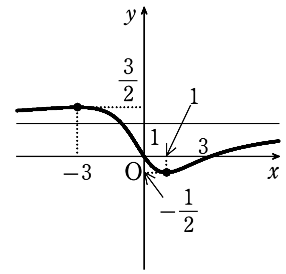
解説

(1)　$y'=\frac{(2x-3)(x^2+3)-(x^2-3x)\cdot 2x}{(x^2+3)^2}=\frac{3x^2+6x-9}{(x^2+3)^2}=\frac{3(x+3)(x-1)}{(x^2+3)^2}$

$y'=0$ とすると　　$x=-3$，1

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $\frac{3}{2}$	↘	極小 $-\frac{1}{2}$	↗



また　　$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}}{1+\frac{3}{x^2}}=1$　　同様にして　　$\lim_{x\to-\infty} y=1$

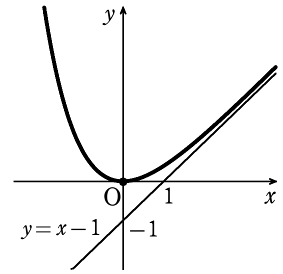
ゆえに　　$x=-3$ で最大値 $\frac{3}{2}$，$x=1$ で最小値 $-\frac{1}{2}$

(2)　$y'=-e^{-x}+1$

$y'=0$ とすると　　$e^{-x}=1$　　よって　　$x=0$

y の増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗



また　　$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^x}+x-1\right)=\infty$

ゆえに　　$x=0$ で最小値 0，最大値はない

7 関数 $f(x)=\frac{a\sin x}{\cos x+2}$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の最大値が $\sqrt{3}$ となるように定数 a の値を定めよ。

解答　$a=3$

解説

$$f'(x)=\frac{a\{\cos x(\cos x+2)-\sin x(-\sin x)\}}{(\cos x+2)^2}=\frac{a(2\cos x+1)}{(\cos x+2)^2}$$

[1]　$a=0$ のとき

常に $f(x)=0$ であるから，最大値が $\sqrt{3}$ になることはない。

よって，不適。

[2]　$a>0$ のとき

$f'(x)=0$ とすると　　$\cos x=-\frac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq\pi$ であるから　　$x=\frac{2}{3}\pi$

$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになり，

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	0

$x=\frac{2}{3}\pi$ で極大かつ最大となる。

ゆえに，最大値は　　$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{-\frac{1}{2}+2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$

よって　　$\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{3}$

したがって　　$a=3$　　　これは $a>0$ を満たす。

[3]　$a<0$ のとき

$0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

ゆえに，最大値は　$f(0)=f(\pi)=0$

よって，不適。

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	0

[1]〜[3] から　$a=3$

8 関数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+1}$ $(a>0)$ について，次のものを求めよ。

(1)　$f'(x)=0$ となる x の値

(2)　(1) で求めた x の値を α，β $(\alpha<\beta)$ とするとき，β と 1 の大小関係

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値が 1 であるとき，a の値

解答　(1)　$x=-a \pm \sqrt{a^2+1}$　(2)　$\beta<1$　(3)　$a=\dfrac{3}{4}$

解説

(1)　$f'(x)=\dfrac{x^2+1-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{x^2+2ax-1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$ とすると　$x^2+2ax-1=0$

これを解いて　$x=-a \pm \sqrt{a^2+1}$

(2)　$\alpha<\beta$ であるから　$\beta=-a+\sqrt{a^2+1}$

よって　$\beta-1=-a-1+\sqrt{a^2+1}=\dfrac{(a^2+1)-(a+1)^2}{\sqrt{a^2+1}+a+1}=\dfrac{-2a}{\sqrt{a^2+1}+a+1}$

$a>0$ であるから　$\beta-1<0$　したがって　$\beta<1$

(3)　$f'(x)=-\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(x^2+1)^2}$ であり

$\alpha=-a-\sqrt{a^2+1}<0$

また，(2) より $0<\beta<1$ であるから，

$0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は右のようになる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	a	↗	極大 $f(\beta)$	↘	$\frac{a+1}{2}$

ゆえに，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲において，$f(x)$ は $x=\beta$ のとき極大かつ最大となり，その値は　$f(\beta)=\dfrac{\beta+a}{\beta^2+1}$　最大値は 1 であるから　$\dfrac{\beta+a}{\beta^2+1}=1$

分母を払って　$\beta+a=\beta^2+1$

よって　$a=\beta^2-\beta+1$　…… ①

β は $x^2+2ax-1=0$ の解であるから　$\beta^2+2a\beta-1=0$

これに ① を代入して整理すると　$2\beta^3-\beta^2+2\beta-1=0$

ゆえに　$(\beta^2+1)(2\beta-1)=0$　$\beta^2+1>0$ であるから　$\beta=\dfrac{1}{2}$

① に代入して　$a=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{4}$

9 3 点 O$(0,\ 0)$，A$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と点 Q が，条件 OQ＝AQ＝PQ を満たす。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。

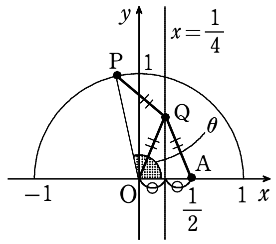
(1)　点 Q の座標を求めよ。

(2)　点 Q の y 座標の最小値とそのときの θ の値を求めよ。

解答　(1)　$\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2-\cos\theta}{4\sin\theta}\right)$　(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解説

(1)　OQ＝AQ より，点 Q は線分 OA の垂直二等分線上にあるから，Q$\left(\dfrac{1}{4},\ y\right)$ とおける。



OQ＝PQ より OQ^2＝PQ^2 であるから

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{4}-\cos\theta\right)^2+(y-\sin\theta)^2$

整理して　$2y\sin\theta=1-\dfrac{1}{2}\cos\theta$

$0<\theta<\pi$ から　$\sin\theta \neq 0$

よって　$y=\dfrac{2-\cos\theta}{4\sin\theta}$　…… ①　ゆえに　Q$\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2-\cos\theta}{4\sin\theta}\right)$

(2)　① から

$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin\theta\cdot\sin\theta-(2-\cos\theta)\cdot\cos\theta}{\sin^2\theta}=\dfrac{1-2\cos\theta}{4\sin^2\theta}$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$0<\theta<\pi$ における y の増減表は右のようになるから，y は

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

をとる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$-$	0	$+$	
y		↘	極小 $\frac{\sqrt{3}}{4}$	↗	

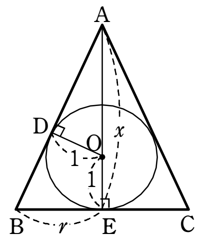
10 半径 1 の球に，側面と底面で外接する直円錐を考える。この直円錐の体積が最小となるとき，底面の半径と高さの比を求めよ。

解答　$\sqrt{2}:4$

解説

直円錐の高さを x，底面の半径を r，体積を V とすると，$x>2$

であり　$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 x$　…… ①



球の中心を O として，直円錐をその頂点と底面の円の中心を通る平面で切ったとき，切り口の三角形 ABC，および球と △ABC との接点 D，E を右の図のように定める。

△ABE∽△AOD であるから　AE：AD＝BE：OD

すなわち　$x:\sqrt{(x-1)^2-1^2}=r:1$

よって　$r=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}$　…… ②

② を ① に代入して　$V=\dfrac{\pi}{3}\cdot\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2x}}\right)^2\cdot x=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{x^2}{x-2}$

よって　$\dfrac{dV}{dx}=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{2x(x-2)-x^2\cdot 1}{(x-2)^2}=\dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$\dfrac{dV}{dx}=0$ とすると，$x>2$ であるから　$x=4$

$x>2$ のとき V の増減表は右のようになり，体積 V は $x=4$ のとき最小となる。このとき，② から　$r=\sqrt{2}$

ゆえに，求める底面の半径と高さの比は　$r:x=\sqrt{2}:4$

x	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$\frac{dV}{dx}$		$-$	0	$+$
V		↘	極小	↗